

Faculté des Sciences de Base
Centre de Recherches en Physique des Plasmas

Kurt Appert

THEORIE DES PLASMAS CHAUDS

Polycopié pour divers cours en

Physique des Plasmas

destiné aux

physiciens de 4^{ème} année

et aux doctorants

Lausanne, 10 mars 2004

Nouvelle édition

Cette page est vide

TABLE DES MATIERES

1. Description cinétique	1
1.1 Introduction	1
1.2 L'électrodynamique des gaz ionisés	2
1.3 Le gaz et le plasma idéal	4
1.4 La fonction de distribution à une particule	7
1.5 Les quantités macroscopiques	8
La densité de particules, de charge et de masse	8
Les vitesses moyennes et le courant électrique	9
Les moments d'ordre deux	9
Le flux d'énergie	11
1.6 Fluctuations, corrélations et collisions	11
1.7 Le théorème de Liouville	13
1.8 L'équation de Vlasov	16
1.9 Les équations fluides	17
1.10 Les lois de conservation globales en théorie Vlasov	18
Conservation des particules	18
Conservation de l'énergie	19
Conservation de la quantité de mouvement	20
Conservation de la positivité	21
1.11 Les états stationnaires de l'équation de Vlasov	22
Plasma sans champ	23
Plasma dans champ magnétique constant	24
Plasma dans champ magnétique inhomogène	24
2. Les ondes dans un plasma non-magnétisé	27
2.1 L'équation de Vlasov linéarisée	27
2.2 L'amortissement de Landau	28
Passage à Fourier-Laplace	29

La partie principale et le résidu du pôle	30
Evaluation pour le plasma froid	32
L'approximation résonnante d'une relation de dispersion	33
Calcul de l'amortissement	34
2.3 L'écoulement libre	35
2.4 L'interaction onde-particules	37
Modèle à une particule	37
Formulation du problème avec onde imposée	38
Solution au premier ordre	40
Calcul de l'échange d'énergie	41
Particules résonnantes	44
Energie de l'onde	45
Amortissement Landau	46
Particules non-résonnantes	47
Bilan d'énergie	48
2.5 Le milieu diélectrique	49
La loi d'Ohm	49
Les équations de Maxwell	50
La relation de dispersion	52
La relation de dispersion dans un milieu homogène et isotrope	53
L'approximation électrostatique	54
2.6 Le tenseur diélectrique du modèle Vlasov	55
2.7 La limite du plasma froid	58
2.8 La fonction de dispersion	58
2.9 L'onde de Langmuir	64
2.10 L'onde et l'instabilité acoustique-ionique	67
2.11 Les ondes électromagnétiques	69
2.12 L'instabilité de Weibel	71
3. Les ondes dans un plasma magnétisé	72
3.1 Le tenseur diélectrique	72

3.2 Fonction diélectrique dans un plasma maxwellien	79
3.3 Ondes électrostatiques	81
L'onde de Langmuir magnétisée	81
L'instabilité de l'éventail	84
Ondes de Bernstein	86
3.4 Tenseur diélectrique dans un plasma maxwellien	88
3.5 Propagation parallèle	92
3.6 Propagation perpendiculaire	97
3.7 Propagation oblique	102
4. La magnétohydrodynamique idéale	105
4.1 Introduction	105
4.2 Les équations de la MHD résistive	107
Dérivation heuristique	107
Dérivation à partir des équations cinétiques	112
4.3 Quelques conséquences générales des équations MHD	116
La force magnétique	116
La diffusion du champ magnétique et la MHD idéale	117
Le champ magnétique gelé de la MHD idéale	117
4.4 L'équilibre	121
Surfaces magnétiques	121
Equilibres plans	121
Equilibres cylindriques	122
Equilibres toriques, axisymétriques	122
4.5 Les équations linéarisées de la MHD idéale	125
L'équation de mouvement	125
Le plasma homogène et infini	126
Le plasma confiné et les conditions aux bords	131
4.6 La stabilité MHD	135
Le problème à valeur propre	135
Le principe d'énergie	136

Plasma non-magnétisé confiné par un champ	139
La striction confinée par un courant de surface	142
4.7 Un problème mathématiquement simple	148
Formulation du problème	148
La symétrie de l'opérateur de force	149
L'énergie, le lagrangien et le principe de moindre action	150
La résolution du système des équations différentielles	152
5. Effets non-linéaires	153
5.1 Un rappel en guise d'introduction	153
L'équation de Vlasov	153
Les états stationnaires	154
Amortissement et l'énergie d'une onde (de Langmuir)	154
5.2 Ondes nonlinéaires simples	157
5.3 Interaction résonnante onde-particules et corrélations du champ	161
5.4 Interaction entre plusieurs ondes	170
5.5 Instabilité paramétrique	176
6. Waves in non-uniform plasmas	178
6.1 Introduction	178
6.2 Cold plasma dispersion relation, resonances and principle cut-offs	179
6.3 Propagation, reflection, conversion and absorption in unmagnetised plasma	182
Introduction	182
Dispersion relation	185
The basic equations	185
S-polarization	187
P-polarization	190
Remarks on mathematics, numerics and Alfvén wave heating	194
6.4 Waves in the ion cyclotron range of frequency (ICRF)	197
ICRF versus ICRH	197
The cold dispersion relation and its consequences	198

Discussion of the perpendicular dispersion relation for ICRF	199
Resonant absorption differential equations for ICRF . . .	201
Heating with the fast wave	205
ICRF heating scenarios	205
Conclusion	207
A1. Les transformations intégrales	208
A1.1 Définition de la transformée de Fourier	208
A1.2 La transformée des dérivées	211
A1.3 La transformée de Laplace	212
A2. Ecrantage d'une charge immobile	214
A2.1 Formulation du problème	214
A2.2 Solution du problème par la méthode Fourier	216
A3. Les collisions coulombiennes	219
A3.1 La relaxation par collisions	219
Formulation statistique du problème	220
La relation avec le temps de relaxation	221
Description qualitative des processus de transport	222
La collision "binaire" moyenne	224
Calcul de l'angle moyen	226
Le temps de relaxation	227
A3.2 La loi d'Ohm	229
A4. La méthode des perturbations	230
A5. Méthode des orbites non-perturbées	234
A6. Fourier, Laplace ou l'ordinateur ?	238
A7. Résolution d'une équation d'onde linéaire	243

Remerciements

Je tiens à remercier très chaleureusement mon collègue M. Jan Václavík avec lequel j'ai eu au cours des années d'innombrables discussions sur la théorie cinétique ; sans lui je ne saurais pas grand-chose en la matière. A plusieurs endroits dans ce cours j'ai même carrément adopté sa manière de faire, en particulier dans les paragraphes 2.7, 3.1 et 3.4. Ce dernier paragraphe a aussi bénéficié de la contribution de M. O. Sauter. D'autre part, je suis reconnaissant à M. Tran Trach Minh qui m'a introduit au logiciel $\text{\TeX}$, le traitement de texte scientifique adopté par les sociétés américaines de mathématique et de physique (AMS et APS) et qui m'a constamment conseillé sur son utilisation.

Ma gratitude va également à M. A. Jaun qui s'est donné beaucoup de peine de dissimuler — dans la version écrite du cours au moins — mon origine d'outre Sarine, à M. R. Moeckli qui m'a aidé à réorganiser la matière pour cette édition et à l'imprimer moyennant les macros $\text{\TeX}$ sis, à Mlle E. Grüter qui a dactylographié la plus grande partie du texte et à Mme J. Helfer qui a fait les dessins.

Finalement, mes remerciements vont à MM. les professeurs Tran M. Q. et F. Troyon qui ont enseigné cette matière avant moi et dont les notes de cours étaient une très bonne source d'inspiration.

Lausanne, 1^{er} juin 1992

En 1994, deux cours de physique des plasmas ont été supprimés. Cela m'a forcé de comprimer mon cours sur la théorie cinétique pour faire de la place pour la magnétohydrodynamique (MHD). Le nouveau nom du cours, "Théorie des plasma chauds", reflète ce changement. La partie cinétique a été réorganisée et complétée par une introduction "rapide" à l'amortissement de Landau (paragraphe 2.2). Cela me permet de sauter la plus grande partie du paragraphe 2.4 qui est assez formelle. Je n'ai pas supprimé les chapitres 3 et 4, bien que je n'aie plus le temps de les traiter au cours ; ils resteront utiles pour l'un ou l'autre travail pratique. L'appendice sur les collisions a été entièrement réécrite.

Le chapitre 5 contient un bref aperçu de la MHD. A plusieurs endroits, le texte a été fortement influencé par le polycopié de A. Bondeson qui avait donné, à l'EPFL, les derniers cours de MHD d'un semestre.

Je suis également reconnaissant à M. Fivaz et D. Appert qui m'ont corrigé les adjonctions à cette nouvelle édition.

Lausanne, 20 septembre 1996

Avec le lancement à l'EPFL d'une Ecole Doctorale en 2003, les chapitres 3, 4 et 5 sont de nouveau devenus plus utiles. J'y ai ajouté un chapitre sur la propagation

d'ondes en milieu inhomogène qui constitue la base pour la compréhension de diverses méthodes de chauffage des plasmas de fusion par ondes HF.

Lausanne, mars 2004

1.

Description cinétique

1.1 Introduction

Un gaz de particules chargées se comporte si différemment d'un gaz de particules neutres qu'on le considère souvent comme un quatrième état de la matière. La raison profonde de cette différence est à chercher dans la longue portée du potentiel de Coulomb, qui est le potentiel d'interaction des particules chargées. Dans le cours, on va montrer que le potentiel de Coulomb mène à une fréquence de collision entre particules chargées qui diminue avec la température du plasma. La conséquence en est qu'une théorie du plasma chaud peut, en première approximation, se passer des collisions. La qualité de cette approximation dépend des temps caractéristiques (ou fréquences) des phénomènes étudiés.

Dans des phénomènes lents, les collisions, même peu fréquentes, peuvent avoir le temps d'agir et ne sont en conséquence pas négligeables. En particulier, elles amènent un système vers l'équilibre thermique si rien ne les en empêche. La distribution des vitesses des particules est alors une distribution du type Maxwell-Boltzmann qui est caractérisée par la seule température. Si, par contre, le système est perturbé à des fréquences supérieures aux fréquences de collision, il ne peut y avoir équilibre thermique et la distribution des vitesses n'est pas caractérisable d'une façon simple. Elle doit être déterminée à l'aide d'une équation dite "cinétique" qui permet l'étude d'un ensemble général de particules.

La nature complètement différente d'un gaz et d'un plasma peut être bien mise en évidence en considérant une perturbation locale de densité (pour fixer les

idées, prenons-la de la forme d'une compression locale, c'est-à-dire d'une "bosse" dans la densité). Dans le cas du gaz, la perturbation va se propager comme onde sonore, sorte de domino microscopique où, lors de collisions binaires les particules se poussent l'une l'autre d'une façon bien imaginable. Il est, par contre, plus difficile de s'imaginer ce qui va se passer dans un plasma chaud. Les électrons étant beaucoup plus rapides (à énergie égale) que les ions, on verra d'abord dans la bosse une diminution de leur densité et donc la formation d'une densité de charge positive et d'un champ électrique associé dûs au surplus d'ions. Ce champ électrique retiendra des électrons jusqu'à ce que les ions, avec leur vitesse plus lente, aient le temps de s'éloigner de la bosse et de la faire ainsi disparaître. Cette image de l'évolution de la perturbation est simpliste mais contient les éléments essentiels d'une théorie cinétique du plasma.

D'abord, aucune interaction binaire a été invoquée ici mais, par contre, la formation d'un champ électrique macroscopique dû, dans cet exemple, à la densité de charge positive produite par le mouvement thermique des électrons. En effet, l'interaction entre les particules dans une telle théorie se fait à travers des champs électro-magnétiques macroscopiques (donc moyens) créés par l'ensemble des particules comme dans la théorie fluide du plasma chaud. On peut donc s'attendre à ce qu'une bonne partie des résultats fluide soit reproduite par la théorie cinétique. L'effet cinétique le plus important dans l'exemple cité plus haut est la disparition de la bosse due au mouvement thermique des ions. Dans la théorie fluide on aurait eu affaire à des oscillations Langmuir (en ce qui concerne le mouvement électronique rapide) et acoustique-ioniques (en ce qui concerne le mouvement ionique et électronique lent). Ici, on retrouve, apparemment sans problème, le mouvement électronique rapide mais on voit mal comment des oscillations acoustique-ioniques pourrait être expliquées. Ceci est le sujet d'une bonne partie de ce cours. La physique des ondes dans un plasma chaud est régie par le jeu subtil entre l'ordre maintenu par le mouvement collectifs des particules dans le champ électromagnétique et le désordre provoqué par le mouvement thermique.

1.2 L'électrodynamique des gaz ionisés

Il est raisonnable de classer la théorie cinétique des plasmas sous la physique statistique comme toute autre théorie cinétique, mais il n'est pas aberrant non plus de la considérer comme "l'électrodynamique des gaz ionisés chauds". En effet, la partie électrodynamique de la théorie (l'ordre) n'est pas du tout négligeable par rapport à la partie "statistique" (le désordre). La théorie fluides des ondes, qui peut être comprise comme une théorie heuristique macroscopique ne contenant aucun élément "statistique", est déjà d'une complexité remarquable !

Dans cette optique, on peut considérer la physique des plasmas (théorie fluide ou cinétique) comme l'électrodynamique des gaz ionisés. On part donc des équations de Maxwell

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.4)$$

le but de la physique des plasmas se résumant alors à chercher $\mathbf{j} = \text{fct}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. C'est un problème simple à énoncer, mais très, très difficile à résoudre.

En 3^{ème} année on a vu qu'il est en général impossible de trouver une conductibilité σ et une loi d'Ohm

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.5)$$

simple. En effet dans un métal déjà (qui a beaucoup de similitudes avec un plasma étant donné la grande quantité d'électrons libres) la conductibilité dépend de la fréquence ; en d'autres termes, la relation entre $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ n'est plus instantanée comme dans (1.5), $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ dépendant du champ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ antérieur. Autre complication, la présence d'un champ magnétique transforme la conductibilité en un tenseur. Ces deux propriétés d'un plasma sont bien évidentes dans le petit "Gedankenexperiment" de la Fig.1.1.

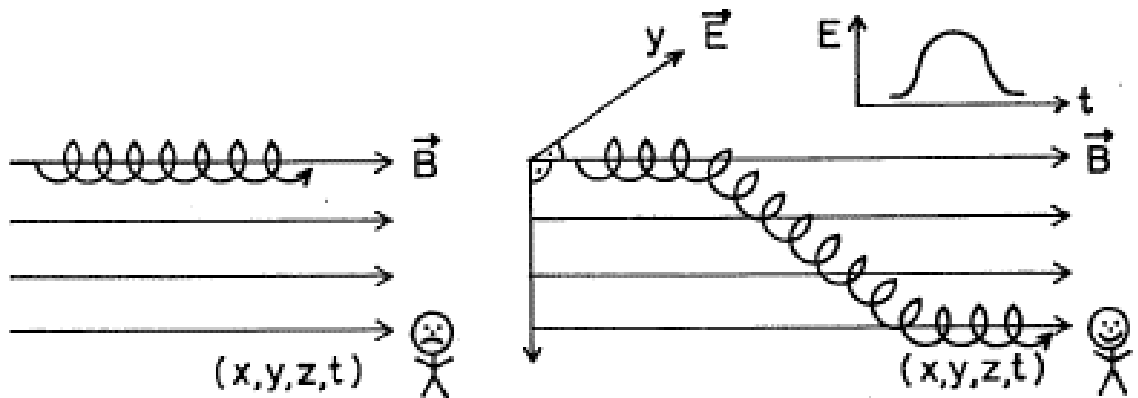


Figure 1.1 A gauche la particule se meut le long du champ magnétique sous la seule influence de ce champs et l'observateur ne voit rien. A droite un champ électrique ("ailleurs et avant") amène la particule à l'observateur par $\mathbf{v}_{dérive} = \mathbf{v}_{\parallel} + (\mathbf{E} \times \mathbf{B})/B^2$.

Le courant à l'endroit de l'observateur $j_z(x, y, z, t)$ dépend bien évidemment du champs électrique E_y à des temps antérieurs et des endroits différents.

Une complication supplémentaire est celle des non-linéarités. Les équations de Maxwell sont linéaires mais le comportement d'un plasma ne l'est pas ; la conductibilité σ dépend en général d'une façon non-linéaire des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. Comme il est d'habitude très difficile de traiter des problèmes non-linéaires avec des méthodes analytiques, on se restreindra dans la plus grande partie de ce cours à la théorie linéaire ; de la théorie non-linéaire on n'acquerra que quelques notions fondamentales utiles aussi dans d'autres branches de la physique.

Il est important de réaliser dès maintenant qu'une discipline comme la physique des plasmas a comme outil de travail de base "l'approximation judicieuse". C'est cela qui la rend parfois coriace pour le débutant qui a l'habitude de voir des théories "exactes".

Cela dit, on se propose maintenant de bâtir quand même une théorie atomique pour la relation entre $\mathbf{j}$ et les champs qui ne soit pas trop inexacte, quitte à devoir la simplifier fortement par la suite.

1.3 Le gaz et le plasma idéal

Commençons avec une des approximations essentielles. On ne va s'intéresser qu'au plasma idéal, l'analogue du gaz idéal. Qu'est-ce qu'un gaz idéal ?

- un gaz à densité faible.
- les particules sont pratiquement libres : temps d'une collision $\ll$ temps de vol libre. En conséquence l'énergie cinétique moyenne dans le temps est beaucoup plus grand que l'énergie potentielle moyenne.
- Soit R la portée du potentiel intermoléculaire $U(r)$ et d la distance moyenne entre deux particule.

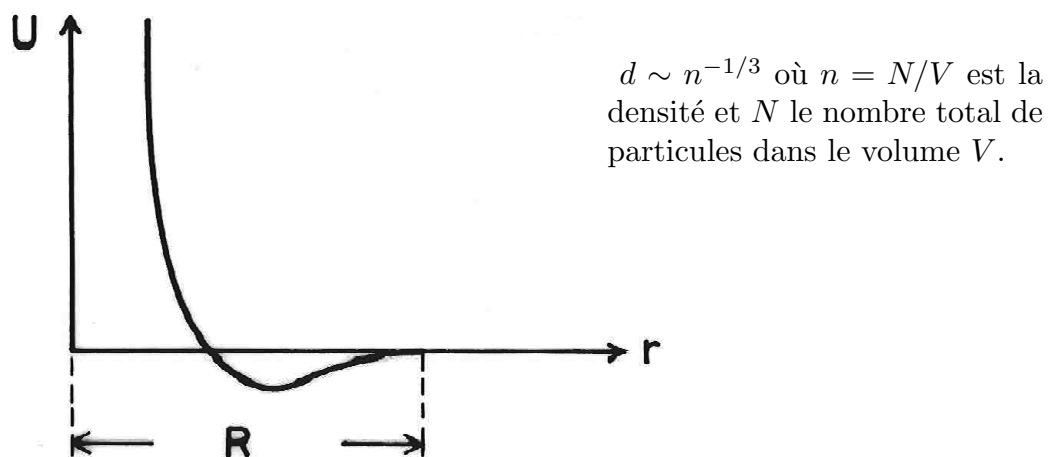


Figure 1.2 Potentiel intermoléculaire typique

Un gaz est idéal si $R \ll d$, donc quand le *paramètre de gaz* g_g satisfait

$$g_g = nR^3 \ll 1. \quad (1.6)$$

Dans le cas du plasma, le potentiel coulombien

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad (1.7)$$

n'offre pas de mesure de longueur puisque sa portée est infinie, Fig.1.3.

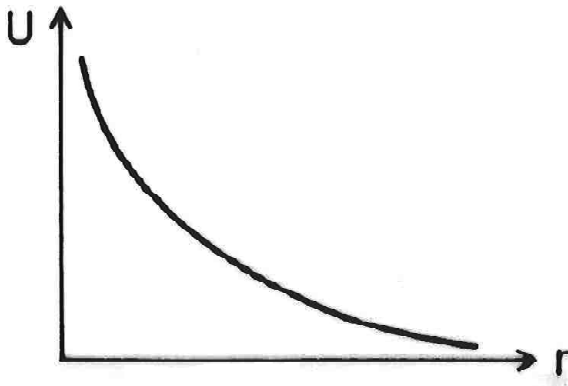


Figure 1.3 Potentiel de Coulomb

On peut, par contre, exiger que les particules soient "pratiquement libre", ou formulé autrement, que leurs orbites soient peu influencées par la présence des autres particules. Ceci est le cas quand l'énergie cinétique moyenne est beaucoup plus grande que l'énergie potentielle moyenne.

Une simple estimation donne l'ordre de grandeur :

$$\left\langle \frac{m}{2} v^2 \right\rangle \sim \frac{3}{2} kT \gg \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{d} = \frac{1}{8\pi} \frac{e^2 n^{1/3}}{\epsilon_0}. \quad (1.8)$$

• Un plasma est donc **idéal**, si sa température est suffisamment haute et/ou sa densité suffisamment basse. Le terme *plasma chaud* est donc synonyme de *plasma idéal*.

D'habitude on exprime l'inégalité (1.8) en terme du paramètre de plasma g_p (ou g tout court) défini comme l'inverse du nombre de particules chargées contenues dans une sphère de rayon λ_d , où λ_d est la longueur de Debye définie par

$$\lambda_d^2 = \frac{v_{th}^2}{\omega_p^2} = \frac{kT}{m} \frac{\epsilon_0 m}{ne^2} = \frac{\epsilon_0 kT}{ne^2}. \quad (1.9)$$

Ici, toutes les quantités se réfèrent aux électrons. Il faut noter ici qu'en physique des plasmas le symbole T est d'habitude compris comme l'énergie kT , k étant la constante de Boltzmann, et on écrira dès maintenant

$$v_{th}^2 = T/m \quad \text{et} \quad \lambda_d^2 = \frac{\epsilon_0 T}{ne^2}. \quad (1.10)$$

Définir $v_{th}^2 = T/m$ est une habitude anglo-saxonne commode.

- En multipliant (1.8) par $\epsilon_0/e^2 n$ on trouve $\lambda_d^2 \gg n^{-2/3}$ et la condition usuelle pour qu'un plasma soit idéal devient (beaucoup de particules dans une sphère de Debye)

$$g_p = \frac{1}{n\lambda_d^3} \ll 1. \quad (1.11)$$

Attention : L'éq. (1.11) n'exige pas une grande densité, au contraire ! Voir éq.(1.8).

Du point de vue thermodynamique un tel plasma se comporte comme un gaz idéal,

$$p = nT. \quad (1.12)$$

L'inégalité (1.11) permet d'énoncer un corollaire très important pour les plasmas chauds. Ils sont donc caractérisés par le fait qu'une sphère de Debye contient beaucoup de particules. On sait qu'à l'équilibre thermique seulement les particules à l'intérieur d'une sphère de Debye peuvent interagir les unes avec les autres. Des particules plus distantes ne se voient pas à cause de l'écrantage de Debye, mais même celles qui interagissent doivent le faire d'une façon très faible. Comme toutes les particules à l'intérieur d'une sphère (et elles sont beaucoup) se voient simultanément, mais n'ont qu'une énergie potentielle négligeable par rapport à leur énergie cinétique, l'interaction binaire (la "collision") doit être très, très faible et même de concept peu clair. Plus il y a de particules dans une sphère de Debye, moins elles interagissent les unes avec les autres. Dans un état hors équilibre, fréquent dans un plasma chaud, les champs collectifs (macroscopiques, moyens), créés presque exclusivement par des particules distantes, sont beaucoup plus importants que les champs "microscopiques" créés par les voisins proches. En d'autres mots, une particule test évolue dans un champ composé de deux parties : une partie moyenne provenant des particules distantes et une toute petite partie fluctuante que l'on peut interpréter comme l'effet des "collisions".

1.4 La fonction de distribution à une particule

Une description atomique de rêve pour notre plasma serait l'ensemble de toutes les équations de mouvement (une équation par particule) pris avec les équations de Maxwell. On obtiendrait ainsi des résultats exacts ! ... le seul problème est qu'il n'est pas possible de résoudre 10^{23} équations différentielles - sans parler du fait que l'on ne connaît pas les positions et vitesses initiales de nos 10^{23} particules. Nous sommes donc forcés d'utiliser une approche statistique.

On va donc s'intéresser au comportement **moyen** des particules. Formellement, on introduit une fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ qui est définie tel que

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v \quad (1.13)$$

soit proportionnel au nombre **moyen** de particules dont les coordonnées dans l'espace de phase tombent dans l'intervalle

$$[\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r}], \quad [\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}]. \quad (1.14)$$

Ici, les éléments de l'espace de phase d^3r et d^3v ne sont pas des quantités infiniment petites dans le sens mathématique. Ces éléments sont de taille finie : ils sont à la fois suffisamment grands pour contenir un **grand nombre** de particules et assez petits comparés aux dimensions macroscopiques du système physique pour être interprétés comme des points.

Le terme **grand nombre** = M veut dire, que la fluctuation relative moyenne $1/\sqrt{M}$ doit être suffisamment petite pour que la notion du nombre **moyen** de particules ait un sens. Avant de discuter les approximations faites en introduisant $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ nous allons fixer le langage et les normalisations.

La fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ prend parfois le qualificatif "macroscopique" ou "gros grain (=coarse grained)" parce qu'elle est définie à partir d'un grand nombre de particules par élément de l'espace de phase comme décrit tout à l'heure. Dans ce cours, on utilise la normalisation

$$\frac{1}{V} \int_V d^3r \int d^3v f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 1. \quad (1.15)$$

Pour la densité dans l'espace normal on a

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{N}{V} \int d^3v f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (1.16)$$

Des fois on définit la densité de probabilité $p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ pour une particule,

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)/V. \quad (1.17)$$

D'après (1.13)

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v \quad (1.18)$$

est la probabilité pour trouver une particule particulière dans l'intervalle (1.14).

Comme il se doit

$$\int p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v = 1. \quad (1.19)$$

Il est certain (probabilité = 1) que la particule particulière se trouve dans le volume V et qu'elle a des composantes de vitesse v_j comprise entre $-\infty$ et $+\infty$.

La normalisation (1.15) offre certains avantages de notation dus au fait que l'intégrale

$$\int f d^3v$$

est sans dimension. Dans le cas où $\partial f / \partial \mathbf{r} = 0$ elle vaut même 1. Certains auteurs préfèrent la normalisation

$$\frac{1}{N} \int_V d^3r \int d^3v f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 1 \quad (1.20)$$

avec la conséquence

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (1.21)$$

La différence entre les deux normalisations consiste d'un simple facteur N/V .

1.5 Les quantités macroscopiques

La densité de particules, de charge et de masse

D'après l'éq. (1.16) nous avons pour la densité

$$n_\alpha(\mathbf{r}, t) = \bar{n}_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (1.22)$$

L'indice α désigne le type de particules, électrons et différentes espèces d'ions. La quantité $\bar{n}_\alpha$ est la densité volumique moyenne N/V de l'espèce α , voir (1.16).

Les densités de charge $\rho(\mathbf{r}, t)$ et de masse $\rho_M(\mathbf{r}, t)$ s'obtiennent comme en théorie fluide :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}(\mathbf{r}, t), \quad (1.23)$$

$$\rho_M(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha}(\mathbf{r}, t). \quad (1.24)$$

Attention : Les notations changent d'auteur en auteur, ou plutôt, de sujet en sujet. En théorie cinétique on a rarement besoin de la densité de masse ; c'est pourquoi elle est notée ici avec un indice. En MHD idéale par contre, elle est la seule densité qui apparaît et on la note par $\rho(\mathbf{r}, t)$.

Les vitesses moyennes et le courant électrique

La moyenne $A_{\alpha}(\mathbf{r}, t)$ d'une quantité $a(\mathbf{v})$ est définie de façon générale par

$$A_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \langle a(\mathbf{v}) \rangle_{\alpha} = \frac{\int a(\mathbf{v}) f_{\alpha} d^3v}{\int f_{\alpha} d^3v}. \quad (1.25)$$

Ainsi on a pour la vitesse moyenne macroscopique,

$$n_{\alpha}(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \bar{n}_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v, \quad (1.26)$$

et pour le courant électrique,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}_{\alpha}(\mathbf{r}, t). \quad (1.27)$$

Les moments d'ordre deux

On appelle la densité et les vitesses moyennes les moments d'ordre zéro et un de la fonction de distribution. Si on connaît tous les moments d'une distribution, elle est entièrement déterminée.

Une caractérisation à l'aide des moments n'est pourtant raisonnable que dans les cas où un petit nombre de moments suffisent. La plupart ont alors une interprétation macroscopique.

La densité d'énergie

$$\bar{n}_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \int v^2 f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (1.28)$$

peut être séparée en deux parties, à savoir l'énergie cinétique macroscopique

$$n_\alpha(\mathbf{r}, t) \frac{m_\alpha}{2} \mathbf{V}_\alpha^2(\mathbf{r}, t) \quad (1.29)$$

et l'énergie cinétique microscopique (énergie thermique) que l'on utilise pour définir la température,

$$\frac{3}{2} n_\alpha(\mathbf{r}, t) T_\alpha(\mathbf{r}, t) = \bar{n}_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \int (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t))^2 f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (1.30)$$

Comme convenu la constante de Boltzmann n'a pas été écrite ici. Le moment général d'ordre deux

$$\bar{n}_\alpha m_\alpha \int \mathbf{v} : \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (1.31)$$

est un tenseur et représente un flux d'impulsion. La notation utilisée ici, $\mathbf{v} : \mathbf{v}$, est une manière d'insister sur le fait qu'il s'agit d'un produit dyadique de deux vecteurs ; souvent on note simplement " $\mathbf{v}\mathbf{v}$ ". La partie microscopique du moment (1.31),

$$\overleftrightarrow{\mathcal{P}}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \bar{n}_\alpha m_\alpha \int (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha) : (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (1.32)$$

s'appelle tenseur de pression. Dans le cas d'une distribution de symétrie sphérique autour de $\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ ce tenseur se réduit à

$$\overleftrightarrow{\mathcal{P}}_\alpha(\mathbf{r}, t) = p_\alpha(\mathbf{r}, t) \mathbf{I} \quad (1.33)$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice unité,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

et p_α la pression,

$$p_\alpha(\mathbf{r}, t) = n_\alpha(\mathbf{r}, t)T_\alpha(\mathbf{r}, t) \quad (1.35)$$

A l'équilibre thermique les fonctions de distribution sont isotropes, donc de symétrie sphérique. Une asymétrie peut avoir deux raisons différentes : soit on s'intéresse à des phénomènes de courte durée (haute fréquence par rapport aux fréquences de collision) où les collisions n'ont pas le temps de ramener le système vers l'équilibre thermique, soit on étudie un système stationnaire maintenu hors équilibre depuis l'extérieur (flux de chaleur entre deux réservoirs de températures différentes, flux d'impulsion visqueux dans un gaz ou liquide entre un corps en mouvement et les parois au repos). Le deuxième exemple illustre bien l'action d'une composante hors diagonale de $\mathbf{P}_\alpha$: par exemple une force tangentielle à une surface par surface.

Le flux d'énergie

Le seul moment d'ordre supérieur qui nous intéresse est le flux d'énergie dû aux particules de type α ,

$$\mathbf{S}_{p\alpha} = \bar{n}_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \int v^2 \mathbf{v} f_\alpha d^3v, \quad (1.36)$$

qui comprend de nouveau des parties macroscopiques et microscopiques.

1.6 Fluctuations, corrélations et collisions

L'introduction de la fonction de distribution a nécessité l'hypothèse d'avoir un grand nombre de particules dans le système macroscopique. Il n'est pas inutile de rappeler la loi des grands nombres. Elle s'applique parfaitement au gaz idéal :

Soit un gaz constitué de N molécules qui se meuvent indépendamment les unes des autres dans un volume V .

Soit $V_s \ll V$ un sous-volume de V . On aimerait connaître le nombre N_s de molécules contenu dans V_s .

Tout le monde connaît le résultat : le nombre moyen de particules, $\langle N_s \rangle$, est

$$\langle N_s \rangle = \frac{V_s}{V} N.$$

La valeur effective N_s fluctue autour de $\langle N_s \rangle$ avec une amplitude moyenne de $\sqrt{\langle N_s \rangle}$. La fluctuation relative moyenne diminue donc comme $1/\sqrt{\langle N_s \rangle}$. Ce résultat est établi en partant de considérations élémentaires dans le très bon livre de Richard Becker [†].

[†] Richard Becker : *Theorie der Wärme*, Heidelberger Taschenbücher, Band 10, Springer, Berlin 1966

Comme ces fluctuations sont dues à la nature atomique de la matière on parle des "effets de particules discrètes". Le ciel bleu, la diffusion de la lumière laser par un plasma (mesure de température) et la résistivité d'un plasma font partie des phénomènes dépendants de la nature atomique de la matière et disparaissent dans un "monde continu" où il n'y a pas de fluctuations. En effet, si

$$k, m, e \rightarrow 0 \quad \text{tq.} \quad Nm = M, \quad Ne = Q, \quad \frac{3}{2}NkT = U$$

avec M, Q et U constants et finis, macroscopiquement rien ne change mais comme $N, < N_s > \rightarrow \infty$ les fluctuations relatives, $1/\sqrt{< N_s >}$, disparaissent. Cette limite s'appelle "la limite hydrodynamique". On vérifie facilement que le paramètre de plasma, eq.(1.6), s'annule dans cette limite. On prend alors ce paramètre comme mesure pour l'importance des phénomènes liés à la nature atomique des particules (*discrete particle effects* en anglais).

Si on voulait traiter les effets des particules discrètes d'une façon consistante on devrait non seulement étudier l'évolution de la distribution à une particule, mais tenir compte aussi de celle à deux particules, c'est-à-dire d'une quantité qui définit la probabilité de trouver une particule particulière No. 1 à l'endroit $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_1]$, $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_1]$ et une deuxième à l'endroit $[\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}_2]$, $[\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + d\mathbf{v}_2]$. En d'autres termes, cela revient à chercher des **corrélations** entre deux particules. Un exemple est donné par la théorie du gaz de Van der Waals : à l'endroit où se trouve une particule, il n'y a plus de place pour une autre.

La théorie des fluctuations et corrélations est compliquée. Le seul phénomène qui en est issu et que nous ne pouvons pas ignorer complètement dans le cadre de ce cours est la relaxation de la distribution à une particule due aux "collisions" c'est-à-dire due à l'interaction interparticulaire proche (à l'intérieur d'une sphère de Debye).

Voilà un point délicat de la théorie cinétique des plasmas ! Nous avons vu que dans un plasma idéal, il y a beaucoup de particules à l'intérieur d'une sphère de Debye. Donc beaucoup de particules s'influencent en même temps. Comme le nombre de particules à l'intérieur d'une sphère de Debye est autant plus grand que l'énergie potentielle moyenne est petite, eq.(1.8), l'interaction entre deux particules individuelles doit être très, très faible.

Dans un plasma complètement ionisé, il n'existe pas de "collision binaire" à proprement parler comme dans un gaz de molécules neutres, mais on peut calculer le temps τ_s (slowing-down time) qu'il faut pour qu'une particule test soit déviée de 90° . A l'aide de considérations élémentaires (voir Appendice 3, eq.(A3.24)) on trouve pour les électrons

$$\tau_s \omega_p \approx \frac{12\pi\sqrt{3}}{g_p L_{ei}} \quad (1.37)$$

où le logarithme de Coulomb est défini par

$$L_{ei} = \ln \frac{12\pi}{g_p}. \quad (1.38)$$

D'habitude la fréquence de collision ν est définie comme l'inverse d'un autre temps de relaxation, à savoir du temps $\tau_e = \tau_s/2$ nécessaire pour qu'une distribution électronique quelconque soit ramenée à sa forme maxwellienne de l'équilibre. Tenant compte d'un facteur $\sqrt{3/2\pi}$ provenant d'une théorie complète des collisions on trouve

$$\frac{\nu}{\omega_p} = \frac{L_{ei}}{6\pi\sqrt{2\pi}} g_p, \quad (1.39)$$

De l'équation (1.39) on conclut que les "collisions" sont peu importantes si le paramètre de plasma est petit (haute température, basse densité).

L'équation d'évolution de $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ va être basée sur l'idée suivante : les particules engendrent des champs électriques et magnétiques qui fluctuent très peu autour des valeurs moyennes dues aux effets de taille finie des particules (discrete particles). On ne va donc suivre que le champ moyen quitte à ajouter un terme de collision *ad-hoc* le cas échéant.

Notez qu'on ne peut évidemment pas négliger les collisions si l'on s'intéresse à l'évolution du plasma sur des échelles de temps longues, $t > \nu^{-1}$. Ainsi, la tension spire dans un tokamak est déterminée par la fréquence de collision.

1.7 Le théorème de Liouville

Faisons pour un moment l'hypothèse que les particules s'ignorent complètement. Dans ce cas il est possible de dire comment $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ évolue avec le temps.

Soit $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ un champ de force externe qui agit sur les particules de masse m . Dans ce cas une particule ayant les coordonnées $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ au temps t aura les coordonnées

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}\Delta t, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} + (\mathbf{F}/m)\Delta t$$

au temps $t + \Delta t$. Toutes les particules qui au temps t étaient dans l'élément $d^3r d^3v$ à $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ seront au temps $t + \Delta t$ dans l'élément $d^3r' d^3v'$ à $(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$, c'est-à-dire

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v = f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t + \Delta t) d^3r' d^3v' \quad (1.40)$$

Mais

$$d^3r' d^3v' = \mathcal{J} d^3r d^3v, \quad (1.41)$$

où $\mathcal{J}$ est le déterminant de Jacobi défini par

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \partial x'/\partial x & \partial x'/\partial y & \partial x'/\partial z & \partial x'/\partial v_x & \partial x'/\partial v_y & \partial x'/\partial v_z \\ \partial y'/\partial x & \partial y'/\partial y & \partial y'/\partial z & \partial y'/\partial v_x & \partial y'/\partial v_y & \partial y'/\partial v_z \\ \partial z'/\partial x & \partial z'/\partial y & \partial z'/\partial z & \partial z'/\partial v_x & \partial z'/\partial v_y & \partial z'/\partial v_z \\ \partial v'_x/\partial x & \partial v'_x/\partial y & \partial v'_x/\partial z & \partial v'_x/\partial v_x & \partial v'_x/\partial v_y & \partial v'_x/\partial v_z \\ \partial v'_y/\partial x & \partial v'_y/\partial y & \partial v'_y/\partial z & \partial v'_y/\partial v_x & \partial v'_y/\partial v_y & \partial v'_y/\partial v_z \\ \partial v'_z/\partial x & \partial v'_z/\partial y & \partial v'_z/\partial z & \partial v'_z/\partial v_x & \partial v'_z/\partial v_y & \partial v'_z/\partial v_z \end{vmatrix}.$$

Si la force $\mathbf{F}$ dépend de $\mathbf{r}$ et non pas de $\mathbf{v}$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} &= \delta_{ij}, & \frac{\partial x'_i}{\partial v_j} &= \delta_{ij} \Delta t, \\ \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} &= \frac{\Delta t}{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}, & \frac{\partial v'_i}{\partial v_j} &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Ainsi notre déterminant prend la forme :

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ \frac{\Delta t}{m} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\Delta t}{m} \frac{\partial F_x}{\partial y} & \frac{\Delta t}{m} \frac{\partial F_x}{\partial z} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t}{m} \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\Delta t}{m} \frac{\partial F_y}{\partial y} & \frac{\Delta t}{m} \frac{\partial F_y}{\partial z} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\Delta t}{m} \frac{\partial F_z}{\partial x} & \frac{\Delta t}{m} \frac{\partial F_z}{\partial y} & \frac{\Delta t}{m} \frac{\partial F_z}{\partial z} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + O[(\Delta t)^2]. \quad (1.42)$$

On montrera aux exercices que

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \sim & \epsilon \\ & & 1 & & \\ \sim & \epsilon & & 1 & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1 + O(\epsilon^2).$$

Pour la force de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.43)$$

on montrera que $\mathcal{J} = 1 + O[(\Delta t)^2]$ à l'instar de (1.42). En développant $f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t + \Delta t)$ pour des petits Δt on obtient

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t + \Delta t) &= f\left(\mathbf{r} + \mathbf{v}\Delta t, \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}}{m}\Delta t, t + \Delta t\right) \\
&= f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right] \Delta t + O[(\Delta t)^2].
\end{aligned}$$

Dans la limite où $\Delta t \rightarrow 0$ le théorème de Liouville pour une fonction de distribution à une particule s'obtient en insérant ceci dans (1.40) à (1.42) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.44)$$

La fonction de distribution ou la densité de probabilité correspondante (1.17) se comporte comme un liquide incompressible dans l'espace de phase.

Voyons :

- coordonnée dans l'espace de phase $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$
- Vitesse dans l'espace de phase $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}}$
- Equation de continuité

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_x \cdot (f\mathbf{u}) = 0.$$

- Condition d'incompressibilité :

$$\nabla_x \cdot \mathbf{u} = 0.$$

- suit le théorème de Liouville :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_x f = \frac{df}{dt} = 0.$$

Mais oui ! C'est exactement ce que nous avons déjà trouvé, c'est-à-dire que $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t + \Delta t) = \text{const}$ le long des orbites des particules.

Si les particules subissent des collisions f change sous leur influence. L'équation (1.44) est alors remplacée par une équation du type

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}}, \quad (1.45)$$

où l'opération de collision à droite est d'habitude un opérateur intégral-différentiel non-linéaire. Cet opérateur et l'équation (1.45) ont le nom de Boltzmann dans le

cas de particules neutres. Dans le cas des particules chargées l'opérateur a la forme d'un opérateur Fokker-Planck et s'appelle opérateur de Landau.

1.8 L'équation de Vlasov

Dans les paragraphes précédents, nous avons mis en place tout ce qu'il nous faut pour écrire l'équation cinétique qui régit un plasma chaud : l'équation de **Vlasov**. Il nous reste encore à remplacer le champ externe $\mathbf{F}$ dans (1.44) par la force de Lorentz (1.43) évaluée avec les champs électriques et magnétiques **moyens** comme convenu à la fin du paragraphe 1.6. Ce remplacement est permis parce le champ moyen est créé par l'entité des particules lointaines (plus loin que Debye) et n'est pas influencé par le mouvement infinitésimal considéré dans l'eq. (1.40).

Voilà donc notre modèle d'un plasma chaud

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1.46)$$

où les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont déterminés par les équations de Maxwell (1.1) à (1.4). Les densités de courant $\mathbf{j}$ et de charge ρ sont à leur tour données par

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \int f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v, \quad (1.47)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v. \quad (1.48)$$

L'indice α désigne le type de particules, électrons et différentes espèces d'ions. La quantité $\bar{n}_{\alpha}$ est la densité volumique moyenne de l'espèce α , voir aussi paragraphe 1.5.

Comme on s'y attendait l'équation de Vlasov est non-linéaire : Le dernier terme est quadratique dans les inconnues $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ et f_{α} . C'est ce terme qu'on va devoir linéariser pour faire les premiers pas. Notez que même dans sa version linéaire le système Vlasov-Maxwell est déjà très riche en physique.

Il est important de rappeler encore une fois que l'équation de Vlasov est valable tant que les collisions sont négligeables. On étudiera des phénomènes ayant des temps caractéristiques inférieurs à l'inverse de la fréquence de collision. Comme temps caractéristiques peuvent figurer : l'inverse d'une fréquence, d'un taux d'amortissement ou d'instabilité d'une onde, le temps de présence d'une particule dans une machine ou dans une période d'une onde, le temps de transit d'une onde dans une machine ou encore d'autres temps physiquement importants.

1.9 Les équations fluides

En prenant les moments de l'équation de Vlasov ou mieux encore de l'équation de Landau

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}}, \quad (1.49)$$

on peut dériver les équations fluides. La démarche est la suivante : on multiplie l'équation (1.49) avec une quantité $a(\mathbf{v})$ et on intègre sur d^3v . Le premier terme de l'éq. (1.49) produit ainsi la dérivée temporelle de $\langle a(\mathbf{v}) \rangle$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle a(\mathbf{v}) \rangle \quad (1.50)$$

et le deuxième la lie à la divergence d'un flux

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \langle \mathbf{v} a(\mathbf{v}) \rangle. \quad (1.51)$$

Le deuxième terme fait intervenir un moment d'ordre supérieur ; c'est ainsi que l'équation de Landau (ou Vlasov) (1.49) produit un nombre infini d'équations fluides. Cette chaîne ne peut être interrompue qu'à l'aide de certaines approximations. Souvent on l'interrompt après la deuxième équation moyennant l'approximation (1.33) et en supposant une équation d'état,

$$p_\alpha(\mathbf{r}, t) = n_\alpha(\mathbf{r}, t) \times \text{const} \quad (\text{isotherme}) \quad (1.52)$$

ou

$$\frac{p_\alpha(\mathbf{r}, t)}{n_\alpha(\mathbf{r}, t)^{5/3}} = \text{const} \quad (\text{adiabatique}) \quad (1.53)$$

ou même

$$p_\alpha = 0. \quad (1.54)$$

Les équations fluides ont la forme générale d'une loi de conservation locale,

$$\frac{\partial (\text{densité})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mathbf{flux}) = \text{sources}, \quad (1.55)$$

où "densité" et "flux" sont des densités et des flux de particules, d'impulsions, d'énergie, etc. On dérive les deux premières équations dans la série 3 des exercices. En intégrant sur le volume les lois de conservation locales on les obtient en version globale. Pour ces dernières, il n'est pas nécessaire de définir tous les flux qui n'ont d'ailleurs pas toujours une définition univoque.

1.10 Les lois de conservation globales en théorie Vlasov

Conservation des particules

Le nombre de particules total ne change pas,

$$\dot{N}_\alpha = \frac{d}{dt} \int \bar{n}_\alpha f_\alpha d^3r d^3v, \quad (1.56)$$

comme on montre en utilisant l'équation (1.46) :

$$\begin{aligned} \dot{N}_\alpha &= \int \bar{n}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3r d^3v \\ &= - \int \left[\bar{n}_\alpha \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\bar{n}_\alpha q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \right] d^3r d^3v \\ &= - \int \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\bar{n}_\alpha \mathbf{v} f_\alpha) + \frac{\bar{n}_\alpha q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f_\alpha \right] d^3r d^3v. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Les divergences $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot$ et $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot$ peuvent être intégrées avec le théorème de Gauss. Comme le flux de particules,

$$\int \bar{n}_\alpha \mathbf{v} f_\alpha d^3v,$$

est nul au bord du domaine (aux parois!) le premier terme est nul. Quant au deuxième, il s'annule parce que $f_\alpha = 0$ pour $v \rightarrow \pm\infty$.

Notez que l'on a eu besoin des relations

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}\varphi) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \varphi, \quad (1.58)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (1.59)$$

et en particulier

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v} \right) - \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{B} \right) = 0, \quad (1.60)$$

pour arriver de la deuxième à la troisième ligne dans (1.57).

Conservation de l'énergie

L'énergie totale est définie par

$$U = U_p + U_{ch}, \quad (1.61)$$

où l'énergie des particules U_p et celle des champs U_{ch} sont

$$U_p = \sum_{\alpha} \int \int \frac{1}{2} m_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} v^2 f_{\alpha} d^3 r d^3 v, \quad (1.62)$$

$$U_{ch} = \int \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H}^2 \right) d^3 r. \quad (1.63)$$

Pour calculer $\dot{U}_p$ on procède comme tout à l'heure :

$$\begin{aligned} \dot{U}_p &= - \sum_{\alpha} \int \frac{1}{2} m_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} v^2 \left[\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right] d^3 r d^3 v \\ &= - \sum_{\alpha} \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[\frac{1}{2} m_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} v^2 \mathbf{v} f_{\alpha} \right] d^3 r d^3 v \\ &\quad - \sum_{\alpha} \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[\frac{1}{2} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} v^2 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f_{\alpha} \right] d^3 r d^3 v \\ &\quad + \sum_{\alpha} \int f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[\frac{1}{2} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} v^2 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] d^3 r d^3 v. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Pour arriver aux deux dernières lignes de (1.64) on a utilisé la relation (1.58). Le premier terme à droite de (1.64) est la divergence d'un flux d'énergie que l'on pourrait appeler $\mathbf{S}_p$ par analogie avec le vecteur Poynting, le flux d'énergie du champ électromagnétique,

$$\mathbf{S}_{ch} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (1.65)$$

On évalue le dernier terme de (1.64) à l'aide de (1.58) et de (1.60) et on trouve

$$\dot{U}_p = \sum_{\alpha} \int f_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{E} + \underbrace{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}_{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0}) d^3 r d^3 v, \quad (1.66)$$

ce qui signifie que les particules échangent l'énergie avec le champ : l'expression à droite de (1.66) n'est rien d'autre que la puissance "ohmique"

$$\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3 r.$$

A l'aide de (1.1) et (1.2) on trouve pour la variation d'énergie du champ

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ch} &= \int [\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{j}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})] d^3 r \\ &= \int [-\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})] d^3 r. \end{aligned}$$

Comme le flux d'énergie est supposé nul au bord, on trouve

$$\dot{U} = \dot{U}_p + \dot{U}_{ch} = 0 \quad (1.67)$$

Conservation de la quantité de mouvement

L'impulsion totale est donnée par

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_p + \mathbf{P}_{ch}, \quad (1.68)$$

où

$$\mathbf{P}_p = \sum_{\alpha} \int m_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \mathbf{v} f_{\alpha} d^3 r d^3 v \quad (1.69)$$

et

$$\mathbf{P}_{ch} = \int \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H} d^3 r \quad (1.70)$$

Comme pour l'énergie on montre que

$$\dot{\mathbf{P}}_p = \int (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) d^3 r. \quad (1.71)$$

Le gain d'impulsion est bien sur donné par la force de Lorentz. On trouvera

$$\dot{\mathbf{P}}_p + \dot{\mathbf{P}}_{ch} = 0,$$

si on suppose le flux d'impulsion (Maxwell stress tensor) nul au bord.

Conservation de la positivité

Reste à discuter une quasi-trivialité. De la manière dont nous avons dérivé l'équation de Vlasov, il est implicitement clair que $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ doit être positive partout et le rester pour tout temps si elle l'était au temps initial. C'est un point important comme f doit pouvoir être interprétée comme une densité de probabilité.

Il est facile de démontrer cette propriété pour toutes les équations de continuité :

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)g] = 0 \quad (1.72)$$

On se propose de montrer que $g(\mathbf{x}, t) > 0$, $\forall x$ et t , si g avait cette propriété pour $t = 0$. Si ceci n'était pas vrai, il existerait un temps t_0 où g serait nul juste en $\mathbf{x}_0$, Fig. 1.4.

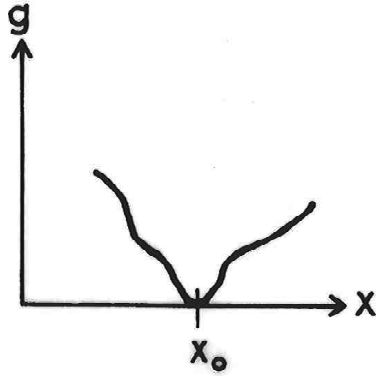


Figure 1.4 La densité g au moment où elle essaye de passer à des valeurs négatives

En ce point on a évidemment aussi $\partial g / \partial x = 0$ et on trouve de (1.72) que $\partial g / \partial t = 0$ ce qui est en contradiction avec la supposition que g passait à cet instant et en ce point à une valeur négative.

1.11 Les états stationnaires de l'équation de Vlasov

L'équation de Boltzmann (où l'équation de Landau = Vlasov + terme de collision de Landau) possède une solution d'équilibre unique : la distribution de Maxwell-Boltzmann. N'importe quelle condition initiale pour $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ est oubliée au bout de quelques temps de collision et la distribution tend vers celle de Maxwell-Boltzmann. L'équation de Boltzmann est irréversible.

Rien de cela n'est vrai pour l'équation de Vlasov qui est réversible et possède une infinités de solutions stationnaires. Ceci est acceptable parce que nous savons que Vlasov n'est de toute manière valable que pour des temps inférieurs aux temps de collision caractéristiques.

Une procédure qui permet de construire une solution générale de l'équation de Vlasov est celle des constantes du mouvement. Une telle constante, $R(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$ est une quantité relative à une particule qui se meut le long d'une orbite $(\mathbf{r}'(t'), \mathbf{v}'(t'))$ définie par les conditions initiales $\mathbf{r}'(t' = t) = \mathbf{r}$ et $\mathbf{v}'(t' = t) = \mathbf{v}$, Fig. 1.5.

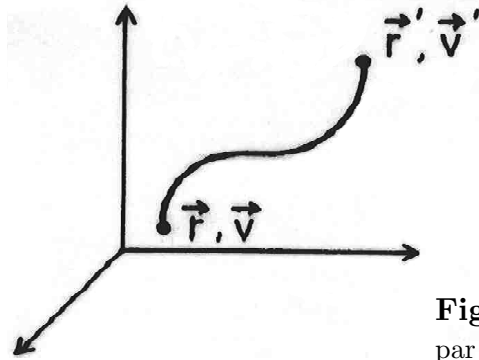


Figure 1.5 L'orbite d'une particule définie par le point $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$ au temps t

La constante du mouvement $R(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$ ne varie pas avec t' et on a donc

$$\frac{dR}{dt'} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \cdot \frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}'} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} \cdot \frac{\partial R}{\partial \mathbf{v}'} = 0. \quad (1.73)$$

Si R , S et T sont des constantes du mouvement, la fonction

$$f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0} [R(\mathbf{r}', \mathbf{v}'), S(\mathbf{r}', \mathbf{v}'), \dots, T(\mathbf{r}', \mathbf{v}')]]$$

est une solution stationnaire de l'éq. (1.46) comme on montre facilement

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t'} &= -\mathbf{v}' \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{r}'} - \mathbf{a}' \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}'} \\ &= -\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial R} \left(\mathbf{v}' \cdot \frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}'} + \mathbf{a}' \cdot \frac{\partial R}{\partial \mathbf{v}'} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial S} \left(\mathbf{v}' \cdot \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}'} + \mathbf{a}' \cdot \frac{\partial S}{\partial \mathbf{v}'} \right) \\
& \dots \\
& -\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial T} \left(\mathbf{v}' \cdot \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}'} + \mathbf{a}' \cdot \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}'} \right) \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{1.74}$$

Ici, on a utilisé l'abréviation $\mathbf{a}'$ pour l'accélération due à la force de Lorentz :

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} [\mathbf{E}(\mathbf{r}', t') + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}(\mathbf{r}', t')].$$

Les parenthèses dans (1.74) sont nulles suite à la propriété des constantes du mouvement (1.73).

Dans beaucoup de cas utiles, les distributions sont contrôlées par des champs externes, par exemple si

$$\sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha} d^3v = 0, \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha} \mathbf{v} d^3v = 0,$$

on n'a ni charge ni courant créés par le plasma. On peut donc avoir les champs nuls (premier cas à discuter) ou bien un champ magnétique imposé de l'extérieur (deuxième cas).

Plasma sans champ

L'énergie $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ et l'impulsion $m\mathbf{v}$ sont des constantes du mouvement. Toute fonction de distribution

$$f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(v_x, v_y, v_z)$$

est donc une solution dans le cas sans champ électromagnétique et en particulier la distribution de Maxwell-Boltzmann

$$f_{\alpha 0} = \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi T_{\alpha}} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_{\alpha}}{2T_{\alpha}} \mathbf{v}^2 \right). \tag{1.75}$$

D'habitude, on prend la distribution de Maxwell-Boltzmann comme distribution non-perturbée, bien qu'on ait pas toujours une bonne raison.

Plasma dans champ magnétique constant

Comme l'énergie et l'impulsion parallèle au champ $\mathbf{B}$ sont des constantes on parle souvent des composantes de vitesse parallèles $v_{\parallel}$ et perpendiculaires $\mathbf{v}_{\perp}$ au champ :

$$\begin{aligned} v_{\parallel} &= \text{const}, \\ v_{\perp} &= \sqrt{\mathbf{v}_{\perp}^2} = \text{const}. \end{aligned}$$

Comme les collisions sont peu efficaces dans les plasmas, il arrive souvent que les températures parallèles et perpendiculaires n'aient pas la même valeur et que l'on ait à traiter des distributions de la forme.

$$f_{\alpha 0} = \frac{m_{\alpha}^{3/2}}{(2\pi)^{3/2} T_{\alpha\perp} T_{\alpha\parallel}^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} m_{\alpha} \left(\frac{\mathbf{v}_{\perp}^2}{T_{\alpha\perp}} + \frac{v_{\parallel}^2}{T_{\alpha\parallel}} \right) \right]. \quad (1.76)$$

Une particularité des champs magnétiques est de confiner les particules chargées. Dans un champ constant, les coordonnées perpendiculaires des centres de guidage sont des constantes du mouvement. Comme une de ces quantités reste constante même dans un champ magnétique inhomogène, nous traitons d'abord ce cas pour revenir ensuite au champ constant (voir éq. (1.61)).

Plasma dans champ magnétique inhomogène

Prenons un champ magnétique de la forme

$$\mathbf{B} = B(x)\mathbf{e}_z. \quad (1.77)$$

On se souvient qu'un champ magnétique inhomogène crée une dérive des particules selon la Fig. 1.6. Dans cet exemple, la coordonnée X_{cg} du centre de guidage est constante.

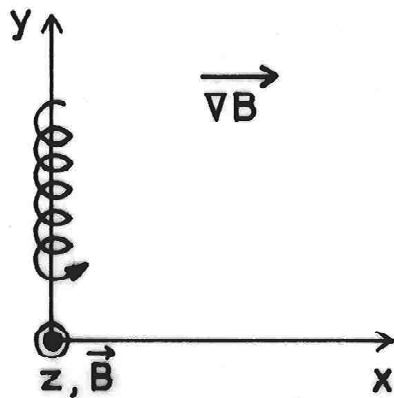


Figure 1.6 L'orbite d'une particule chargée dans un champ magnétisé faiblement inhomogène

Dans le cas où l'inhomogénéité est absente, cette coordonnée est donnée (Fig. 1.7) par

$$x - x_{cg} = \rho \cos \alpha = \frac{v_{\perp} \cos \alpha}{\omega_c} = -\frac{v_y}{\omega_c}, \quad (1.78)$$

où ρ est le rayon de Larmor et ω_c la fréquence cyclotronique :

$$\omega_c = \frac{qB}{m}. \quad (1.79)$$

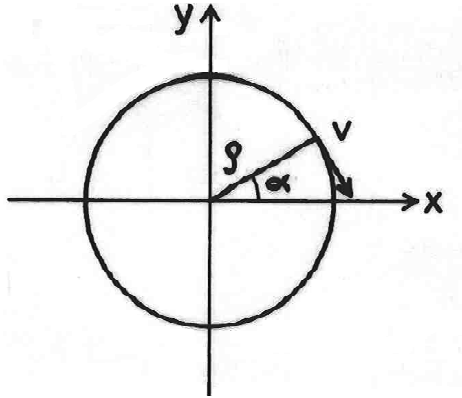


Figure 1.7 Géométrie d'une orbite de Larmor

On conclut que la quantité $x\omega_c + v_y$ est une constante du mouvement au moins approximative. L'expression exacte se dérive facilement en partant des équations de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= +v_y \omega_c(x), \\ \frac{dv_y}{dt} &= -v_x \omega_c(x), \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (1.80)$$

On vérifie rapidement que v_z et $v_{\perp}^2 = v_x^2 + v_y^2$ sont des constantes du mouvement, mais aussi

$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega_c(x) \frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dt} \int^x \omega_c(x') dx', \quad (1.81)$$

d'où l'on tire

$$v_y + \int^x \omega_c(x') dx' = \text{const.} \quad (1.82)$$

Ceci est l'analogie exact de l'équation (1.78). Notez que la dérivée d/dt dans (1.80) et (1.81) est à prendre le long de l'orbite de la particule tout comme l'intégrale sur x' dans (1.82).

Le cas spécial du champ constant s'obtient trivialement de (1.80) moyennant une intégration :

$$\begin{aligned} v_x &= +y\omega_c + \text{const}, \\ v_y &= -x\omega_c + \text{const}. \end{aligned} \quad (1.83)$$

2.

Les ondes dans un plasma non-magnétisé

Le titre complet de ce chapitre devrait être "*Les ondes de petite amplitude dans un plasma homogène non-magnétisé en théorie Vlasov*". Les effets d'amplitude finie et certains aspects de la propagation en milieu inhomogène seront abordés dans les chapitres 4 et 5.

2.1 L'équation de Vlasov linéarisée

Les ondes "de petite amplitude" peuvent être obtenues de l'éq. de Vlasov linéarisée autour d'un état homogène et stationnaire $f_{\alpha 0}(\mathbf{v})$, $\mathbf{E}_0 = 0$, $\mathbf{B}_0 = 0$.

Notons les quantités du premier ordre $f_{\alpha 1}$, $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{B}_1$. La fonction de distribution correcte au premier ordre est donc $f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) + f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. L'équation de Vlasov linéarisé s'écrit

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1) \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.1)$$

et doit être couplée aux eqs (1.1) à (1.4) et (1.47) et (1.48).

2.2 L'amortissement de Landau

La théorie cinétique générale des ondes est peu transparente pour les novices à cause de son aspect formel. Il est dès lors indiqué de produire le résultat à la fois le plus important et le plus intrigant, l'amortissement de Landau, dans le cadre le plus simple imaginable et d'essayer d'en comprendre la physique (paragraphe 2.2 - 2.4) avant de présenter la théorie formelle générale (paragraphe 2.5 - 2.8).

Le problème d'onde le plus simple imaginable est celui de l'excitation d'une onde de plasma (onde de Langmuir) en une dimension. On cherche donc des ondes électrostatiques de haute fréquence dans un plasma consistant d'électrons et d'un fond ionique neutralisant (ions infiniment lourds). Dans ce cas, les ions ne se manifestent qu'à travers leur densité moyenne $\bar{n}_i$, identique à celle des électrons $\bar{n}_e = \bar{n}_i$ (si on suppose les ions simplement ionisés), et toute la dynamique est déterminée par les seuls électrons.

En vue de la linéarisation, on écrit la fonction de distribution des électrons comme

$$f_e(x, v, t) = f_{e0}(v) + f_{e1}(x, v, t). \quad (2.2)$$

Pour être consistant avec le paragraphe 1.4, ces fonctions doivent satisfaire les relations de normalisation

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{e0}(v) dv = 1 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{e1}(x, v, t) dx = 0. \quad (2.3)$$

De ceci suit alors

$$n_{e0} = \bar{n}_e \int_{-\infty}^{\infty} f_{e0}(v) dv = \bar{n}_e$$

et

$$n_{e1}(x, t) = \bar{n}_e \int_{-\infty}^{\infty} f_{e1}(x, v, t) dv,$$

la densité électronique totale étant $n_e(x, t) = n_{e0} + n_{e1}(x, t)$. L'évolution de $f_{e1}(x, v, t)$ est déterminée par l'équation de Vlasov, éq.(2.1), simplifiée pour le cas unidimensionnel électrostatique, c'est-à-dire pour le cas où $E_1(x, t) = -\partial\phi_1/\partial x$ et $B_1(x, t) \equiv 0$:

$$\frac{\partial f_{e1}}{\partial t} + v \frac{\partial f_{e1}}{\partial x} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{df_{e0}}{dv} = 0. \quad (2.4)$$

Ici, ϕ_1 est le potentiel électrostatique perturbé (NB $\phi_0 = 0$ parce que $E_0 = 0$, consistant avec $\bar{n}_e = \bar{n}_i$). On l'obtient de l'équation de Poisson, (1.3),

$$-\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = \frac{\partial E_1}{\partial x} = \rho_1(x, t)/\epsilon_0 + \rho_{\text{ext}}(x, t)/\epsilon_0, \quad (2.5)$$

écrite ici avec un terme d'excitation explicite, $\rho_{\text{ext}}(x, t)$, représentant l'action d'une antenne perturbant le plasma. Le but du calcul est de déterminer la réponse du plasma à la perturbation "externe"[†]. La densité de charge $\rho_{\text{ext}}(x, t)$ et la perturbation qui s'en suit seront aussi petites que nécessaires pour que la linéarisation de l'équation de Vlasov soit justifiée.

Passage à Fourier-Laplace

On s'imagine que le système n'est pas perturbé avant le temps, $t = 0$, ou exprimé différemment, que $\rho_{\text{ext}}(x, t \leq 0) \equiv 0$ ainsi que toutes les autres quantités du premier ordre. Sous ces conditions, la transformée de Laplace ne produit pas de termes initiaux et les équations différentielles (2.4) et (2.5) se transforment simplement par

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow ik; \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega \quad \text{et} \quad f_{e1}(x, v, t) \rightarrow \hat{f}_{e1}(k, v, \omega)$$

avec le résultat :

$$-i\omega \hat{f}_{e1}(k, v, \omega) + ikv \hat{f}_{e1}(k, v, \omega) + \frac{e}{m_e} ik \frac{df_{e0}}{dv} \hat{\phi}_1(k, \omega) = 0, \quad (2.6)$$

$$k^2 \hat{\phi}_1(k, \omega) = -\frac{e\bar{n}_e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_{e1}(k, v, \omega) dv + \hat{\rho}_{\text{ext}}(k, \omega)/\epsilon_0. \quad (2.7)$$

Ici, le terme contenant l'intégrale est issu de $\rho_1/\epsilon_0 = -en_{e1}/\epsilon_0$. L'éq. (2.6) nous sert à exprimer $\hat{f}_{e1}(k, v, \omega)$ en terme de $\hat{\phi}_1(k, \omega)$,

$$\hat{f}_{e1}(k, v, \omega) = \frac{e}{m_e} \frac{k df_{e0}/dv}{\omega - kv} \hat{\phi}_1(k, \omega) \quad (2.8)$$

ce qui peut être inséré dans l'éq.(2.7),

$$k^2 \hat{\phi}_1(k, \omega) = -\underbrace{\frac{e\bar{n}_e}{\epsilon_0} \frac{e}{m_e}}_{\omega_{pe}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k df_{e0}/dv}{\omega - kv} dv \hat{\phi}_1(k, \omega) + \hat{\rho}_{\text{ext}}(k, \omega)/\epsilon_0. \quad (2.9)$$

pour aboutir au résultat final dans l'espace Fourier-Laplace :

$$\underbrace{\left[1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k df_{e0}/dv}{\omega - kv} dv \right]}_{\equiv \Delta(k, \omega)} \hat{\phi}_1(k, \omega) = \frac{\hat{\rho}_{\text{ext}}(k, \omega)}{\epsilon_0 k^2}. \quad (2.10)$$

[†] En calculant l'écrantage de Debye dans l'appendice 2, on cherche la réponse du plasma à une perturbation externe **stationnaire**. La démarche est analogue à ce qui se fait ici pour une perturbation dépendant du temps et de l'espace.

Notez d'abord que tout dans l'expression $\Delta(k, \omega)$ est en principe connu ; en particulier, $f_{e0}(v)$ est la fonction de distribution de l'état stationnaire, souvent une maxwellienne. L'éq.(2.10) nous permet donc d'obtenir $\hat{\phi}_1(k, \omega)$ en fonction de la densité de charge imposée par "l'antenne" $\hat{\rho}_{\text{ext}}(k, \omega)$:

$$\hat{\phi}_1(k, \omega) = \frac{\hat{\rho}_{\text{ext}}(k, \omega)}{\epsilon_0 k^2 \Delta(k, \omega)}. \quad (2.11)$$

En inversant les transformées, il sera possible d'obtenir, au moins en principe, les fonctions inconnues $\phi_1(x, t)$ et, à travers l'éq.(2.8), $f_{e1}(x, v, t)$. En analogie avec le circuit LC excité (voir série 1, exercice 4 et appendices A6 et A7), on s'attend à ce que les zéros de $\Delta(k, \omega)$ décrivent les modes propres du système, c'est-à-dire que

$$\Delta(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_{e0}/dv}{v - \omega/k} dv = 0 \quad (2.12)$$

soit la relation de dispersion cinétique des ondes de Langmuir. C'est effectivement le cas : une solution de l'éq.(2.10) $\hat{\phi}_1 \neq 0$ est possible même sans excitation si $\Delta(k, \omega) = 0$. Le seul problème que cette relation de dispersion présente est l'évaluation de l'intégrale contenant le pôle $1/(v - \omega/k)$.

C'est ici qu'il est important de se rappeler que la transformée de Laplace n'existe que si $\Im(\omega)$ est suffisamment grand, (A1.7). L'intégrale le long de l'axe réel des vitesses est une fonction analytique de ω univoque si $\Im(\omega) > 0$ et f_{e0} est analytique en v . La fonction en ω peut être analytiquement prolongée dans le plan inférieur des fréquences en déformant le parcours d'intégration dans le plan des vitesses "complexes". Les détails de l'évaluation de cette intégrale se trouve dans le paragraphe 2.8. Ici, on se restreint à une discussion sommaire et quelque peu imprécise.

La partie principale et le résidu du pôle

Prenons, pour fixer les idées, $k > 0$. L'intégrale le long de l'axe réel des vitesses dans l'éq.(2.12) peut alors être évaluée sans problème si l'on impose $\Im(\omega) > 0$ ce qui évite d'avoir un pôle sur le parcours d'intégration. Comme $\lim_{v \rightarrow \pm\infty} v^2 f_{e0}(v) = 0$ (énergie!), les bouts de l'intégrale ne contribuent pas à sa valeur, ce qui permet, en invokant le théorème de Cauchy, des chemins différents pour arriver au même résultat : rien ne nous empêche, par exemple, de faire glisser le chemin d'intégration dans le plan inférieur des vitesses, donc d'utiliser des vitesses complexes. Notez qu'il n'y a pas de problème "physique" d'utiliser des telles vitesses pourvu que la valeur de l'intégrale ne change pas. Si on le désire, on peut même évaluer les intégrales le long des deux chemins proposés à l'aide d'un ordinateur et d'une formule d'intégration quelconque. D'après le théorème de Cauchy, on va trouver le même résultat.

Si on suppose que le chemin d'intégration se trouve en-dessous de l'axe réel, rien n'empêche l'évaluation de l'intégrale pour une valeur réelle de ω . Remarquez qu'il est toujours question de la **même** fonction analytique : nous avons trouvé une manière triviale de la prolonger analytiquement - une manière tellement triviale qu'elle n'est pas facile à comprendre ! On peut alors ramener le chemin d'intégration sur l'axe réel à l'exception d'un petit demi-cercle autour du pôle, Fig.2.1.

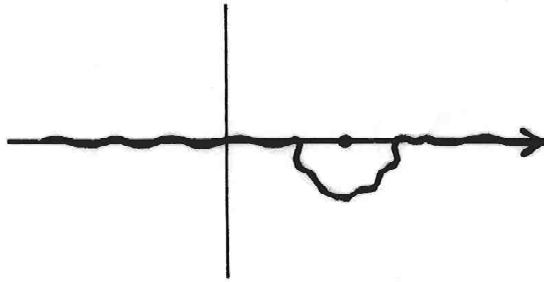


Figure 2.1 Parcours d'intégration quand ω/k est sur l'axe réel et $k > 0$

L'intégrale peut alors être séparée en une valeur principale plus la contribution du demi-cercle,

$$\int dv = \int_{\text{partie principale}} dv + \int_{i\pi \times \text{résidu du pôle } \omega/k} dv ,$$

ce qui s'écrit explicitement comme

$$\Delta(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_{e0}/dv}{v - \omega/k} dv - i\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \text{sign}(k) \left. \frac{df_{e0}}{dv} \right|_{v=\omega/k} . \quad (2.13)$$

A notre grand étonnement, la valeur de l'intégrale est complexe même pour une fréquence réelle. La partie imaginaire est due à la contribution du pôle ω/k . Elle a le signe inverse si $k < 0$, parce que la règle $\Im(\omega) > 0$ de la transformée Laplace placera au départ le pôle ω/k dans le plan inférieur des vitesses complexes. Dès lors, le parcours d'intégration le contournera dans le sens négatif (demi-cercle au-dessus du pôle).

Notez que la partie principale d'une intégrale avec un pôle simple peut être définie formellement comme

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \epsilon} \frac{f(x)}{x - x_0} + \int_{x_0 + \epsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} \right] \quad (2.14)$$

et peut exister ou non. Si $f(v)$ est une fonction raisonnable (en particulier si elle est maxwellienne), la limite existe.

La relation de dispersion cinétique de l'onde de Langmuir, $\Delta(k, \omega) = 0$ où Δ est donné par l'éq.(2.13), s'est donc révélée être bien plus compliquée que la relation fluide. Apparemment, elle n'a pas, en général, de solutions ω réelles si k est réel et il n'est pas clair du tout comment on pourrait trouver ses solutions complexes. Avant d'étudier une méthode qui nous permettra de trouver des solutions complexes approximatives, nous nous assurons que la nouvelle théorie soit au moins capable de reproduire les résultats du plasma froid.

Evaluation pour le plasma froid

Soit f_{e0} une maxwellienne de vitesse thermique, v_{the} . Dans le contexte de l'onde de Langmuir, ce plasma peut être considéré comme froid si la vitesse thermique est suffisamment petite pour rendre négligeable le terme imaginaire dans l'éq.(2.13). Ce terme est en effet proportionnel à df_{e0}/dv évalué à $v = \omega/k$ et donc exponentiellement petit (la maxwellienne est une exponentielle !) si $|\omega/k| \gg v_{the}$. Dans l'évaluation de la partie principale les vitesses étant limitées à des valeurs $v \ll \omega/k$ par la fonction de distribution f_{e0} , cette dernière joue le rôle d'une fonction δ : elle est "étroite" par rapport au reste de l'intégrant et normalisée à 1, éq.(2.3).

Remplaçant dans l'éq.(2.13) $f_{e0}(v)$ par $\delta(v)$, on se retrouve avec la fonction δ sous une dérivée. En règle générale, on se tire d'une telle situation par intégration par partie :

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta(v)/dv}{v - \omega/k} dv = \underbrace{\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dv} \left[\frac{\delta(v)}{v - \omega/k} \right] dv}_{=0 \text{ parce que } \delta(\pm\infty)=0} + \underbrace{\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(v)}{(v - \omega/k)^2} dv}_{k^2/\omega^2}.$$

Notez que le symbole $\mathcal{P}$ de la valeur principale tombe trivialement quand il n'a plus de pôle à évaluer. En insérant la valeur obtenue dans l'éq.(2.13) on trouve

$$\Delta(k, \omega) = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2 \quad (2.15)$$

en accord avec la théorie fluide. Si on avait gardé la maxwellienne dans l'éq.(2.13), on aurait pu développer $1/(v - \omega/k)$ en termes de $|vk/\omega| \ll 1$ pour retrouver les corrections de température à la relation de dispersion (réelle). Ici, on se concentre à exploiter la partie imaginaire de la relation de dispersion. Pour cela, on étudie d'abord la question d'une façon générale.

L'approximation résonnante d'une relation de dispersion

Soit

$$\Delta(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad (2.16)$$

une relation de dispersion de la forme (2.15), (2.82), (2.88) ou (2.89). On cherche une solution $\omega = \omega_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}}$ tel que $|\gamma_{\mathbf{k}}| \ll |\omega_{\mathbf{k}}|$.[†] Un développement de Taylor fournit

$$0 = \Delta(\mathbf{k}, \omega) = \Delta(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) + i\gamma_{\mathbf{k}} \left. \frac{\partial \Delta}{\partial \omega} \right|_{\omega_{\mathbf{k}}} + O(\gamma_{\mathbf{k}}^2).$$

Séparons les parties réelles et imaginaires :

$$0 \approx \Re \Delta(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) + i\Im \Delta(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) + i\gamma_{\mathbf{k}} \Re \left. \frac{\partial \Delta}{\partial \omega} \right|_{\omega_{\mathbf{k}}} - \gamma_{\mathbf{k}} \Im \left. \frac{\partial \Delta}{\partial \omega} \right|_{\omega_{\mathbf{k}}}.$$

De la partie imaginaire, on conclut que $\gamma_{\mathbf{k}} \sim \Im \Delta$ quand $\gamma_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$. Le dernier terme est donc quadratique en $\gamma_{\mathbf{k}}$ et peut être négligé. La partie réelle fournit donc l'équation pour la fréquence réelle

$$\Re \Delta(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) = 0 \quad (2.17)$$

et la partie imaginaire celle pour le taux de changement de l'amplitude

$$\gamma_{\mathbf{k}} = - \left. \frac{\Im \Delta(\mathbf{k}, \omega)}{\Re \frac{\partial \Delta(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega}} \right|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}. \quad (2.18)$$

Les formules (2.17) et (2.18) n'ont un sens que si l'éq.(2.17) possède effectivement une solution $\omega_{\mathbf{k}}$ réelle et

$$\left| \frac{\gamma_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} \right| = \left| \frac{\Im \Delta(\mathbf{k}, \omega)}{\omega \Re \frac{\partial \Delta(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega}} \right|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}} \ll 1, \quad (2.19)$$

assurant la consistance de l'approximation.

[†] La condition $|\gamma_{\mathbf{k}}| \ll |\omega_{\mathbf{k}}|$ est nécessaire si la solution doit représenter une onde de fréquence bien définie.

Calcul de l'amortissement

La partie imaginaire de $\Delta(k, \omega)$ pouvant être exponentiellement petite, l'approximation résonnante peut être utilisée pour exploiter la relation de dispersion découlant de l'éq.(2.13) :

$$\Delta(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_{e0}/dv}{v - \omega/k} dv - i\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \text{sign}(k) \left. \frac{df_{e0}}{dv} \right|_{v=\omega/k} = 0. \quad (2.20)$$

Dans l'approximation la plus basse en température, nous avons déjà trouvé la partie réelle de la relation, éq.(2.15),

$$\Re \Delta(k, \omega) = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2 = 0, \quad (2.21)$$

qui produit $\omega_{\mathbf{k}} = \pm \omega_{pe}$ et

$$\Re \left. \frac{\partial \Delta}{\partial \omega} \right|_{\omega_{\mathbf{k}}} = 2\omega_{pe}^2/\omega_{\mathbf{k}}^3 = 2/\omega_{\mathbf{k}}.$$

Dans cette formule, il est important de garder $\omega_{\mathbf{k}}$ et de ne pas le remplacer par ω_{pe} à cause du signe que $\omega_{\mathbf{k}}$ comporte. A l'aide de l'éq.(2.18), $\gamma_{\mathbf{k}} = -(\omega_{\mathbf{k}}/2)\Im \Delta(k, \omega_{\mathbf{k}})$, on trouve alors **l'amortissement de Landau**,

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \frac{\pi}{2} \omega_{\mathbf{k}} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \text{sign}(k) \left. \frac{df_{e0}}{dv} \right|_{v=\omega_{\mathbf{k}}/k}. \quad (2.22)$$

En prenant pour f_{e0} une maxwellienne, on vérifie que $\gamma_{\mathbf{k}} < 0$ pour tout choix des signes de $\omega_{\mathbf{k}}$ et k . Une onde de Langmuir est donc amortie dans un plasma en équilibre thermique. C'est un résultat très étonnant de la théorie Vlasov.

Comment est-il possible qu'une théorie supposée **conserver l'énergie** puisse anéantir celle d'une onde sans la faire réapparaître ailleurs ? Comment est-il possible qu'une théorie supposée **réversible** puisse faire disparaître de l'information comme s'il y avait des collisions en action ? - Ces questions sont mal posées. En effet, une étude plus approfondie révélera que l'énergie réapparaît dans les particules résonnantes ayant une vitesse proche de la vitesse de phase de l'onde et que l'information n'est perdue qu'au niveau macroscopique et non pas au niveau de la fonction de distribution. Dans les deux paragraphes suivants, on s'attaque d'abord à la question de la réversibilité et en suite à celle de la conservation de l'énergie.

2.3 L'écoulement libre

Pour bien comprendre l'évolution d'une fonction de distribution regie par l'équation de Vlasov, on se propose de résoudre deux problèmes simplifiés, le premier étant celui de l'écoulement libre d'un ensemble de particules n'interagissant pas les unes avec les autres.

Ce problème s'énonce comme suit : un ensemble de particules est décrit par une fonction de distribution non-perturbée, $f_0(v)$. On se restreint ici à une dimension. Une perturbation initiale de cet état pourrait être choisit comme

$$f_1(x, v, t = 0) = f_0(v)\delta \sin(Kx) \quad (2.23)$$

ou $0 \leq \delta < 1$ pour assurer la positivité de $f(x, v, t) = f_0(v)[1 + \delta \sin(Kx)]$. On cherche alors à connaître l'évolution temporelle de cette perturbation selon

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0. \quad (2.24)$$

Notez que v n'est qu'un paramètre dans ce problème et que la solution générale de (2.24) est

$$f_1(x, v, t) = g(x - vt),$$

où g est une fonction arbitraire (voir appendice 5). Elle est déterminée par la condition initiale (2.23) et on trouve comme solution

$$f_1(x, v, t) = f_0(v)\delta \sin K(x - vt). \quad (2.25)$$

A partir de cette solution, on peut maintenant calculer les quantités macroscopiques. Le calcul de la densité suffit pour montrer l'effet de l'écoulement libre. Au temps $t = 0$, on est en presence d'une perturbation sinusoïdale de la densité :

$$\begin{aligned} n_1(x, t = 0) &= \bar{n} \int f_1(x, v, t = 0) dv \\ &= \bar{n} \delta \sin Kx \end{aligned}$$

Tous les groupes de particules de vitesses différentes contribuent d'une façon constructive à cette perturbation parce que la dépendance spatiale est la même pour tous les groupes. Ceci n'est plus vrai pour des temps $t > 0$ où la phase spatiale vt empêche l'interférence constructive. C'est ainsi que l'amplitude du signal macroscopique disparaît bien que celle de f_1 , éq. (2.25), ne bouge pas. Voyons cela d'une façon formelle pour deux choix d'états stationnaires, la maxwellienne

$$f_0(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{v^2}{v_{th}^2}\right) \quad (2.26)$$

et la lorentzienne

$$f_0(v) = \frac{1}{\pi} \frac{v_{th}}{v^2 + v_{th}^2}. \quad (2.27)$$

Pour la maxwellienne, on obtient

$$\begin{aligned} n_1(x, t) &= \frac{\delta\bar{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v_{th}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{v^2}{v_{th}^2}\right) \sin K(x - vt) \\ &= \frac{\delta\bar{n}}{\sqrt{2\pi}} \sin Kx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v_{th}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{v^2}{v_{th}^2}\right) \cos \frac{v}{v_{th}} (Kv_{th}t). \end{aligned}$$

La deuxième ligne a été obtenue en utilisant le théorème d'addition pour $\sin(Kx - Kvt)$ et l'asymétrie de $\sin(Kvt)$ sous l'intégrale. Avec

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} \cos(qy) dy = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}q^2}$$

on trouve

$$n_1(x, t) = \delta\bar{n} \sin Kx \exp\left[-\frac{1}{2}(Kv_{th}t)^2\right]. \quad (2.28)$$

De la même manière, on trouve pour la lorentzienne, (2.27)

$$n_1(x, t) = \delta\bar{n} \sin Kx \exp(-|Kv_{th}t|).$$

Le temps typique de l'écoulement libre est donc donné par

$$\tau_{el} = (Kv_{th})^{-1} \quad (2.29)$$

Ceci est facile à comprendre vu que pendant ce temps, une grande fraction des particules (par exemple celles de vitesse 0 et celles de vitesse v_{th}) sont déphasées les unes par rapport aux autres. En anglais, on parle de la perte du signal macroscopique par “phase mixing”.

Notez que la densité (2.28) n'oscille pas avec le temps, mais est purement amortie. L'oscillation à la fréquence de plasma que nous avons trouvée dans l'éq (2.15) est due aux forces électriques que nous avons négligées dans ce paragraphe, éq. (2.24). En opposition à l'écoulement libre, les phénomènes dûs aux forces électriques et magnétiques sont “collectifs” parce que les particules s'influencent mutuellement par ces forces.

Revenons maintenant à la fonction de distribution perturbée, éq. (2.25). Elle ne disparaît pas, mais devient de plus en plus structurée au cours du temps. En fait, son “vecteur d'onde” dans l'espace des vitesses Kt tend avec t vers l'infini : ceci est le prix à payer pour l'approximation non-collisionnelle de l'équation cinétique. Les collisions ne vont pas permettre une structure infiniment fine, mais dans un plasma, la “mémoire” de la fonction de distribution est quand même beaucoup plus longue que celle des quantités macroscopiques. Cette particularité peut être démontrée expérimentalement par un phénomène non-linéaire : les echos de plasma.

L'aspect irréversible de l'amortissement de Landau est donc dû au fait que la distribution de départ, éq. (2.23), est lisse et “gentille”. Dans le cadre de la physique décrite par l'équation de Vlasov, rien ne nous empêche de prendre comme condition initiale,

$$f_1(x, v, t = 0) = f_0(v) \delta \sin(Kx + \frac{v}{w})$$

où w est un paramètre de la dimension d'une vitesse. On peut prendre $w \ll v_{th}$ de sorte que $n_1(x, t = 0)$ soit exponentiellement petit. Lors de l'évolution temporelle, la densité croît d'abord jusqu'au temps $t = (Kw)^{-1}$ où la distribution prend la forme (2.23) pour décroître ensuite. Tout est donc réversible !

2.4 L'interaction onde-particule

La question de la réversibilité réglée, on pourrait encore se demander si l'amortissement de Landau n'est pas en contradiction avec la conservation de l'énergie.

Selon l'éq. (2.22) une oscillation plasma (pensez au champ électrique associé) perd de l'énergie parce que son amplitude diminue. Où va donc cette énergie ? La réponse nous vient d'une étude approfondie de l'interaction entre une onde et les particules.

Modèle à une particule

Le comportement d'une particule dans un champ électrique de la forme $\exp(ikx - i\omega t)$ est donné par

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q_e}{m_e} E_{10} \exp(ikx - i\omega t),$$

où E_{10} est l'amplitude du champ $E_1(x, t)$. Comme on se restreint ici à la théorie linéaire on a le droit d'évaluer l'accélération d'une particule en insérant à droite de l'équation du mouvement son "parcours non-perturbé", $x = x_0 + v_0 t$, x_0 et v_0 étant les valeurs initiales de ce dernier. Ainsi l'équation prend la forme approchée

$$\frac{dv}{dt} = \frac{q_e}{m_e} E_{10} \exp[ik(x_0 + v_0 t) - i\omega t]$$

qui a la solution

$$v - v_0 = \frac{q_e}{m_e} E_{10} \left\{ \frac{\exp[ik(x_0 + v_0 t) - i\omega t] - \exp[ikx_0]}{i(kv_0 - \omega)} \right\}. \quad (2.30)$$

Dans la limite $kv_0 - \omega \rightarrow 0$ le résultat est

$$v - v_0 = \frac{q_e}{m_e} E_{10} t \exp(ikx_0)$$

montrant que les particules ("résonnantes") ayant une vitesse v_0 proche de la vitesse de phase de l'onde, ω/k , sont fortement perturbées; la déviation de la vitesse initiale croît sans borne (un résultat particulier à la théorie linéaire!). Suivant l'endroit où la particule se trouve par rapport à l'onde l'expression $(q_e/m_e)E_{10}\Re \exp(ikx_0)$ est positive, nulle ou négative, la particule étant accélérée, non-perturbée ou décélérée. Il y a donc toujours autant de particules à accélérer qu'à décélérer. On conclut qu'au niveau d'un modèle linéaire à une particule il n'y a pas d'échange d'énergie.

L'explication de l'amortissement de Landau est un peu plus subtile : Les particules accélérées qui à $t = 0$ ont une vitesse légèrement inférieure à la vitesse de phase de l'onde restent plus longtemps en interaction avec l'onde que celles partant avec une vitesse légèrement supérieure parce qu'elles s'approchent d'abord de la vitesse de phase. Pour les particules décélérées le contraire est vrai. Pour expliquer l'amortissement de Landau à l'aide d'une seule particule nous devons donc recourir à la théorie nonlinéaire. Heureusement, la théorie Vlasov, qui est de nature statistique, nous fournit le résultat en version linéaire déjà. Dans cette théorie la variation de l'énergie des particules s'exprime en forme de produits de quantités linéaires.

Formulation du problème avec onde imposée

Le problème posé par les équations Vlasov et Maxwell couplées (problème "self-consistent") est largement simplifié quand on se contente de la solution non-consistante de l'équation de Vlasov. On va donc imposer un champ électrique extérieur et chercher la solution pour les particules seulement. On voudrait savoir si les particules gagnent de l'énergie dans l'onde.

On impose une onde de la forme (*) :

$$E_1(x, t) = E_{10}(t) \sin(kx - \omega t). \quad (2.31)$$

La distribution de particules s'écrit de nouveau :

$$f(x, v, t) = f_0(v) + f_1(x, v, t) + \dots \quad (2.32)$$

où $f_0(v)$ est une fonction suffisamment lisse.

De plus, il faut que $f_1(x, v, t = 0)$ produise $E_{10}(t = 0) \sin kx$, c'est à dire que $f_1(x, v, 0)$ soit compatible avec l'équation de Poisson. On fait les calculs avec $q_e = -e$, $m = m_e$ et $\bar{n} = \bar{n}_e$:

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = -\frac{e\bar{n}}{\epsilon_0} \int f_1(x, v, 0) dv \quad (2.33)$$

On a, en $t=0$:

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = kE_{10}(t = 0) \cos kx \quad (2.34)$$

D'où :

$$kE_{10}(t = 0) \cos kx = -\frac{e\bar{n}}{\epsilon_0} \int f_1(x, v, 0) dv \quad (2.35)$$

Si on prend

$$f_1(x, v, t = 0) = f_{10}(v) \cos kx, \quad (2.36)$$

on obtient alors :

$$\int f_{10}(v) dv = -\frac{\epsilon_0 k}{e\bar{n}} E_{10}(t = 0) \quad (2.37)$$

pour que cela soit compatible. Il n'est pas nécessaire de spécifier ici la forme exacte de $f_{10}(v)$ pourvu qu'elle soit suffisamment lisse et satisfasse (2.37), mais il n'est pas gênant non plus si elle a la forme d'une maxwellienne, eq.(1.75), ou d'une lorentzienne comme dans l'exercice 5 de la série 4.

(*) Cette manière de discuter à la fois l'interaction onde-particule résonnante et non-résonnante est due à J. Václavík du CRPP. Pour voir le cas plus simple d'un champ constant et de l'interaction résonnante seulement, on peut se référer à l'article de Thomas O'Neil, *Physics of Fluids* **8** (1965) 2255.

Le problème à résoudre est le suivant : on cherche à trouver une fonction de distribution $f(x, v, t)$ telle que l'équation de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{eE_{10}(t)}{m} \sin(kx - \omega t) \frac{\partial f}{\partial v} \quad (2.38)$$

soit vérifiée. Notre but sera de calculer le gain (ou la perte) d'énergie des particules dans le champ :

$$\dot{u}_p = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} \bar{n} m v^2 f(x, v, t) dv. \quad (2.39)$$

Solution au premier ordre

Le champ $E_{10}(t)$ dépendant du temps varie lentement, c'est à dire :

$$\left| \frac{dE_{10}(t)}{dt} \right| \ll |\omega E_{10}(t)|. \quad (2.40)$$

Cette condition est nécessaire pour que (2.31) puisse être appelée une onde de fréquence ω .

Bien que l'équation (2.38) soit linéaire en f , on cherche la solution d'une façon perturbative. La distribution $f_1 \sim E_{10}$ est décrite par (linéarisation de l'équation de Vlasov) :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{eE_{10}(t)}{m} \sin(kx - \omega t) \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (2.41)$$

Notez que la vitesse v n'est qu'un paramètre, l'équation (2.41) étant une équation à dérivées partielles en t et en x , linéaire et inhomogène.

La solution de (2.41) satisfaisant la condition initiale (2.36) s'obtient par intégration le long des caractéristiques de l'équation (voir la "méthode des orbites non-perturbées" dans l'appendice 5) :

$$f_1(x, v, t) = \underbrace{f_1(x - vt, 0)}_{f_{10}(v) \cos k(x-vt)} + \int_0^t \frac{eE_{10}(t')}{m} \sin[k(x + v(t' - t)) - \omega t'] dt' \frac{\partial f_0}{\partial v} \quad (2.42)$$

Calcul de l'échange d'énergie

L'énergie des particules qui interagissent avec l'onde (2.30) n'est pas constante et elle peut être calculée à l'aide de l'équation (2.39). On ne s'intéresse en fait (ou plutôt : "on n'a le droit de s'intéresser") qu'à la moyenne spatiale du gain d'énergie :

$$\langle \dots \rangle \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \dots dx. \quad (2.43)$$

c'est-à-dire :

$$\langle \dot{u}_p \rangle = \frac{1}{2} \bar{n} m \int_{-\infty}^{\infty} dv v^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle. \quad (2.44)$$

Pour la variation de f on se sert de l'éq.(2.38)

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = - \left\langle v \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle + \frac{e E_{10}(t)}{m} \left\langle \sin(kx - \omega t) \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \quad (2.45)$$

Comme f est périodique en x , cela implique que $\langle \partial f / \partial x \rangle = 0$. Pour l'évaluation du reste de l'expression à droite, on se restreint à l'approximation différente de zéro la plus basse possible. On la trouve en y insérant le développement (2.32). Aussi, il faut se rappeler que $\langle \sin \dots \rangle = 0$, $\langle \sin \dots \cos \dots \rangle = 0$ et que $\langle \sin^2 \dots \rangle = \frac{1}{2}$.

De plus,

- $\partial f_0 / \partial t = 0$ trivialement car f_0 est stationnaire,
- $\langle \partial f_1 / \partial t \rangle = 0$ car $\langle f_0 \sin \dots \rangle = 0$,
- $\langle \partial f_2 / \partial t \rangle \neq 0$ car $\langle \partial f_2 / \partial t \rangle$ est de la forme $\langle f_1 \sin \dots \rangle$ et contient des termes en $\langle \sin^2 \dots \rangle$.

Ainsi, on obtient :

$$\langle \dot{u}_p \rangle = \frac{\bar{n} e E_{10}(t)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dv v^2 \frac{\partial}{\partial v} \langle \sin(kx - \omega t) f_1(x, v, t) \rangle \quad (2.46)$$

Intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle \dot{u}_p \rangle = & \bar{n}eE_{10}(t) \frac{1}{2} \left[v^2 \overbrace{\langle \sin(kx - \omega t) f_1(x, v, t) \rangle}^A \right]_{-\infty}^{\infty} \\
& - \bar{n}eE_{10}(t) \int_{-\infty}^{\infty} v \underbrace{\langle \sin(kx - \omega t) f_1(x, v, t) \rangle}_A dv
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Calculons A en utilisant l'éq.(2.42) :

$$\begin{aligned}
A = & f_{10}(v) \langle \sin(kx - \omega t) \cos k(x - vt) \rangle \\
& + \int_0^t dt' \frac{eE_{10}(t')}{m} \langle \sin(kx - \omega t) \sin(kx + kv(t' - t) - \omega t') \rangle \frac{\partial f_0}{\partial v}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

A l'aide des formules de trigonométrie

$$\cos(\underbrace{kx - \omega t}_{\alpha} + \underbrace{\omega t - kv t}_{\beta}) = \cos(kx - \omega t) \cos(\omega t - kv t) - \sin(kx - \omega t) \sin(\omega t - kv t)$$

et

$$\begin{aligned}
\sin(\underbrace{kx - \omega t}_{\alpha} + \underbrace{kv(t' - t) - \omega(t' - t)}_{\beta}) = & \sin(kx - \omega t) \cos(kv(t' - t) - \omega(t' - t)) + \\
& \cos(kx - \omega t) \sin(kv(t' - t) - \omega(t' - t)),
\end{aligned}$$

on obtient finalement pour A :

$$\begin{aligned}
\langle \sin(kx - \omega t) f_1(x, v, t) \rangle = & -f_{10}(v) \frac{1}{2} \sin(\omega - kv)t + \\
& + \int_0^t dt' \frac{eE_{10}(t')}{2m} \cos[(kv - \omega)(t - t')] \frac{\partial f_0}{\partial v}.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

En remplaçant (2.49) dans (2.47), on constate que le premier terme est nul, si on a pris des fonctions de distribution $f_0(v)$ et $f_{10}(v)$ physiques, c'est-à-dire des fonctions d'un contenu énergétique fini :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f v^2 dv < \infty.$$

Notez que la lorentzienne ne tombe pas dans cette classe de fonctions !

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \langle \dot{u}_p \rangle = & -\bar{n}eE_{10}(t) \int_{-\infty}^{\infty} v dv \left\{ \underbrace{-f_{10}(v) \frac{1}{2} \sin(\omega - kv)t}_{(*)} + \right. \\ & \left. + \int_0^t dt' \frac{eE_{10}(t')}{2m} \cos[(kv - \omega)(t - t')] \frac{\partial f_0}{\partial v} \right\}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Finalement, il faut encore remarquer que pour des temps suffisamment grands la contribution de $(*)$ est nulle : elle disparaît par mélange de phase dans un temps typique à l'écoulement libre, éq.(2.29), si $f_{10}(v)$ est suffisamment lisse.

On obtient finalement la variation d'énergie :

$$\langle \dot{u}_p \rangle = -\frac{\bar{n}e^2}{2m} E_{10} \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{\partial f_0}{\partial v} v \int_0^t dt' E_{10}(t') \cos[(kv - \omega)(t - t')]. \quad (2.51)$$

Faisant intervenir la faible variation temporelle du champ (2.40), on développe $E_{10}(t')$ autour de t :

$$E_{10}(t') = E_{10}[t - (t - t')] \approx E_{10}(t) - \frac{dE_{10}}{dt}(t - t'). \quad (2.52)$$

En insérant (2.52) dans (2.51), on obtient :

$$\langle \dot{u}_p \rangle = -\frac{\bar{n}e^2}{2m} E_{10}(t) \int dv \frac{\partial f_0}{\partial v} v \int_0^t dt' \left[E_{10}(t) - \frac{dE_{10}}{dt}(t - t') \right] \cos[(kv - \omega)(t - t')].$$

Pour plus de clarté on sépare les deux termes dans le crochet :

$$\begin{aligned} \langle \dot{u}_p \rangle = & -\frac{\bar{n}e^2}{2m} E_{10}^2 \int dv \frac{\partial f_0}{\partial v} v \int_0^t dt' \cos[(kv - \omega)(t - t')] \\ & - \frac{\bar{n}e^2}{2m} E_{10} \frac{dE_{10}}{dt} \int dv \frac{\partial f_0}{\partial v} v \frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^t dt' \sin[(kv - \omega)(t - t')]. \end{aligned}$$

Notez la dérivée $\partial/\partial\omega$ qui produit $-(t-t')\cos[\dots]$. Maintenant les intégrales sur le temps peuvent être calculées :

$$\langle \dot{u}_p \rangle = -\omega_{pe}^2 \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{10}^2 \times \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{\partial f_0}{\partial v} v \left[\frac{\sin(kv - \omega)t}{kv - \omega} + \frac{1}{E_{10}} \frac{dE_{10}}{dt} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1 - \cos(kv - \omega)t}{kv - \omega} \right]. \quad (2.53)$$

De cette formule ressortent les deux distributions importantes pour la théorie cinétique, la fonction δ (éq. (A1.4)) et la valeur principale

$$\mathcal{P} \frac{1}{x} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos Mx}{x}. \quad (2.54)$$

Sous une intégrale, cette dernière distribution a la propriété d'enlever la région du pôle d'une façon symétrique :

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} f(x) \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon}^{\infty} f(x) \frac{dx}{x} \right]. \quad (2.55)$$

L'éq. (2.53) peut ainsi être réécrite comme

$$\langle \dot{u}_p \rangle = -\omega_{pe}^2 \frac{\epsilon_0}{2} E_{10}^2 \int dv v \left[\pi \delta(kv - \omega) + \frac{1}{E_{10}} \frac{dE_{10}}{dt} \frac{\partial}{\partial \omega} \mathcal{P} \frac{1}{kv - \omega} \right] \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (2.56)$$

Le premier terme de (2.56) correspond au taux de changement de l'énergie des particules résonnantes et le deuxième terme le taux de changement de l'énergie des particules non-résonnantes.

Particules résonnantes

Voyons tout d'abord le premier terme dans l'éq.(2.56),

$$\langle \dot{u}_p \rangle_{rés} = -\omega_{pe}^2 \frac{\epsilon_0}{2} E_{10}^2(t) \int_{-\infty}^{\infty} dv v \pi \delta(kv - \omega) \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (2.57)$$

En utilisant le fait que $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$ (*), on obtient :

$$\langle \dot{u}_p \rangle_{rés} = -\omega_{pe}^2 \frac{\pi}{2} \epsilon_0 E_{10}^2(t) \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v}{|k|} \delta\left(v - \frac{\omega}{k}\right) \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (2.58)$$

Il suffit maintenant d'utiliser les propriétés de $\delta(x)$ pour trouver :

$$\langle \dot{u}_p \rangle_{rés} = -\omega_{pe}^2 \frac{\pi}{2} \epsilon_0 E_{10}^2(t) \frac{\omega}{k|k|} \left. \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|_{v=\omega/k}.$$

et finalement :

$$\langle \dot{u}_p \rangle_{rés} = -\frac{\pi}{2} \omega \operatorname{sign}(k) \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \left. \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|_{v=\omega/k} \epsilon_0 E_{10}^2(t). \quad (2.59)$$

Les particules gagnent de l'énergie si la pente de la fonction de distribution stationnaire est négative (positive) à la vitesse de phase positive (négative) de l'onde. Apparemment, c'est le seul endroit de la fonction de distribution qui importe : les particules satisfaisant $v = \omega/k$ sont appelées résonnantes. Ce sont elles qui interagissent de la façon la plus forte et la plus spectaculaire avec l'onde.

D'après (2.59) les particules résonnantes gagnent (ou perdent) de l'énergie à un taux constant. C'est un résultat typiquement linéaire et n'est valable que pour un temps limité (même si on a utilisé l'astuce mathématique de faire tendre t vers l'infini. En réalité, la fonction de distribution se modifie au cours du temps et (2.59) perd sa validité, ou alors l'onde perd son énergie et l'amplitude du champ décroît. Imaginons-nous pour un moment cette deuxième situation réelle.

Energie de l'onde

Quelle est, en fait, l'énergie disponible dans l'onde ? Elle porte l'énergie électrostatique $\epsilon_0 \langle E_1^2 \rangle / 2$ du champ ainsi que l'énergie des particules non-résonnantes. En

(*) En effet :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(ax) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{a}\right) \delta(y) dy = \frac{1}{|a|} f(0) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx$$

D'où on voit que

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

troisième année, nous avons vu que l'énergie d'une onde dans un diélectrique est donnée par (voir aussi Landau-Lifshitz VIII) :

$$\langle u_{\text{onde}} \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} \langle E_1^2 \rangle \frac{\partial}{\partial \omega}(\epsilon \omega) + \frac{1}{2\mu_0} \langle B_1^2 \rangle. \quad (2.60)$$

Pour une onde Langmuir, comme on la discute à présent, le deuxième terme est nul. D'autre part

$$\frac{\partial}{\partial \omega}(\epsilon \omega) = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\omega - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \right) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \approx 2,$$

et nous avons

$$\langle u_{\text{onde}} \rangle = \epsilon_0 \langle E_1^2 \rangle,$$

ce qui montre que les particules non-résonnantes portent autant d'énergie que le champ électrostatique.

Amortissement Landau

Ceci établi, on peut se servir de la conservation d'énergie pour calculer le taux d'amortissement (ou de croissance) de l'onde. Avec l'ansatz $E_1 = E_{10}(t) \cos(kx - \omega t)$ où on admet une faible variation temporelle de l'amplitude de la forme $E_{10}(t) \sim \exp(\gamma t)$ ($\gamma \ll \omega$), on a $\langle u_{\text{onde}} \rangle = \gamma \epsilon_0 E_{10}^2$. En écrivant $\langle \dot{u}_{\text{onde}} \rangle + \langle \dot{u}_p \rangle_{\text{rés}} = 0$ on trouve à l'aide de (2.59) l'expression pour l'amortissement Landau

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{\pi}{2} \text{sign}(k) \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k}. \quad (2.61)$$

La quantité f_0 est une fonction de distribution unidimensionnelle qui a la dimension de $1/v$; l'expression à droite est donc sans dimension comme il se doit. L'amortissement décrit par l'éq.(2.61) est exponentiellement petit dans le cas d'une maxwellienne si la vitesse de phase ω/k dépasse largement la vitesse thermique v_{the} ce qui est le cas pour des ondes de grande longueur d'onde. Cela veut dire qu'une onde (phénomène collectif!) peut persister beaucoup plus longtemps que le temps de l'écoulement libre, $\tau_{el} = (kv_{the})^{-1}$. A posteriori, on a donc justifié l'approximation menant de l'éq.(2.50) à l'éq.(2.51).

Comme autre application immédiate de (2.61) on peut discuter le cas du plasma traversé par un faisceau d'électrons (laboratoire, corona du soleil). La fonction de distribution a dans ce cas une forme comme montrée dans la Fig. 2.2.

Les ondes ayant une vitesse de phase entre v_2 et V_f sont instables. Cette instabilité porte le nom anglais "gentle bump instability", l'instabilité d'un faisceau chaud (par opposition au faisceau mono-énergétique appelé "froid").

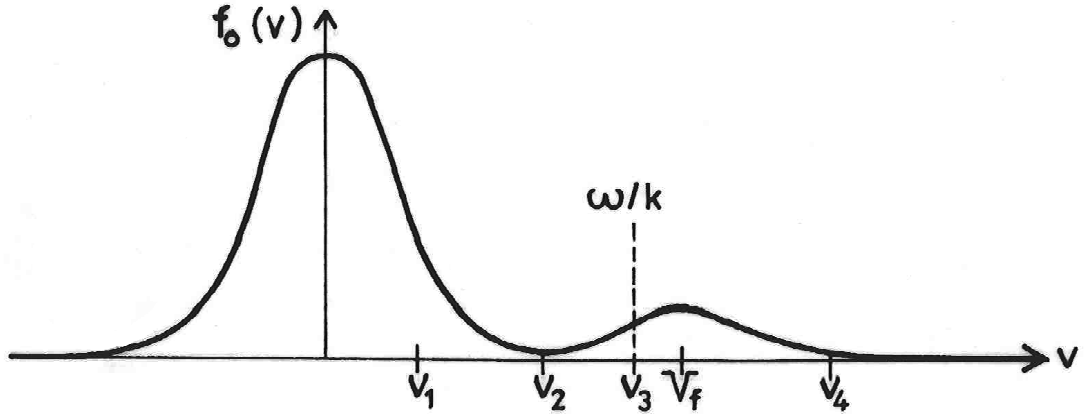


Figure 2.2 Fonction de distribution décrivant le plasma (bulk) et un faisceau de vitesse V_f . Une onde ayant une vitesse de phase $\omega/k = v_i$ est (i=1) très fortement amortie, (i=2) pas amortie, (i=3) croissante, (i=4) faiblement amortie.

Particules non-résonnantes

Occupons-nous maintenant du deuxième terme de l'éq.(2.56). Remplaçant le v devant le crochet par $[(kv - \omega) + \omega]/k$, on produit deux termes dont le premier disparaît par intégration :

$$\langle \dot{u}_p \rangle_{\text{non-rés.}} = \frac{1}{4} \epsilon_0 \frac{dE_{10}^2}{dt} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \omega \mathcal{P} \int dv \frac{1}{\omega - kv} k \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (2.62)$$

L'énergie des particules non-résonnantes est finalement donnée par l'expression (2.62) intégré par rapport au temps,

$$\langle u_p \rangle_{\text{non-rés.}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E_1^2 \rangle \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \chi_R(k, \omega)], \quad (2.63)$$

où on s'est servi de $\langle E_1^2 \rangle = E_{10}^2/2$ et de la définition de la susceptibilité

$$\chi_R(k, \omega) = \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{1}{\omega - kv} k \frac{\partial f_0}{\partial v}, \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (2.64)$$

D'après (2.60) on s'attend à trouver

$$\begin{aligned} \langle u_p \rangle_{\text{non-rés.}} &= \langle u_{\text{onde}} \rangle - \langle u_{\text{ch}} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E_1^2 \rangle \frac{\partial}{\partial \omega} (\epsilon \omega) - \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E_1^2 \rangle \frac{\partial}{\partial \omega} \omega (\epsilon - 1) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E_1^2 \rangle \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \chi(\omega). \end{aligned}$$

C'est parfaitement ce qui s'est passé ; comme χ est en général complexe en théorie cinétique, on a dû préciser dans (2.63) que ce n'était que la partie réelle qui intervenait.

L'expression (2.64) peut facilement être évaluée pour un plasma froid (d'une façon analogue au §2.4) et on retrouve alors la susceptibilité rencontrée en troisième année. En intégrant par partie on trouve :

$$\chi_R(k, \omega) = -\frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{k^2}{(\omega - kv)^2} f_0. \quad (2.65)$$

Evaluer pour un "plasma froid" veut dire ici que $v_{the} \ll \omega/k$. L'ordre le plus bas en kv_{the}/ω s'obtient en biffant kv dans la parenthèse du dénominateur. L'intégrale de f_0 vaut 1 et on trouve :

$$\chi_R(k, \omega) = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \quad (2.66)$$

Il est bien clair maintenant comment on peut obtenir χ_R pour une température finie. Il suffit de développer la fraction en terme de kv/ω et d'intégrer les correction thermiques terme par terme. Pour cela, il faudrait bien sûr spécifier la fonction de distribution f_0 . Le cas spécial de la maxwellienne est traité dans le paragraphe 2.8.

Bilan d'énergie

Terminons cette étude de l'interaction onde-particule en écrivant explicitement le bilan d'énergie lors de l'amortissement (ou de la croissance linéaire) d'une onde plasma ($\omega \approx \omega_{pe}$) dû à l'effet Landau.

D'après (2.59) et (2.61) le taux de changement de l'énergie des particules résonnantes est

$$\langle \dot{u}_p \rangle_{\text{rés.}} = -\gamma \epsilon_0 E_{10}^2,$$

tandis que celui des particules non-résonnantes s'obtient de (2.62), (2.63) et (2.66)

$$\langle \dot{u}_p \rangle_{\text{non-rés.}} = \frac{\gamma}{2} \epsilon_0 E_{10}^2 \left. \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \chi_R) \right|_{\omega=\omega_{pe}} = \frac{\gamma}{2} \epsilon_0 E_{10}^2,$$

et celui du champ électrostatique est trivialement

$$\langle \dot{u}_{ch} \rangle = \frac{\gamma}{2} \epsilon_0 E_{10}^2.$$

Le bilan d'énergie s'écrit bien

$$\langle \dot{u}_p \rangle_{\text{rés.}} + \langle \dot{u}_p \rangle_{\text{non-rés.}} + \langle \dot{u}_{ch} \rangle = 0, \quad (2.67)$$

où les termes $\langle \dot{u}_p \rangle_{\text{non-rés.}}$ et $\langle \dot{u}_{ch} \rangle$ représentent le taux de changement de l'énergie de l'onde, (2.60)..

2.5 Le milieu diélectrique [†]

La loi d'Ohm

Au début du cours, nous avons dit que la relation entre le courant $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ et les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ contenait toute la physique des plasmas. Il est temps maintenant d'explicitier cette généralité pour la théorie Vlasov linéarisée dans un milieu homogène et stationnaire. En théorie linéaire, la relation entre $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{j}_1$ est de la forme

$$\mathbf{j}_1(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \int_0^t dt' \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | t, t') \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}', t'), \quad (2.68)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur de conductibilité. Si le milieu est homogène et stationnaire $\boldsymbol{\sigma}$ doit être indépendant d'une translation spatiale ou temporelle et a la forme $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$.

Cette invariance se reflète dans l'espace Fourier- Laplace. Calculons la transformée du courant :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1(\mathbf{k}, \omega) &= \int d^3r \int_0^\infty dt \mathbf{j}_1(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t} \\ &= \int d^3r \int d^3r' \int_0^\infty dt \int_0^t dt' e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}', t'). \end{aligned}$$

Ici, on peut interchanger les intégrales temporelles

[†] Les questions physiques fondamentales réglées, on présente maintenant la théorie formelle. Une bonne partie des paragraphes 2.5, 2.6, 2.8 et 2.9 se trouve aussi dans le livre de S. Ichimaru, *Basic Principles of Plasma Physics : A Statistical Approach*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1973.

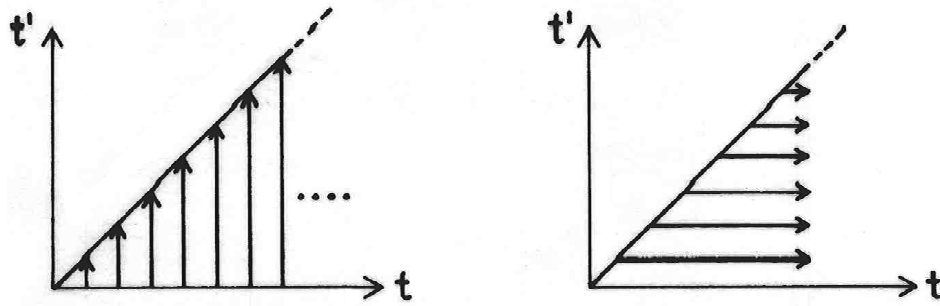


Figure 2.3 À gauche on somme des intégrales de 0 à t pour t allant de 0 à ∞ tandis qu'à droite on somme des intégrales de t' à ∞ pour t' allant de 0 à ∞ . Ces deux intégrales doubles sont équivalentes.

$$\int_0^\infty dt \int_0^t dt' = \int_0^\infty dt' \int_{t'}^\infty dt$$

comme on voit dans la Fig. 2.3. Si ensuite on remplace les variables d'intégration $\mathbf{r}$ et t par $\mathbf{r}'' = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ et $t'' = t - t'$ on a

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1(\mathbf{k}, \omega) &= \int d^3 r' \int_0^\infty dt' \left[\int d^3 r'' \int_0^\infty dt'' e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'') + i\omega(t' + t'')} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}'', t'') \right] \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}', t') \\ &= \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Les équations de Maxwell

C'est la forme simple (2.69) de la loi d'Ohm dans l'espace Fourier-Laplace qui est le reflet de l'invariance de $\boldsymbol{\sigma}$. Avec cette relation on peut écrire la loi d'Ampère (1.1)

$$\begin{aligned} \frac{i}{\mu_0} \mathbf{k} \times \mathbf{B}_1 &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}_1 - i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}_1 + \mathbf{j}_{\text{ext}} \\ &= -i\omega\epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_1 + \mathbf{j}_{\text{ext}}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Dans cette transformée on n'a pas retenu des valeurs initiales[†] mais par contre on a introduit des courants externes comme "source des événements". Ces courants satisfont une équation de continuité comme les courants induits.

$$-i\omega\rho_{\text{ext}} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}_{\text{ext}} = 0.$$

On a défini un tenseur diélectrique par

$$\epsilon = \mathbf{I} + \frac{i}{\omega\epsilon_0}\boldsymbol{\sigma}, \quad (2.71)$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice unité

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

De (2.70) on tire la loi d'Ampère

$$c^2\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1 + \omega\epsilon \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{i}{\epsilon_0}\mathbf{j}_{\text{ext}}, \quad (2.73)$$

et l'équation de Poisson

$$\mathbf{k} \cdot \epsilon \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{i}{\epsilon_0}\rho_{\text{ext}}. \quad (2.74)$$

La transformée de la loi de Faraday est

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 - \omega\mathbf{B}_1 = 0 \quad (2.75)$$

avec la conséquence triviale $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_1 = 0$.

[†] En effet, pour être précis on devrait écrire

$$\frac{i}{\mu_0}\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1(\mathbf{k}, \omega) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) - i\omega\epsilon_0\mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) - \epsilon_0\mathbf{E}_1(\mathbf{k}, t=0) + \mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega)$$

où la transformée spatiale du champ au temps initial, $\mathbf{E}_1(\mathbf{k}, t=0)$, apparaît explicitement. On peut la faire disparaître soit en la supposant nulle, soit en argumentant que l'on ne s'intéresse pas aux signaux transitoires. Ichimaru et beaucoup d'autres auteurs choisissent comme temps de départ $t = -\infty$ et enclenchent la perturbation $\mathbf{j}_{\text{ext}}$ d'une façon adiabatique.

La relation de dispersion

En éliminant $\mathbf{B}_1$ de (2.73) et (2.75) on trouve

$$\left(\epsilon - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \mathbf{l}_T \right) \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{j}_{\text{ext}}}{i\omega\epsilon_0}, \quad (2.76)$$

où $\mathbf{l}_T$ est le tenseur de projection transversal défini par

$$\mathbf{l}_T \equiv \mathbf{l} - \mathbf{l}_L \quad (2.77)$$

et

$$\mathbf{l}_L \equiv \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2}. \quad (2.78)$$

Le tenseur $\mathbf{l}_L$ sert à la projection longitudinale d'un champ. On vérifie facilement qu'un champ $\mathbf{A}$ arbitraire peut être décomposé en composantes longitudinales ($\parallel \mathbf{k}$) et transversales ($\perp \mathbf{k}$) par l'application des tenseurs de projection ainsi définis :

$$\mathbf{A} = \mathbf{l}_L \cdot \mathbf{A} + \mathbf{l}_T \cdot \mathbf{A}.$$

Des fois, il est commode d'avoir une abréviation pour ce qu'on pourrait appeler le "tenseur de dispersion",

$$\Delta(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon(\mathbf{k}, \omega) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \mathbf{l}_T. \quad (2.79)$$

Le mouvement forcé du plasma s'obtient de

$$\Delta \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{j}_{\text{ext}}}{i\omega\epsilon_0} \quad (2.80)$$

et les modes propres (les ondes électromagnétiques) de

$$\Delta \cdot \mathbf{E}_1 = 0. \quad (2.81)$$

Cette dernière équation possède des solutions non-nulles (les ondes) si le déterminant du tenseur de dispersion est nul

$$\det |\Delta(\mathbf{k}, \omega)| = 0. \quad (2.82)$$

Ceci est la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans un milieu anisotrope mais homogène et stationnaire.

La relation de dispersion dans un milieu homogène et isotrope

Si le milieu est isotrope, c'est-à-dire invariant sous une rotation du système de coordonnées, la relation de dispersion se simplifie fortement.

Notons d'abord que sous ces circonstances $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ ne contient qu'une information de direction, celle de $\mathbf{k}$; le caractère tensoriel de ϵ doit alors découler de considérations générales utilisant $\mathbf{k}$. Les tenseurs de rang 2 qui se construisent avec $\mathbf{k}$ et qui sont mutuellement indépendant sont $\mathbf{I}_L$ et $\mathbf{I}_T$. Le tenseur diélectrique doit être écrit alors comme une combinaison linéaire de ces deux tenseurs :

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_L(k, \omega)\mathbf{I}_L + \epsilon_T(k, \omega)\mathbf{I}_T. \quad (2.83)$$

Les coefficients $\epsilon_L(k, \omega)$ et $\epsilon_T(k, \omega)$ ne dépendent que de la valeur absolue de $\mathbf{k}$ et non pas de sa direction. Notez aussi que si $\mathbf{k}$ est parallèle à un des axes du système de coordonnées, les tenseurs de projection (2.77) et (2.78) sont diagonaux. Si $\mathbf{k}$ est parallèle à l'axe z (2.83) prend la forme

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = \begin{pmatrix} \epsilon_T(k, \omega) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_T(k, \omega) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_L(k, \omega) \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

Si, dans un système de coordonnées général, $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ est connu pour un milieu isotrope on obtient les fonctions $\epsilon_L(k, \omega)$ et $\epsilon_T(k, \omega)$ par les opérations suivantes :

$$\epsilon_L(k, \omega) = \frac{\mathbf{k} \cdot \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{k}}{k^2}, \quad (2.85)$$

$$\epsilon_T(k, \omega) = \frac{1}{2} [\text{Tr } \epsilon(\mathbf{k}, \omega) - \epsilon_L(k, \omega)], \quad (2.86)$$

où Tr signifie la "trace", la somme des éléments diagonaux. Ces deux relations se démontrent moyennant (2.83).

Le tenseur de dispersion (2.79) est de la forme

$$\Delta(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_L(k, \omega)\mathbf{I}_L + \left[\epsilon_T(k, \omega) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right] \mathbf{I}_T. \quad (2.87)$$

On peut le diagonaliser comme (2.84). La relation de dispersion (2.82) se sépare alors en deux équations découplées :

$$\epsilon_L(k, \omega) = 0, \quad (2.88)$$

$$\epsilon_T(k, \omega) = \left(\frac{kc}{\omega} \right)^2. \quad (2.89)$$

Si (2.88) est satisfait, il est possible d'avoir $\mathbf{l}_L \cdot \mathbf{E}_1 \neq 0$; (2.88) est donc la relation de dispersion du mode longitudinal dans le milieu. D'une façon analogue, (2.89) est compatible avec $\mathbf{l}_T \cdot \mathbf{E}_1 \neq 0$; (2.89) est la relation de dispersion du mode transversal dans le milieu.

L'approximation électrostatique

Dans le cas d'un milieu anisotrope la décomposition de la relation de dispersion en parties longitudinales et transversales n'est en général pas possible : la polarisation des ondes n'est pas purement longitudinale ou transversale. Dans le cas des petites longueurs d'onde ($\mathbf{k} \rightarrow \infty$) il est pourtant souvent possible de faire l'approximation électrostatique, c'est-à-dire faire l'hypothèse d'un champ purement longitudinal.

L'argumentation va comme suit : Dans le modèle du plasma froid le tenseur diélectrique ne dépend pas de $\mathbf{k}$. Pour un bon nombre de phénomène il est donc permis de supposer que pour une température finie la dépendance reste faible par rapport au terme $(kc/\omega)^2$ dans (2.79). Si ce terme domine sur ϵ le champ déterminé par (2.81) peut avoir la propriété

$$|\mathbf{l}_T \cdot \mathbf{E}_1| \ll |\mathbf{l}_L \cdot \mathbf{E}_1|.$$

On dérive alors une relation de dispersion approximative pour le mode longitudinal en projetant (2.81) sur $\mathbf{k}$:

$$\frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \Delta \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \epsilon \cdot (\mathbf{E}_{1L} + \mathbf{E}_{1T}) \approx \frac{\mathbf{k} \cdot \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{k}}{k^2} E_{1L} = 0,$$

ou plutôt

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) \equiv \frac{\mathbf{k} \cdot \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{k}}{k^2} = 0. \quad (2.90)$$

Cette fonction a le nom de "fonction diélectrique". Notez que (2.85) et (2.90) ne sont pas identiques : la fonction diélectrique dépend de la direction de $\mathbf{k}$ tandis que ϵ_L n'en dépend pas dû à l'isotropie, mais $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ est bien sûr identique à ϵ_L dans un milieu isotrope.

2.6 Le tenseur diélectrique du modèle Vlasov

Le tenseur diélectrique (2.71) s'obtient du tenseur de conductibilité défini dans (2.69) ; on cherche donc la relation linéaire entre $\mathbf{j}_1(\mathbf{k}, \omega)$ et $\mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega)$.

Le courant est donné par la transformée de (1.48) :

$$\mathbf{j}_1(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha 1}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) d^3 v. \quad (2.91)$$

Nous écrivons de nouveau pour les quantités du premier ordre $f_{\alpha 1}$, $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{B}_1$. Les quantités stationnaires (l'équilibre) prennent l'indice 0. Ici, nous nous restreignons au cas $\mathbf{E}_0 = 0$ et $\mathbf{B}_0 = 0$. La transformée de l'équation de Vlasov (1.46) prend alors la forme

$$i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega) f_{\alpha 1} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1) \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.92)$$

ou avec la loi de Faraday, $\mathbf{B} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}/\omega$,

$$f_{\alpha 1}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = i \frac{q_{\alpha}/m_{\alpha}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[\left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega} \right) \mathbf{I} + \frac{\mathbf{k} \mathbf{v}}{\omega} \right] \cdot \mathbf{E}_1. \quad (2.93)$$

En insérant ceci dans (2.91) on trouve

$$\mathbf{j}_1(\mathbf{k}, \omega) = \underbrace{\sum_{\alpha} i \frac{q_{\alpha}^2 \bar{n}_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int d^3 v \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[\left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega} \right) \mathbf{I} + \frac{\mathbf{k} \mathbf{v}}{\omega} \right] \cdot \mathbf{E}_1}_{\sigma(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (2.94)$$

Voilà le concentré de la théorie Vlasov ; la conductibilité. Il "n'y a qu'à" l'évaluer maintenant.

Passons d'abord encore au tenseur diélectrique moyennant (2.71),

$$\epsilon = \mathbf{I} - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega} \int d^3 v \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[\left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega} \right) \mathbf{I} + \frac{\mathbf{k} \mathbf{v}}{\omega} \right]$$

ce qui peut être récrit comme

$$\epsilon = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \mathbf{I} - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \int d^3 v \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}}. \quad (2.95)$$

Dans le dernier pas on a intégré un terme par parties. Notez les définitions

$$\omega_{p\alpha}^2 = \frac{q_\alpha^2 \bar{n}_\alpha}{m_\alpha \epsilon_0} \quad (2.96)$$

et

$$\omega_p^2 = \sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2. \quad (2.97)$$

La quantité ω_p est la fréquence de plasma usuelle connue de la théorie fluide. Pour des fréquences très grandes, le dernier terme dans (2.95) décroît comme $1/\omega^3$ et le tenseur diélectrique devient

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) \rightarrow [1 - (\omega_p^2/\omega^2)] \mathbf{I} \quad \text{pour } \omega \rightarrow \infty. \quad (2.98)$$

L'équation (2.98) traduit la réponse du plasma à très haute fréquence qui se comporte alors comme une collection de particules chargées indépendantes (voir Landau-Lifshitz, Tome VIII, *Electrodynamique des milieux continus*, § 59).

A l'aide de (2.90) on peut aussi calculer la fonction diélectrique. Comme c'est toujours par des astuces similaires qu'on modifie les intégrales apparaissant en théorie Vlasov on montre ici la modification de l'intégrale

$$\mathcal{J} = \int d^3r \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}}$$

pas par pas :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int d^3v \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega + \omega}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \\ &= \int d^3v \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \left[1 + \frac{\omega}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \right] \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Le premier terme peut être intégré par parties par rapport à la composante de $\mathbf{v}$ qui est parallèle à $\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= -k^2 \underbrace{\int d^3v f_{\alpha 0}}_{=1} + \omega \int d^3v \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \\
&= -k^2 + \omega \int d^3v \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega + \omega}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \\
&= -k^2 + \omega \underbrace{\int d^3v \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}}}_{=0} + \omega^2 \int d^3v \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega}.
\end{aligned}$$

On déduit alors de (2.90)

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int d^3v \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega}. \quad (2.99)$$

Si le milieu est isotrope on choisit l'axe x en direction de $\mathbf{k}$, le résultat ne dépendant ainsi plus que de la norme de $\mathbf{k}$ conformément à la discussion suivant l'éq. (2.90). Dans le milieu isotrope on obtient finalement

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_L(k, \omega) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int d^3v \frac{\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_x}}{v_x - \omega/k}, \quad (2.100)$$

où $k = |\mathbf{k}|$.

De prime abord les résultats (2.95) et (2.99) sont choquants. Comme on a l'habitude de s'imaginer des fréquences, des vecteurs d'ondes et des vitesses comme des nombres réels on voit mal comment on pourrait évaluer le pôle y apparaissant. Ce qu'il faut réaliser maintenant est le fait que ω n'est pour le moment aucunement une fréquence physique mais simplement la variable indépendante de la transformée de Laplace. Cette dernière est bien définie (voir appendice 1) lorsqu'on prend $\Im \omega$ assez grand. Les intégrales dans (2.95), (2.99) ou encore (2.100) sont donc bien définies quand ω se trouve dans le demi plan supérieur ; leur définition peut être étendue au plan inférieur de ω par continuation analytique.

Les éqs. (2.95) et (2.99) peuvent être considérées comme le résultat le plus important de la théorie cinétique linéaire et leur discussion nous occupera jusqu'à la fin de ce chapitre.

2.7 La limite du plasma froid

Dans le cas d'une température nulle le tenseur diélectrique (2.95) prend aussi la forme (2.98) mais pour une raison différente. En effet, la fonction de distribution du plasma froid est donnée par une fonction de Dirac tridimensionnelle,

$$f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) = \delta^{(3)}(\mathbf{v}) \equiv \delta(v_x)\delta(v_y)\delta(v_z). \quad (2.101)$$

On peut exploiter sa propriété dans l'éq.(2.95) en intégrant d'abord par parties,

$$\epsilon = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \mathbf{I} + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \int d^3v f_{\alpha 0} \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega}.$$

En explicitant la dérivée, l'intégral devient

$$\int d^3v f_{\alpha 0} \left[\frac{\mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{k}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} - \frac{k^2 \mathbf{v}\mathbf{v}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)^2} \right]$$

et prend la valeur nulle à cause de l'éq.(2.101). On a donc dérivé *ab initio* le tenseur diélectrique du plasma froid :

$$\epsilon(\omega) = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \mathbf{I}. \quad (2.102)$$

2.8 La fonction de dispersion

Bien qu'un plasma ne soit pas très souvent en équilibre thermodynamique, on utilise le plus souvent la distribution Maxwellienne (1.75) comme fonction d'ordre zéro, $f_{\alpha 0}$. Si les ions lourds et lents ne contribuent pas au courant (2.94) on a ce qu'on appelle le modèle d'un gaz (ou plasma) électronique avec

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{k_e^2}{k^2} W\left(\frac{\omega}{kv_{the}}\right), \quad (2.103)$$

où

$$W(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x - z} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx, \quad \Im z > 0. \quad (2.104)$$

Pour arriver à (2.103) on a intégré (2.100) par rapport à v_y et v_z , normalisé v_x par rapport à v_{the} et défini

$$k_\alpha = \frac{\omega_{p\alpha}}{v_{th\alpha}}. \quad (2.105)$$

La fonction de dispersion est définie dans le plan supérieur, d'une manière analogue à la fonction $w(z)$, (A7.6). La différence entre les deux provient de la distribution à l'équilibre, Maxwellienne pour (2.104) et Lorentzienne pour (A7.6). L'intégrale (A7.6) nous a fourni une expression simple, éq. (A7.8), qui est valable dans tout le plan z (continuation analytique triviale!).

Le cas de la Maxwellienne, éq. (2.104), est un peu plus difficile à discuter parce que $W(z)$ n'a pas de représentation élémentaire et peut être écrite explicitement que sous forme de série convergente. Avant de chercher cette série, on montre d'habitude la continuation analytique en bougeant des contours d'intégration dans le plan complexe. Ces arguments ne sont pas essentiels pour la suite mais comme ils se trouvent dans tous les livres, il faut les avoir vus.

Dans l'intégrale (2.104) on a imposé $\Im z > 0$, $\Im \omega$ devant être suffisamment grand et $k > 0$. La seule chose dramatique qui peut arriver à l'intégrale est que z se mette sur l'axe réel (sur le parcours d'intégration) ou en dessous du parcours (voir la discussion suivant l'éq. (A7.10)). Si on veut faire bouger z il faut d'abord bouger le parcours d'intégration de telle sorte que la valeur de l'intégrale ne change pas. Le parcours d'intégration (2.104) est représentée graphiquement dans la Fig. 2.4.

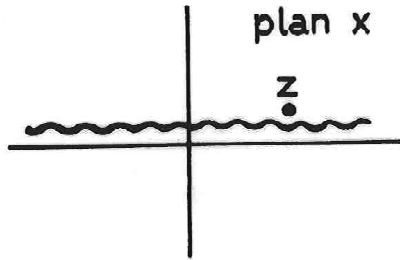


Figure 2.4 Parcours d'intégration pour l'évaluation de la fonction de dispersion quand l'argument z est situé dans le plan supérieur

Comme la Maxwellienne décroît rapidement pour $|\Re x| \rightarrow \infty$ on peut librement déplacer le parcours verticalement tant qu'on ne le fait pas passer de l'autre côté de la singularité en z . Tous les parcours d'intégration dessinés dans la Fig. 2.5 donnent la même valeur à l'intégrale (2.104), ou plus précisément, à l'intégrale

$$W(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} \frac{x}{x-z} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx, \quad (2.106)$$

où Γ est un parcours passant sous la singularité.

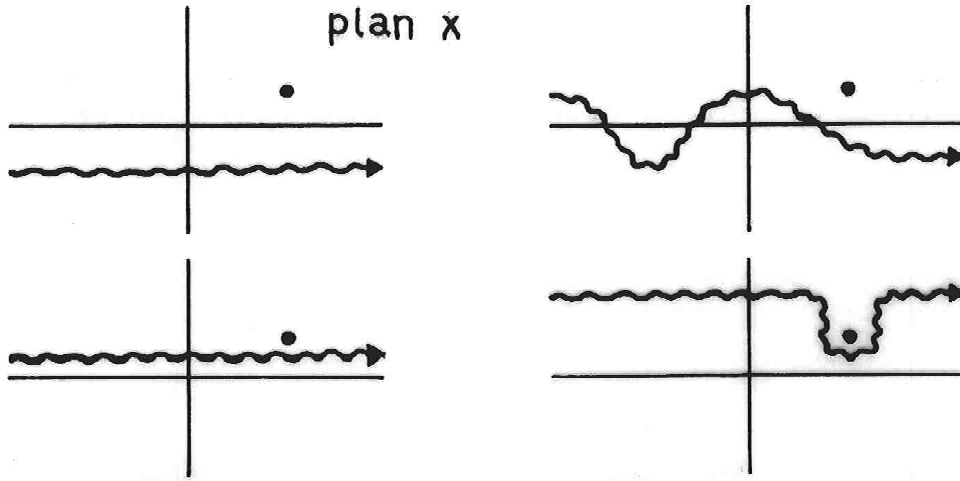


Figure 2.5 Différents parcours d'intégration Γ possible pour l'évaluation de l'éq. (2.106).

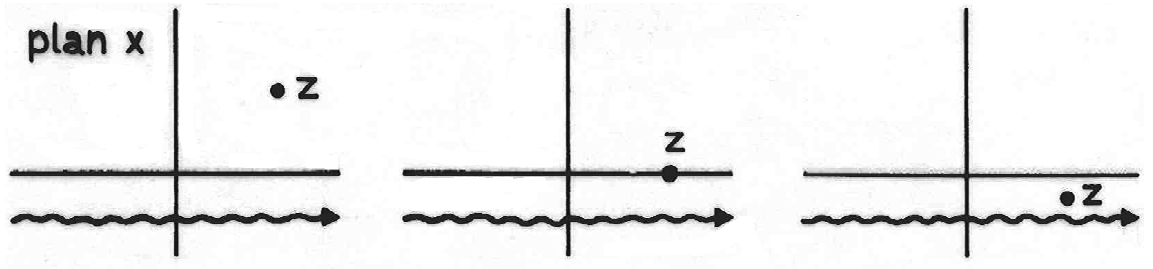


Figure 2.6 Représentation de trois valeurs différentes de la même fonction analytique $W(z)$.

Si on veut laisser z descendre dans le plan inférieur on a intérêt à utiliser le parcours en haut à gauche dans la Fig. 2.5, parce que la continuation analytique dans le plan inférieur est triviale dans ce cas, Fig. 2.6.

Cherchons maintenant la série convergente de $W(z)$. Moyennant

$$\frac{1}{x-z} = i \int_0^{\infty} dt e^{-i(x-z)t} \quad (2.107)$$

pour $x \in \mathbb{R}$ et $\Im z > 0$, on obtient de (2.104)

$$W(z) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt e^{izt} \int_{-\infty}^{\infty} dx x e^{-ixt - \frac{1}{2}x^2}.$$

L'astuce (2.107) va nous permettre de trouver une représentation de $W(z)$ explicitement analytique dans tout le plan z . On avance en intégrant d'abord par rapport à x . La partie réelle de $\exp(-ixt)$ ne fait pas de contribution l'intégrant étant paire ; la partie imaginaire donne après intégration par parties

$$W(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt t e^{izt} \int_{-\infty}^\infty dx \cos x t e^{-\frac{1}{2}x^2}. \quad (2.108)$$

Cette dernière intégrale sur x vaut $\sqrt{2\pi} \exp(-t^2/2)$ comme on peut montrer en la transformant en deux intégrales dans le plan complexe. Il suffit alors de savoir que

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Ainsi on est amené à

$$W(z) = \int_0^\infty dt \underbrace{e^{izt}}_v \underbrace{te^{-\frac{1}{2}t^2}}_{u'} = 1 + iz \int_0^\infty e^{izt - \frac{1}{2}t^2} dt. \quad (2.109)$$

Cette dernière intégrale se transforme en deux intégrales plus élémentaires en choisissant un autre chemin d'intégration dans le plan complexe. Le procédé est standard, on l'a mentionné tout à l'heure pour l'évaluation de l'intégrale sur x dans (2.108). Ici, on le montre pas par pas :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2 + izt} dt = e^{-\frac{1}{2}z^2} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(t-iz)^2} dt \stackrel{\tau=t-iz}{=} e^{-\frac{1}{2}z^2} \int_{-iz}^{-iz+\infty} e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau \\ &= e^{-\frac{1}{2}z^2} \left[\underbrace{\int_{-iz}^0 e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau}_{=i \int_0^z \frac{1}{2} \exp(y^2) dy} + \underbrace{\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau}_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} + \underbrace{\lim_{M \rightarrow \infty} \int_M^{M-iz} e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau}_{=0} \right]. \end{aligned}$$

On obtient ainsi la représentation recherchée :

$$W(z) = 1 - ze^{-\frac{1}{2}z^2} \int_0^z e^{\frac{1}{2}y^2} dy + iz \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2}z^2}. \quad (2.110)$$

On s'est débarrassé de la singularité dans la définition de $W(z)$, éq. (2.103) ! Il ne reste plus rien d'ambigu dans (2.110) et z peut être situé n'importe où dans le

plan complexe. Pour un z réel le troisième terme est purement imaginaire ; c'est le terme qui va produire l'amortissement de Landau (voir éq. (2.18) !).

On pourrait déduire une série convergente pour $W(z)$ en développant $\exp(-z^2/2)$ et $\exp(y^2/2)$. Il est plus simple de le faire via l'équation différentielle satisfaite par la fonction

$$V(z) = e^{-\frac{1}{2}z^2} \int_0^z e^{\frac{1}{2}y^2} dy, \quad (2.111)$$

c'est-à-dire

$$\frac{dV}{dz} = 1 - zV(z) \quad (2.112)$$

avec la condition initiale $V(z = 0) = 0$. On cherche à déterminer les coefficients a_n de

$$V(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

En posant $a_0 = 0$ on satisfait la condition initiale. En substituant V dans (2.112) par la série on trouve

$$a_1 + 2a_2 z + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} + a_{n-1}] z^n = 1.$$

On identifie ensuite les coefficients des différentes puissances de z ,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{n+1} \quad \text{pour } n \geq 2,$$

d'on tire

$$V(z) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!} z^{2n+1}. \quad (2.113)$$

On a utilisé ici la notation de la factorielle double, $(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1) \cdots 3 \cdot 1$. L'éq.(2.110) peut donc être écrite comme :

$$W(z) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} z e^{-\frac{1}{2}z^2} + 1 - z^2 + \frac{z^4}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1} z^{2n+2}}{(2n+1)!!} + \cdots \quad (2.114)$$

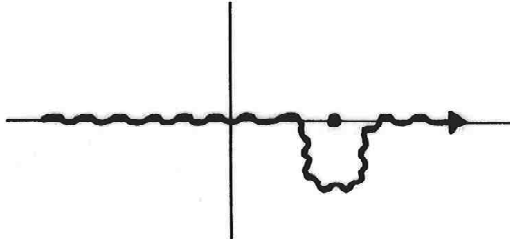


Figure 2.7 Parcours d'intégration quand z est tout près de l'axe réel (en-dessous ou en-dessus !)

Cette série est utile quand $|z| \ll 1$. Dans le cas où $|z| \gg 1$ on a besoin d'une série asymptotique. On l'obtient directement à partir de la formule initiale, éq. (2.106). Pour ne pas perdre l'amortissement physiquement intéressant (petit !) on spécifie $|\Re z| \gg 1$ mais $|\Im z| \ll |\Re z|$. Il paraît qu'il faut en fait demander $|\Im z| < 1/|\Re z|$. Le parcours d'intégration Γ peut alors prendre la forme de la Fig. 2.7.

L'intégrale peut alors être séparée en une valeur principale plus la contribution du demi-cercle. Tout est évident si on développe (2.106) pour un z réel :

$$W(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[i\pi\delta(x-z) + \mathcal{P} \frac{1}{x-z} \right] x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx. \quad (2.115)$$

La valeur principale se développe avec

$$\frac{1}{x-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-x/z} \approx -\frac{1}{z} \left[1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \dots \right].$$

En intégrant un terme après l'autre, on trouve

$$W(z) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} z e^{-\frac{1}{2}z^2} - \frac{1}{z^2} - \frac{3}{z^4} - \dots - \frac{(2n-1)!!}{z^{2n}} - \dots. \quad (2.116)$$

Rappel : Une série asymptotique telle que (2.116) ne converge pas mais les termes sont utilisables jusqu'au point où ils ne décroissent plus avec n . Cette série tronquée se comporte comme $W(z)$ pour $|z| \rightarrow \infty$.

La fonction $W(z)$ est apparentée à la fonction erreur à argument complexe. Comme d'autres auteurs utilisent des définitions légèrement différentes pour la fonction de dispersion, on donne ici les relations :

$$\begin{aligned} W(z) &= 1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} zw \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right) && \text{Abramowitz + Stegun} \\ &= 1 - Z_{\text{sh}} \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right) && \text{Shafranov} \\ &= 1 + \frac{z}{\sqrt{2}} Z \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right) && \text{Fried + Conte.} \end{aligned} \quad (2.117)$$

Le passage à la fonction erreur standard s'obtient via $w(z)$ directement à partir de Abramowitz+Stegun, équ (7.1.1) à (7.1.3) :

$$w(z) = e^{-z^2} \operatorname{erfc}(-iz) = e^{-z^2} [1 - \operatorname{erf}(-iz)]. \quad (2.118)$$

2.9 L'onde de Langmuir

La relation de dispersion d'une onde électrostatique dans un milieu isotrope est donné par les éqs (2.88) et (2.100). Dans un plasma à deux composantes aux vitesses distribuées selon Maxwell, elle s'écrit à l'aide de l'éq. (2.103)

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_{\alpha=e,i} \frac{k_\alpha^2}{k^2} W\left(\frac{\omega}{kv_{th\alpha}}\right) = 0. \quad (2.119)$$

Cette relation de dispersion peut être résolue analytiquement si $|\omega/k| \gg v_{the} > v_{thi}$. C'est la condition de l'amortissement faible rencontrée dans l' Appendice 6. Elle permet l'utilisation de la série asymptotique (2.116) pour W avec le résultat :

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) \approx 1 - \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{th\alpha}^2}{\omega^2}\right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega k_\alpha^2}{k^3 v_{th\alpha}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{k^2 v_{th\alpha}^2}\right).$$

Dans presque tous les plasmas imaginables $v_{the} \gg v_{thi}$; dans ce cas les termes ioniques sont bien plus petits que les termes électroniques. Si le plus grand terme ionique seulement est retenu, la relation de dispersion s'écrit

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 3 \frac{k^2 \omega_{pe}^2 v_{the}^2}{\omega^4} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega k_e^2}{k^3 v_{the}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{k^2 v_{the}^2}\right) \approx 0. \quad (2.120)$$

La présence des ions ne se manifeste que dans le deuxième terme où ω_p , éq. (2.97), apparaît au lieu de ω_{pe} . Cette relation de dispersion satisfait les conditions nécessaires pour pouvoir appliquer l'approximation résonnante, éqs (2.16) à (2.18). La partie réelle de la relation donne

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 \approx \omega_p^2 + 3k^2 v_{the}^2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \approx \omega_p^2 + 3k^2 v_{the}^2 \quad (2.121)$$

où $\omega_{\mathbf{k}}^2$ a été remplacé par ω_{pe}^2 dans le terme de la correction thermique, le calcul de $\omega_{\mathbf{k}} = \Re \omega$ n'étant de toute façon juste qu'au premier ordre en $(kv_{the}/\omega_p)^2$. La

partie imaginaire $\gamma_{\mathbf{k}}$ de la fréquence s'obtient à partir de l'éq. (2.18). Comme elle est petite, on pose $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{pe}$ partout sauf dans l'exponentielle :

$$\gamma_{\mathbf{k}} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_{pe} \frac{k_e^3}{k^3} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{k^2 v_{the}^2}\right). \quad (2.122)$$

Les éqs (2.121) et (2.122) constituent la relation de dispersion explicite de l'onde de Langmuir au premier ordre dans les corrections thermiques. Dans cette approximation elle oscille à la fréquence

$$\omega_{\mathbf{k}} \approx \pm \omega_p \left(1 + \frac{3}{2} \lambda_d^2 k^2\right) \quad (2.123)$$

et se propage à une vitesse de groupe

$$\frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} \approx \pm 3 \omega_p \lambda_d^2 \mathbf{k}. \quad (2.124)$$

Notez qu'on néglige les corrections de l'ordre m_e/m_i dans les termes proportionnels à la température. A vrai dire le pragmatiste le fait souvent d'une manière systématique !

Avec l'éq. (2.122) on retrouve l'amortissement de Landau (2.61) pour le cas d'une distribution maxwellienne avec la seule différence que l'éq. (2.61) était issue d'une situation uni-dimensionnelle alors qu'ici on a traité le cas tri-dimensionnel isotrope. La différence se manifeste formellement dans le fait que k porte un signe dans (2.61) alors qu'ici k est la norme de $\mathbf{k}$.

L'amortissement de Landau est ce qui est vraiment nouveau par rapport à la théorie fluide. En effet, il est possible de dériver l'éq. (2.121) à partir des équations fluides mais pas l'éq. (2.122) ; la raison provient de la nécessité de tenir compte d'une manière plus détaillée des propriétés des particules résonnantes. **Dans le souci d'être complet, on répète ici la dérivation fluide.**

Soient $n_{\alpha 0}$, $n_{\alpha 1}$, $\mathbf{v}_{\alpha 0}$, $\mathbf{v}_{\alpha 1}$, $p_{\alpha 0}$, $p_{\alpha 1}$, $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{E}_1$, $T_{\alpha 0}$ et $T_{\alpha 1}$ la densité, la vitesse, la pression, le champ électrique et la température à l'ordre zéro et un. Les composantes électroniques et ioniques prennent à nouveau l'indice $\alpha = e, i$. Supposant le champ électrique et les vitesses nuls à l'ordre zéro les équations de continuité et de mouvement linéarisées s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\alpha 1}}{\partial t} + n_{\alpha 0} \nabla \cdot \mathbf{v}_{\alpha 1} &= 0, \\ n_{\alpha 0} m_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{v}_{\alpha 1}}{\partial t} &= n_{\alpha 0} q_{\alpha} \mathbf{E}_1 - \nabla p_{\alpha 1}. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Le plasma doit être neutre pour l'état stationnaire, $\sum n_{\alpha 0} q_{\alpha} = 0$. A l'ordre 1, il ne l'est pas et satisfait à l'équation de Poisson

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \sum_{\alpha} n_{\alpha 1} q_{\alpha}. \quad (2.126)$$

En introduisant le potentiel $\mathbf{E}_1 = -\nabla\phi_1$ on réduit le nombre d'inconnues de deux. Les équations (2.125) et (2.126) déterminent $n_{\alpha 1}$, $\mathbf{v}_{\alpha 1}$ et ϕ_1 . Restent les pressions. Contrairement à Vlasov, les équations fluide doivent être complétées par les équations d'état des composantes. Il se trouve que (2.121) peut être reproduite en supposant $p_{i1} = 0$ et un changement adiabatique du gaz électronique sous l'influence de l'onde,

$$\frac{p_{e0} + p_{e1}}{(n_{e0} + n_{e1})^{\gamma}} = \frac{p_{e0}}{n_{e0}^{\gamma}} = \text{const}, \quad (2.127)$$

où $\gamma = C_p/C_v$ est l'indice d'adiabaticité qui vaut 3 dans le cas d'un mouvement uni-dimensionnel des particules (un degré de liberté). Une fois linéarisée, l'éq. (2.127) devient

$$p_{e1} = \frac{n_{e1}}{n_{e0}} \gamma p_{e0} = \gamma n_{e1} T_{e0}, \quad (2.128)$$

où $p_{e0} = n_{e0} T_{e0}$ caractérise pour l'état stationnaire.

Moyennant les transformations de Fourier ($\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$) et de Laplace ($\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$) les équations (2.125), (2.126) et (2.128) deviennent

$$\omega n_{\alpha 1} = n_{\alpha 0} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\alpha 1}, \quad (2.129)$$

$$\omega \mathbf{v}_{\alpha 1} = \mathbf{k} \left(\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \phi_1 + \frac{p_{\alpha 1}}{n_{\alpha 0} m_{\alpha}} \right), \quad (2.130)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{\epsilon_0 k^2} \sum_{\alpha} n_{\alpha 1} q_{\alpha}, \quad (2.131)$$

$$p_{\alpha 1} = \gamma n_{e1} T_{e0} \delta_{\alpha e}, \quad (2.132)$$

où le symbole de Kronecker a été utilisé pour indiquer que les électrons seulement contribuent à la pression perturbée. En insérant (2.132) dans (2.130) et ensuite (2.130) dans (2.129) on obtient une relation entre $n_{\alpha 1}$ et ϕ_1 qui est utilisée pour éliminer $n_{\alpha 1}$ de (2.131). Cette dernière équation devient alors

$$\left[1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \gamma v_{the}^2 k^2} \right] \phi_1 = 0, \quad (2.133)$$

où $v_{the}^2 = T_{e0}/m_e$. La relation de dispersion (2.121) s'obtient alors en annulant le crochet et en supposant $\gamma = 3$ et $\omega/k \gg v_{the}$.

2.10 L'onde et l'instabilité acoustique-ionique

Le crochet de l'éq. (2.133) a un autre zéro correspondant à une onde de basse fréquence. La relation de dispersion approximative est

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = \frac{\gamma \lambda_d^2 k^2}{1 + \gamma \lambda_d^2 k^2} \omega_{pi}^2. \quad (2.134)$$

C'est l'onde acoustique-ionique. A grande longueur d'onde, sa vitesse de phase au carré devient

$$\frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{k^2} = \gamma \lambda_d^2 \omega_{pi}^2 = \gamma \frac{v_{the}^2}{\omega_{pe}^2} \omega_{pi}^2 = \gamma \frac{T_{e0}}{m_i}, \quad (2.135)$$

Comme cette vitesse est bien plus petite que la vitesse thermique des électrons, l'amortissement de Landau dû aux électrons est faible, la dérivée dans (2.61) étant faible. Si par contre $T_{e0} \sim T_{i0}$ et donc $\omega/k \sim v_{thi}$ on s'attend à ce que l'onde soit fortement amortie par les ions. Pour qu'elle puisse exister il faut

$$v_{thi} \ll \left| \frac{\omega}{k} \right| \ll v_{the}, \quad (2.136)$$

condition qui selon (2.135) ne peut être satisfaite que si $T_{i0} \ll T_{e0}$, ce qui est souvent le cas dans les plasmas naturels et de laboratoire.

Pour la théorie Vlasov, éq. (2.119), la condition (2.136) permet d'utiliser la série convergente de $W(\omega/kv_{the})$ pour les électrons et l'expression asymptotique de $W(\omega/kv_{thi})$ pour les ions.

Avant toutefois se lancer dans l'algèbre il est utile de généraliser un peu notre problème. Pour commencer, on permet aux électrons de dériver avec une vitesse $\mathbf{V}_e$ par rapport aux ions. Les électrons portent donc un courant $-en_{e0}\mathbf{V}_e$ dans l'état stationnaire. Ce courant doit être suffisamment faible pour qu'il ne crée qu'un champ magnétique négligeable. La fonction de distribution des électrons est alors souvent prise de la forme d'une maxwellienne "déplacée" :

$$f_{e0}(\mathbf{v}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} v_{the}^3} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{V}_e)^2}{v_{the}^2} \right]. \quad (2.137)$$

D'après (2.90), les ondes électrostatiques sont données par $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ même dans un cas anisotrope comme celui-ci. L'anisotropie induite par (2.137) étant très simple, il est possible d'arriver de (2.99) à (2.100) de la même manière que pour le cas isotrope. Seule la composante de $\mathbf{V}_e$ parallèle à $\mathbf{k}$

$$V_k = \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_e / k \quad (2.138)$$

intervient dans le calcul. La relation de dispersion (2.100) devient

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{k_i^2}{k^2} W\left(\frac{\omega}{kv_{thi}}\right) + \frac{k_e^2}{k^2} W\left(\frac{\omega - kV_k}{kv_{the}}\right) = 0, \quad (2.139)$$

ou après insertion des séries (2.116) pour les ions et (2.114) pour les électrons (supposant $V_k \ll v_{the}$) :

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{thi}^2}{\omega^2}\right) + \frac{k_e^2}{k^2} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \\ & \times \left\{ \frac{k_i^2 \omega}{k^3 v_{thi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{k^2 v_{thi}^2}\right] + \frac{k_e^2 (\omega - kV_k)}{k^3 v_{the}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega - kV_k}{kv_{the}}\right)^2\right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Comme la partie imaginaire est petite, l'approximation résonnante peut être utilisée pour déterminer $\omega_{\mathbf{k}}$ et $\gamma_{\mathbf{k}}$:

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{1 + k_e^2/k^2} \left[1 + 3 \left(\frac{k^2}{k_i^2} + \frac{k_e^2}{k_i^2}\right)\right], \quad (2.141)$$

et dans la limite des grandes longueurs d'onde, $k \ll k_e$,

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = \left(\frac{\omega_{pi}^2}{k_e^2} + 3v_{thi}^2\right)k^2. \quad (2.142)$$

Le deuxième terme étant plus petit que le premier, l'approximation la plus grossière pour la vitesse de phase $\omega_{\mathbf{k}}/k$ est donnée par ce qu'on appelle en physique des plasmas la **vitesse de son** :

$$c_s^2 \equiv \frac{\omega_{pi}^2}{k_e^2} = \frac{T_e}{m_i} \quad (2.143)$$

Si l'on veut définir une vitesse du son similaire en théorie fluide, on constate à l'aide de l'équ (2.135), qu'il faudra poser $\gamma = 1$.

Notez que pour une onde acoustique-ionique $k \sim k_e$ est permis mais k doit être plus petit que $k_i \gg k_e$.

A l'ordre le plus bas

$$\Re \frac{\partial \Delta}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}\right) = 2 \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^3}$$

l'approximation résonnante donne

$$\gamma_{\mathbf{k}} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}}k \left[v_{thi} \frac{\omega^4}{k^4 v_{thi}^4} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{k^2 v_{thi}^2}\right) + \frac{\omega^3}{k^3 c_s^3} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \left(\frac{\omega}{k} - V_k\right) \right]_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}} \quad (2.144)$$

ou dans la limite des longueurs d'onde larges où $\omega_{\mathbf{k}} = kc_s$,

$$\gamma_{\mathbf{k}} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} kc_s \left[1 - \frac{V_k}{c_s} + \sqrt{\frac{m_i T_e^3}{m_e T_i^3}} \exp\left(-\frac{T_e}{2T_i} - \frac{3}{2}\right) \right]. \quad (2.145)$$

Les deux premiers termes dans le crochet sont dus aux électrons et le troisième aux ions. Si V_k est suffisamment grand $\gamma_{\mathbf{k}}$ peut devenir positif et les ondes croître spontanément ; ce phénomène est appelé *l'instabilité acoustique-ionique* ou *l'instabilité du courant*. Le taux de croissance est $\gamma_{\mathbf{k}}/\omega_{\mathbf{k}} \sim \sqrt{m_e/m_i}$. Pour $V_k = 0$ et un plasma d'hydrogène les amortissements électroniques et ioniques sont égaux si $T_e/T_i \approx 16$. Si l'amortissement ionique est négligeable, il y a instabilité dès que $V_k > c_s$.

2.11 Les ondes électromagnétiques

En ce qui concerne les ondes électromagnétiques, il n'y a à priori rien de très intéressant à espérer de la théorie cinétique sans champ magnétique stationnaire puisque la vitesse de phase de ces ondes est plus grande que c , la vitesse de la lumière dans le vide. L'interaction résonnante onde-particule est donc impossible. Reste à vérifier que la théorie cinétique ne crée pas d'ondes électromagnétiques supplémentaires.

Le tenseur diélectrique complet s'obtient de l'éq. (2.95). En supposant que

$$\int v_i f_{\alpha 0} d^3v = 0,$$

il est diagonal et prend la forme

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{ij} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \int \frac{v_i^2}{v_x - \omega/k} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_x} d^3v \right], \quad (2.146)$$

si l'axe x est aligné avec le vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Supposons maintenant que la fonction de distribution soit maxwellienne avec une à température anisotrope $T_{\alpha x} \neq T_{\alpha \perp} \equiv T_{\alpha y} = T_{\alpha z}$.

L'élément ϵ_{xx} n'est rien d'autre que la fonction diélectrique $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$, eq.(2.99), comme on peut démontrer en répétant le calcul qui mène de (2.95) à (2.99). Pour les éléments perpendiculaires à $\mathbf{k}$, l'intégrale sur dv_i transforme v_i^2 en $v_{th\alpha\perp}^2 \equiv T_{\alpha\perp}/m_\alpha$. Ainsi le tenseur diélectrique devient

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx}(\mathbf{k}, \omega) &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{k_{\alpha}^2}{k^2} W\left(\frac{\omega}{kv_{th\alpha x}}\right), \\ \epsilon_{yy}(\mathbf{k}, \omega) &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \frac{T_{\alpha\perp}}{T_{\alpha x}} W\left(\frac{\omega}{kv_{th\alpha x}}\right), \\ \epsilon_{zz}(\mathbf{k}, \omega) &= \epsilon_{yy}(\mathbf{k}, \omega),\end{aligned}\tag{2.147}$$

avec $v_{th\alpha x} = \sqrt{T_{\alpha x}/m_\alpha}$. Le tenseur de dispersion $\Delta(\mathbf{k}, \omega)$ étant diagonal lui aussi, les relations de dispersions des trois polarisations (une longitudinale et deux transversales) sont découplées ; la relation transversale s'écrit

$$\omega^2 - \omega_p^2 - k^2 c^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \frac{T_{\alpha\perp}}{T_{\alpha x}} W\left(\frac{\omega}{kv_{th\alpha x}}\right) = 0.\tag{2.148}$$

L'équation (2.148) prédit un amortissement pour les ondes électromagnétiques usuelles, résultat qui ne peut pas être correcte. Sans élaboration d'une théorie relativiste il n'est donc pas question de se fier aux corrections de températures et on écrit la relation de dispersion de ces ondes comme

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2.\tag{2.149}$$

Cherchons finalement des solutions de (2.148) à plus basse vitesse de phase en imposant $\omega/k \ll v_{the}$ et une température isotrope. Dans le cas où $v_{thi} \ll \omega/k$ on trouve

$$\omega^2 = \frac{k^2 c^2}{1 - \omega_{pe}^2/k^2 v_{the}^2}$$

ce qui viole les hypothèses. La même chose arrive si $\omega/k \ll v_{thi}$. L'anisotropie de la température ne change rien de fondamental à ce résultat. On peut donc affirmer que les effets de température ne créent pas de nouvelles branches d'ondes électromagnétiques dans un plasma non-magnétisé.

2.12 L'instabilité de Weibel

Effet typique dans un plasma hors équilibre, l'éq. (2.148) décrit une instabilité si le rapport $T_{\alpha\perp}/T_{\alpha x}$ est suffisamment grand. En négligeant les ions et en approchant

$$W\left(\frac{\omega}{kv_{thex}}\right) \approx 1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{thex}} \quad (2.150)$$

on trouve

$$\omega = ikv_{thex} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_{ex}}{T_{e\perp}} \left[\frac{T_{e\perp}}{T_{ex}} - 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega_{pe}^2} \right]. \quad (2.151)$$

C'est une instabilité qui croît exponentiellement sans osciller ("purely growing mode") pour

$$k^2 < k_0^2 \equiv \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left(\frac{T_{e\perp}}{T_{ex}} - 1 \right). \quad (2.152)$$

Le taux de croissance maximal est atteint pour $k^2 = k_0^2/3$ et vaut

$$\omega = i\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} k_0 v_{thex} \left(1 - \frac{T_{ex}}{T_{e\perp}} \right). \quad (2.153)$$

Il apparaît que l'anisotropie doit être faible pour que l'approximation (2.150) soit justifiée. Si besoin est, on peut — bien sûr — améliorer cette théorie de sorte qu'elle soit applicable à une anisotropie quelconque.

Cette instabilité porte le nom de E.S. Weibel, l'ancien directeur du CRPP. Elle est une représentante des instabilités électromagnétiques. Les analyses de stabilité cinétique se font toujours d'abord dans l'approximation électrostatique, ensuite seulement dans le cadre électromagnétique si aucune instabilité électrostatique n'a été trouvée. La raison est que les forces magnétiques sont d'habitude plus faibles que les forces électriques, le rapport entre les deux étant de l'ordre v^2/c^2 .

3.

Les ondes dans un plasma magnétisé

3.1 Le tenseur diélectrique

Vu la complexité mathématique de la description des ondes dans un plasma non-magnétisé, il n'est pas étonnant que la dérivation du tenseur diélectrique dans le cas d'un plasma homogène magnétisé constitue un plat de résistance pour la théorie cinétique. Cette complexité étonne encore moins si on se représente bien le but de l'opération : concentrer dans une formule tout ce qu'il faut savoir de l'interaction d'une onde avec les particules. Imaginez les complications créées par des longueurs d'onde de l'ordre des rayons de Larmor, par exemple ! Il existe pourtant beaucoup d'ondes qui ne nécessitent pas un traitement cinétique pour le calcul de leur dispersion ; pour ces dernières, on utilisera de préférence une théorie fluide qui, pour une propagation oblique au champ magnétique, est déjà d'une complexité non-négligeable. Cependant, les interactions de ces ondes avec les particules résonnantes (amortissement et instabilités cinétiques) ne s'obtiennent pas d'une théorie fluide. De plus, les effets cinétiques font naître des ondes inconnues dans un monde fluide. Ces ondes qui portent le nom de celui qui les a découvertes (Bernstein) ont une longueur d'onde de l'ordre des rayons de Larmor et des fréquences proches des fréquences cyclotroniques.

Dans ce chapitre, il est exclu de montrer tous les détails menant de l'équation de Vlasov au tenseur diélectrique. On se contentera de présenter les pas les plus importants.

D'abord, il faut se rappeler la relation entre les équations différentielles ordinaires et partielles (théorie des caractéristiques) ; c'est la relation entre les équations d'Euler et de Hamilton-Jacobi en mécanique. Ici, on en aura besoin sous la forme suivante : si la solution des équations de mouvement

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}'}{dt'} &= \mathbf{v}', \\ \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} &= \mathbf{a}(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t'),\end{aligned}\tag{3.1}$$

est connue pour toutes les conditions initiales

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= \mathbf{r}, \\ \mathbf{v}'(t) &= \mathbf{v},\end{aligned}\tag{3.2}$$

on connaît aussi la solution de l'équation à dérivées partielles,

$$\frac{\partial f}{\partial t'} + \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}'} + \mathbf{a}(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}'} = s(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t').\tag{3.3}$$

Notez que dans le problème (3.1) et (3.2) la variable indépendante est t' . Les variables dépendantes $\mathbf{r}'(t')$ et $\mathbf{v}'(t')$ prennent les valeurs initiales $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$ au temps initial $t' = t$.

Moyennant (3.1), l'éq. (3.3) peut être réécrite sous la forme

$$\frac{df(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t')}{dt'} = s(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t'),\tag{3.4}$$

que l'on peut intégrer entre $t' = 0$ et $t' = t$ avec le résultat

$$\begin{aligned}f[\mathbf{r}'(t'), \mathbf{v}'(t'), t'] \Big|_0^t &= \\ &= f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - f[\mathbf{r}'(t' = 0), \mathbf{v}'(t' = 0), 0] = \int_0^t s[\mathbf{r}'(t'), \mathbf{v}'(t'), t'] dt'.\end{aligned}\tag{3.5}$$

La fonction $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ est solution de l'équation (3.3) au temps $t' = t$, donc l'équation que l'on obtient de (3.3) en omettant tous les primes. Notez qu'en général les quantités $\mathbf{r}'(t' = 0)$ et $\mathbf{v}'(t' = 0)$ dépendent d'une façon compliquée de $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ et t . Elle représentent les coordonnées au temps 0 d'une particules qui se trouve à $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$ au temps t .

L'équation de Vlasov (1.46) linéarisée prend la forme de l'éq. (3.3)

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} [\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}}. \quad (3.6)$$

Ici on a utilisé la notation $f_{\alpha} = f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1} + \dots$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 + \dots$ et $\mathbf{E} = 0 + \mathbf{E}_1 + \dots$. Notez que dans l'état stationnaire le plasma est supposé neutre, $\mathbf{E}_0 = 0$.

L'équation (3.6) peut être intégrée formellement selon le schéma donné par l'éq. (3.5). Pour cela les orbites des particules dans le champ stationnaire $\mathbf{B}_0$ doivent être connues et on parle de la "méthode de l'intégration le long des orbites non-perturbées" (voir Annexe 5). La solution exacte, éq. (3.5), fait intervenir la valeur initiale de $f_{\alpha 1}$ qui est sans intérêt dans une théorie asymptotique où l'on cherche seulement les ondes (voir Annexe 7). Ainsi, on évite la discussion des phénomènes transitoires en cherchant directement une solution de la forme

$$\sim \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (3.7)$$

en s'assurant toutefois que $\Im \omega > 0$ pour faire la différence entre le passé et le futur (causalité!). On peut alors remplacer la borne inférieure dans (3.5) par $t' = -\infty$, la partie imaginaire de ω se chargeant de faire disparaître la contribution de cette dernière (la valeur "initiale" de $f_{\alpha 1}$).

Moyennant les équations (2.75) (Faraday), (3.5) et (3.7) la solution de (3.6) s'écrit

$$\begin{aligned} f_{\alpha 1}(\mathbf{v}) \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] &= \\ &= -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int_{-\infty}^t \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}'} \cdot \left[\left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'}{\omega} \right) \mathbf{I} + \frac{\mathbf{k} \mathbf{v}'}{\omega} \right] \cdot \mathbf{E}_1 \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - \omega t')] dt', \end{aligned} \quad (3.8)$$

où les symboles $f_{\alpha 1}(\mathbf{v})$ et $\mathbf{E}_1$ sont les amplitudes complexes de la solution asymptotique (3.7) et non pas les transformées Fourier-Laplace dans le sens strict du terme. Les orbites non-perturbées $\mathbf{r}'(t')$ et $\mathbf{v}'(t')$ s'obtiennent des équations du mouvement d'une particule dans un champ magnétique homogène. En choisissant $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ celles-ci deviennent

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} &= \mathbf{v}', \\ \frac{dv'_x}{dt'} &= v'_y \Omega_{\alpha}, \\ \frac{dv'_y}{dt'} &= -v'_x \Omega_{\alpha}, \\ \frac{dv'_z}{dt'} &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

La fréquence cyclotronique a été prise ici comme $\Omega_\alpha = (q_\alpha/m_\alpha)B_0$ qui est positive pour les ions ($q_\alpha > 0$) et négative pour les électrons ($q_\alpha < 0$). La solution de (3.9) satisfaisant les conditions initiales (3.2) est

$$\begin{aligned} v'_x &= v_x \cos [\Omega_\alpha(t' - t)] + v_y \sin [\Omega_\alpha(t' - t)] \equiv v_\perp \cos [\Omega_\alpha(t' - t) + \theta], \\ v'_y &= -v_x \sin [\Omega_\alpha(t' - t)] + v_y \cos [\Omega_\alpha(t' - t)] \equiv -v_\perp \sin [\Omega_\alpha(t' - t) + \theta], \\ v'_z &= v_z \equiv v_\parallel, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{v_x}{\Omega_\alpha} \sin [\Omega_\alpha(t' - t)] + \frac{v_y}{\Omega_\alpha} \{1 - \cos [\Omega_\alpha(t' - t)]\} \\ y' &= y - \frac{v_x}{\Omega_\alpha} \{1 - \cos [\Omega_\alpha(t' - t)]\} + \frac{v_y}{\Omega_\alpha} \sin [\Omega_\alpha(t' - t)] \\ z' &= z + v_z(t' - t). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Comme la fonction de distribution stationnaire, $f_{\alpha 0}$, ne dépend que des constantes de mouvement $v_\parallel$ et $v_\perp^2$ (voir §1.8) il est possible d'expliciter la dérivée intervenant dans l'intégrant de (3.8) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v'_x} &= \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp} \cos [\Omega_\alpha(t' - t) + \theta], \\ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v'_y} &= -\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp} \sin [\Omega_\alpha(t' - t) + \theta], \\ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v'_z} &= \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\parallel}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

En insérant (3.10) et (3.11) dans (3.8), la fonction de distribution perturbée s'écrit comme

$$f_{\alpha 1}(\mathbf{v}) = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha \omega} \int_{-\infty}^t \mathbf{A}(\mathbf{v}' \mid \omega, k_\parallel, k_\perp) \cdot \mathbf{E}_1 \exp [i\Phi(t' - t)] dt', \tag{3.12}$$

si le système de coordonnées est orienté de manière à avoir

$$\mathbf{k} = (k_\perp, 0, k_\parallel). \tag{3.13}$$

Le vecteur $\mathbf{A}$ est défini par

$$\begin{aligned}
A_x &= \left[(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} \right] \cos [\Omega_{\alpha}(t' - t) + \theta], \\
A_y &= \left[(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} \right] \sin [\Omega_{\alpha}(t' - t) + \theta], \\
A_z &= v_{\parallel} k_{\perp} \cos [\Omega_{\alpha}(t' - t) + \theta] \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} + \{\omega - k_{\perp} v_{\perp} \cos [\Omega_{\alpha}(t' - t) + \theta]\} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

et la phase Φ par

$$\begin{aligned}
\Phi(t' - t) &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'(t') - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(t' - t) \\
&= \zeta \sin [\Omega_{\alpha}(t' - t) + \theta] - \zeta \sin \theta + (k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega)(t' - t).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

où $\zeta = k_{\perp} v_{\perp} / \Omega_{\alpha}$. Pour arriver à l'éq. (3.15) on a utilisé $v_y = -v_{\perp} \sin \theta$ ce qui suit entre autre de l'éq. (3.10).

L'évaluation de l'intégrale (3.12) est facilitée par deux astuces. Après avoir mis $\exp[-i\zeta \sin \theta]$ devant l'intégrale on peut remplacer dans $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned}
&\sin [\Omega_{\alpha}(t' - t) + \theta] \quad \text{par} \quad \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\
&\text{et} \\
&\cos [\Omega_{\alpha}(t' - t) + \theta] \quad \text{par} \quad \frac{1}{i\zeta} \frac{\partial}{\partial \theta},
\end{aligned}$$

ces opérateurs agissant sur l'exponentielle $\exp \{i\zeta \sin [\Omega_{\alpha}(t' - t) + \theta]\}$. Il suffit alors d'exploiter la deuxième astuce qui consiste à utiliser l'expression

$$\exp(i\zeta \sin \psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\zeta) \exp(in\psi) \tag{3.16}$$

pour cette même exponentielle. La relation (3.16) n'est rien d'autre que la définition des fonctions Bessel J_n par leur fonction génératrice (*Abramowitz + Stegun*, éq. 9.1.41).

L'intégrale dans (3.12) peut alors être évaluée avec le résultat

$$f_{\alpha 1}(\mathbf{v}) = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha} \omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\zeta \sin \theta + in\theta)}{n\Omega_{\alpha} + k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega} \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{E}_1, \tag{3.17}$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{A}_x &= \left[(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} \right] \frac{n}{i\zeta} J_n(\zeta), \\ \tilde{A}_y &= \left[(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} \right] J'_n(\zeta), \\ \tilde{A}_z &= \left[\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} n \Omega_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} + (\omega - n \Omega_{\alpha}) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} \right] \frac{1}{i} J_n(\zeta).\end{aligned}\quad (3.18)$$

où $J'_n = dJ_n/d\zeta$.

Le prochain pas vers le tenseur diélectrique est le calcul du courant, éq. (1.48) à partir de la fonction de distribution, éq. (3.12). De la loi d'Ohm $\mathbf{j}_1 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}_1$ on déduit alors

$$\boldsymbol{\sigma} = - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \epsilon_0}{\omega} \int d^3v \left[\mathbf{v} \exp(-i\zeta \sin \theta) \right] \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(in\theta)}{n\Omega_{\alpha} + k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega} \right] \tilde{\mathbf{A}} \quad (3.19)$$

Le caractère tensoriel de $\boldsymbol{\sigma}$ est donné par le produit dyadique $\mathbf{v}\tilde{\mathbf{A}}$. De (3.10) suit que $\mathbf{v} = (v_{\perp} \cos \theta, -v_{\perp} \sin \theta, v_{\parallel})$. Les fonctions $\sin \theta$ et $\cos \theta$ peuvent être produites par les opérations $\partial/\partial\zeta$ et $\partial/\partial\theta$ sur l'exponentielle $\exp(-i\zeta \sin \theta)$. Ensuite on utilise la relation (3.16) pour cette dernière. Comme $d^3v = v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\theta$ et

$$\int_0^{2\pi} \exp[i(n-m)\theta] d\theta = 2\pi \delta_{nm} \quad (3.20)$$

on trouve

$$\boldsymbol{\sigma} = i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \epsilon_0}{\omega} \int d^3v \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n\Omega_{\alpha} + k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega} \mathbf{v} \tilde{\mathbf{A}}, \quad (3.21)$$

où

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} i \frac{n\Omega_{\alpha}}{k_{\perp}} J_n(\zeta) \\ v_{\perp} J'_n(\zeta) \\ i v_{\parallel} J_n(\zeta) \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

L'expression (3.21) peut être mise sous forme symétrique en écrivant dans $\tilde{A}_x$ et $\tilde{A}_y$

$$\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} = (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega_{\alpha}) + n\Omega_{\alpha},$$

dans $\tilde{A}_z$

$$\omega - n\Omega_{\alpha} = (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega_{\alpha}) + k_{\parallel} v_{\parallel},$$

et en utilisant quelques propriétés des fonctions Bessel (voir *Abramowitz + Stegun*, éqs. 9.1.27 et 9.1.76) :

$$\begin{aligned} \frac{2n}{\zeta} J_n(\zeta) &= J_{n-1}(\zeta) + J_{n+1}(\zeta), \\ 2J_n(\zeta)' &= J_{n-1}(\zeta) - J_{n+1}(\zeta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_n(\zeta)]^2 &= 1, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [nJ_n(\zeta)]^2 &= \frac{1}{2}\zeta^2. \end{aligned} \tag{3.23}$$

En insérant le résultat directement dans le tenseur diélectrique, éq. (2.71), on trouve

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) &= \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \mathbf{I} + \\ &- \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3v \left(\frac{n\Omega_{\alpha}}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} \right) \frac{\mathbf{V}\mathbf{V}^{\dagger}}{n\Omega_{\alpha} + k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

où $\mathbf{V}^{\dagger}$ est le complexe conjugué et transposé de $\mathbf{V}$, éq. (3.22).

Le tenseur diélectrique serait donc une matrice hermitique si le dénominateur n'introduisait pas l'interaction avec les particules résonnantes. On remarque aussi qu'à haute fréquence le dernier terme se comporte comme ω^{-3} et devient négligeable comme il se doit.

La fonction diélectrique nécessaire pour la discussion des ondes électrostatiques s'obtient par projection du tenseur (3.24) sur $\mathbf{k}$, éq. (2.90). On aura donc au numérateur

$$|\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}|^2 = (n\Omega_{\alpha} + k_{\parallel} v_{\parallel})^2 J_n^2$$

qui se modifie en ajoutant $-\omega^2 + \omega^2$ à la parenthèse. Moyennant (3.23) et la trivialité

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n^2 = 0$$

on trouve

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3v \left(\frac{n\Omega_{\alpha}}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} \right) \frac{J_n^2(\zeta)}{n\Omega_{\alpha} + k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega}. \quad (3.25)$$

3.2 Fonction diélectrique dans un plasma maxwellien

Les plasmas sont rarement en équilibre thermodynamique et leurs distributions des vitesses ne sont pas forcément maxwelliennes. La fonction maxwellienne est toutefois une bonne approximation de la distribution véritable et nous permet de réduire les intégrales contenant des maxwelliennes à la fonction $W(z)$. Cela ne va pas nous empêcher d'étudier des situations hors équilibre thermodynamique si nécessaire.

Dès maintenant, on admet des températures anisotropes en définissant un coefficient d'anisotropie.

$$\tau_{\alpha} \equiv \frac{T_{\alpha\parallel}}{T_{\alpha\perp}} = \frac{v_{th\alpha\parallel}^2}{v_{th\alpha\perp}^2}. \quad (3.26)$$

La parenthèse de (3.25) devient

$$-\frac{1}{v_{th\alpha\parallel}^2} [(n\Omega_{\alpha} + k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) + \omega + (\tau_{\alpha} - 1)n\Omega_{\alpha}] f_{\alpha 0}.$$

Avec l'aide de

$$\int_0^{\infty} \exp[-a^2 x^2] x J_n(px) J_n(qx) dx = \frac{1}{2a^2} \exp\left[-\frac{p^2 + q^2}{4a^2}\right] I_n\left(\frac{pq}{2a^2}\right) \quad (3.27)$$

qui se trouve dans les tables de **I. S. Gradshteyn & I. M. Ryshik**, (*Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, 1965) on arrive à récrire l'éq. (3.25) sous la forme

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 v_{th\alpha}^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda_n(\beta_{\alpha}) \left\{ 1 + \frac{\omega + (\tau_{\alpha} - 1)n\Omega_{\alpha}}{\omega - n\Omega_{\alpha}} \left[W(z_n^{(\alpha)}) - 1 \right] \right\}. \quad (3.28)$$

Ici

$$\begin{aligned} \Lambda_n(\beta) &= e^{-\beta} I_n(\beta), \\ \beta_{\alpha} &= \frac{k_{\perp}^2 v_{th\alpha\perp}^2}{\Omega_{\alpha}^2} = k_{\perp}^2 \rho_{\alpha}^2, \end{aligned} \quad (3.29)$$

où $I_n(x)$ désigne la fonction de Bessel modifiée dont les propriétés se trouvent de nouveau dans *Abramowitz & Stegun* (A & S) et ρ_{α} est le rayon de Larmor moyen des particules α . L'argument de la fonction W est

$$z_n^{(\alpha)} = \frac{\omega - n\Omega_{\alpha}}{|k_{\parallel}| v_{th\alpha\parallel}}, \quad (3.30)$$

la valeur absolue provenant du fait que

$$\Im \frac{\omega - n\Omega_{\alpha}}{k_{\parallel} v_{th\alpha\parallel}}$$

est négative quand $k_{\parallel} < 0$; voir pour cela la discussion entre les équations (A7.7) et (A7.8).

La fonction $\Lambda_n(\beta)$ ($= \Lambda_{-n}(\beta)$) a les propriétés suivantes (pour $n \geq 0$) :

$$0 \leq \Lambda_n(\beta) \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq \infty, \quad (3.31)$$

$$\Lambda_n(\beta) \sim \left(\frac{\beta}{2} \right)^n \frac{1}{n!}, \quad \beta \ll 1, \quad (3.32)$$

$$\Lambda_n(\beta) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp\left(-\frac{n^2}{2\beta}\right), \quad \beta \gg 1, \quad (3.33)$$

qui sont utiles pour l'évaluation de la fonction et du tenseur diélectrique. L'éq. (3.33) est vraie en particulier aussi pour les harmoniques élevées ($n \gg 1$). Dans ce cas la fonction est maximale pour

$$\beta_{\alpha} \approx n^2 \quad \text{ou} \quad k_{\perp} \approx n|\Omega_{\alpha}|/v_{th\alpha\perp}, \quad (3.34)$$

la valeur maximale décroissant comme $1/|n|$.

Une limite importante dans (3.33) est le cas du champ magnétique faible ($B_0 \rightarrow 0$). On s'attend à ce que l'expression (3.28) tende vers l'éq.(2.103), la fonction diélectrique dans un plasma sans champ magnétique. Dans la limite $\Omega_\alpha \rightarrow 0$ la somme sur les harmoniques peut être remplacée par une intégrale :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\Omega_\alpha|}{k_\perp v_{th\alpha\perp}} F\left(\frac{n\Omega_\alpha}{k_\perp v_{th\alpha\perp}}\right) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dy F(y). \quad (3.35)$$

En insérant (3.33) et (3.35) dans (3.28) on trouve

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 v_{th\alpha\parallel}^2} (1 + \mathcal{Z}), \quad (3.36)$$

où

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\omega + (\tau_\alpha - 1)k_\perp v_{th\alpha\perp} y}{|k_\parallel| v_{th\alpha\parallel} x + k_\perp v_{th\alpha\perp} y - \omega} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right]. \quad (3.37)$$

En supposant la température isotrope $v_{th\alpha\parallel} = v_{th\alpha\perp} = v_{th\alpha}$, $\tau_\alpha = 1$ et le système de coordonnées aligné avec l'axe x ($k_\perp = 0$, $|k_\parallel| = k$) on trouve

$$\mathcal{Z} = W\left(\frac{\omega}{k v_{th\alpha}}\right) - 1,$$

ce qui, dans (3.36), reproduit la fonction diélectrique du plasma sans champ magnétique.

Ayant obtenu la limite cherchée, on peut maintenant commencer à l'évaluer dans différents domaines de paramètres et chercher à résoudre la relation de dispersion $\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$ des ondes électrostatiques.

3.3 Ondes électrostatiques

L'onde de Langmuir magnétisée

Voilà l'application la plus simple. Supposons un plasma fortement magnétisé ($|\Omega_e| \gg \omega_{pe}$) que l'on trouve par exemple dans un tokamak à faible densité. A densité normale, on aurait $|\Omega_e| \sim \omega_{pe}$. Comme l'onde de Langmuir a une fréquence de l'ordre de ω_{pe} on pourra négliger ω devant Ω_e en évaluant (3.28). La contribution

des ions sera négligée aussi, ce qui nous permet d'omettre les indices e désignant les électrons.

Notez aussi que

$$1 \ll z_0 = \frac{\omega}{|k_{\parallel}|v_{th\parallel}} \ll \left| \frac{\omega - n\Omega}{k_{\parallel}v_{th\parallel}} \right| = |z_n|$$

permettant de négliger tous les $W(z_n)$ sauf $W(z_0)$. Ainsi on arrive à récrire l'éq. (3.28) comme

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th\parallel}^2} \left\{ \Lambda_0(\beta) [W(z_0) - \tau] + \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda_n(\beta) \right\}. \quad (3.38)$$

D'après la relation A&S (9.6.33) (Abramowitz & Stegun)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda_n(\beta) = 1. \quad (3.39)$$

Moyennant la série asymptotique pour W , éq. (2.116), on trouve pour la partie réelle de la fonction diélectrique (approx. résonnante !)

$$\Re \epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th\parallel}^2} \left\{ \tau [1 - \Lambda_0(\beta)] - \frac{k_{\parallel}^2 v_{th\parallel}^2}{\omega^2} \Lambda_0(\beta) \right\} \quad (3.40)$$

ce qui mène à la relation de dispersion

$$\frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{k_{\parallel}^2 v_{th\parallel}^2} = \Lambda_0(\beta) \left\{ \tau [1 - \Lambda_0(\beta)] + \frac{k_{\parallel}^2 v_{th\parallel}^2}{\omega_p^2} \right\}^{-1}. \quad (3.41)$$

La quantité à gauche du signe doit être grande pour rendre l'amortissement petit. Comme $\Lambda_0(\beta)$ est de l'ordre de 1 ou plus petit le dénominateur doit être petit. Si $\tau \sim 1$ il faut séparément $\beta \ll 1$ et $k^2 v_{th\parallel}^2 / \omega_p^2 \ll 1$ ce qu'on satisfait en supposant $k^2 (v_{th\parallel}^2 + v_{th\perp}^2) / \omega_p^2 \ll 1$. En termes plus simples : on doit demander des longueurs d'ondes grandes comme pour le plasma sans champ magnétique. A l'ordre le plus bas on trouve

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \omega_{pe}^2, \quad (3.42)$$

une relation de dispersion qui ne dépend pas de la température. Elle aurait donc pu être obtenue de la théorie du plasma froid. La même relation de dispersion s'obtient sous la condition $\tau \gg 1$ et $k^2 v_{th\parallel}^2 / \omega_{pe}^2 \ll 1$.

L'amortissement de l'onde se calcule moyennant l'approximation résonnante, éq. (2.18). La partie réelle de la fonction diélectrique correspondant à la relation de dispersion, éq. (3.42) devient

$$\Re \epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad (3.43)$$

d'où

$$\Re \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} \Big|_{\omega_{\mathbf{k}}} = \frac{2}{\omega_{\mathbf{k}}}. \quad (3.44)$$

Ecrivant

$$\Im \epsilon(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(\mathbf{k}, \omega) \quad (3.45)$$

pour la partie imaginaire de l'éq. (3.28), on a

$$g_n(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 |k_{\parallel}| v_{th\parallel}^3} \Lambda_n(\beta) [\omega + (\tau - 1)n\Omega] \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}z_n^2\right). \quad (3.46)$$

L'amortissement dû à l'interaction Čerenkov ($n = 0$) devient

$$\frac{\gamma_{\mathbf{k}}^{(0)}}{|\omega_{\mathbf{k}}|} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{\omega_{pe}}{kv_{th\parallel}}\right)^3 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_{pe}}{kv_{th\parallel}}\right)^2\right]. \quad (3.47)$$

L'équation (3.47) montre qu'à l'instar du cas non-magnétisé, seulement des ondes de grande longueur d'onde peuvent exister.

D'habitude, les interactions Doppler ($n = \pm 1$) son négligeables par rapport à l'interaction Čerenkov dans le cas de l'onde plasma fortement magnétisée. Vu que $|\omega_{\mathbf{k}}| \ll |\Omega|$ et $1 \ll |z_0| \ll |z_n|$ les g_n , $|n| > 0$, sont exponentiellement petits devant g_0 . En effet,

$$g_{\pm 1}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 |k_{\parallel}| v_{th\parallel}^3} \frac{k_{\perp}^2 v_{th\perp}^2}{2\Omega^2} [\pm(\tau - 1)\Omega] \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}z_{\pm 1}^2\right], \quad (3.48)$$

où l'éq. (3.32) et $|\omega_{\mathbf{k}}| \ll |\Omega|$ ont été utilisés. L'éq. (3.48) montre que les interactions Doppler pourraient éventuellement devenir importantes si $\tau \gg 1$ (g_0 ne dépend pas de τ !), c'est-à-dire si $T_{\parallel} \gg T_{\perp}$. Le terme au signe + est déstabilisant comme

$\Omega < 0$; dans le cas maxwellien qu'on est en train de discuter il est pourtant dominé par le terme stabilisant parce que $|z_{-1}| < |z_{+1}|$.

L'instabilité due à l'interaction Doppler "anormale" ($n = 1$) a joué un rôle très méchant dans les tokamaks du début des années 1970. Elle était à l'origine des trous dans l'enceinte de vide du tokamak français TFR. Pour comprendre tout cela il nous faut faire une dégression pour parler des collisions coulombiennes, voir l'Appendice 4.

L'instabilité de l'éventail

La fonction de distribution électronique dans une décharge tokamak du type "runaway" a la forme de la Fig. 3.1. La densité dans une telle décharge est faible dans le sens utilisé pour la dérivation de l'onde plasma magnétisée, $\omega_{pe} \ll |\Omega_e|$, dont la relation de dispersion, éq. (3.42) reste inchangée aussi longtemps que la queue n'est pas trop importante. Cependant l'interaction résonnante est fortement influencée par la présence de la queue.

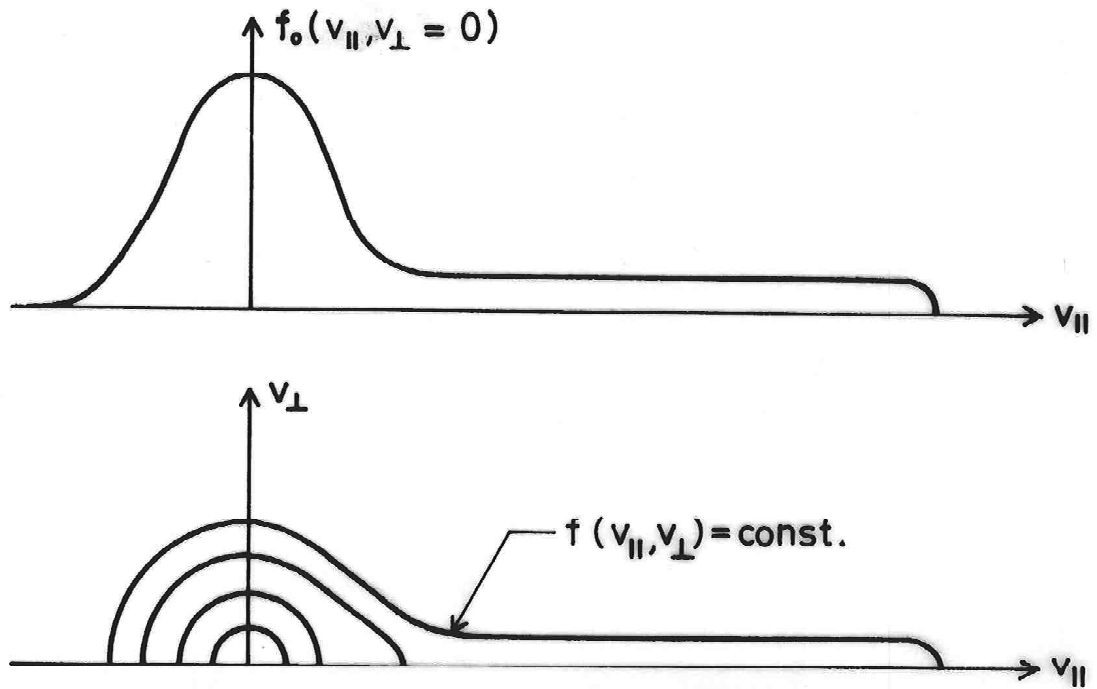


Figure 3.1 Fonction de distribution électronique du type "runaway".

La partie imaginaire de ϵ peut être directement obtenue de l'éq. (3.25) moyennant l'approximation

$$\frac{1}{n\Omega_{\alpha} + k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega} \approx \mathcal{P} \frac{1}{n\Omega_{\alpha} + k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega} + i\pi\delta(n\Omega_{\alpha} + k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega). \quad (3.49)$$

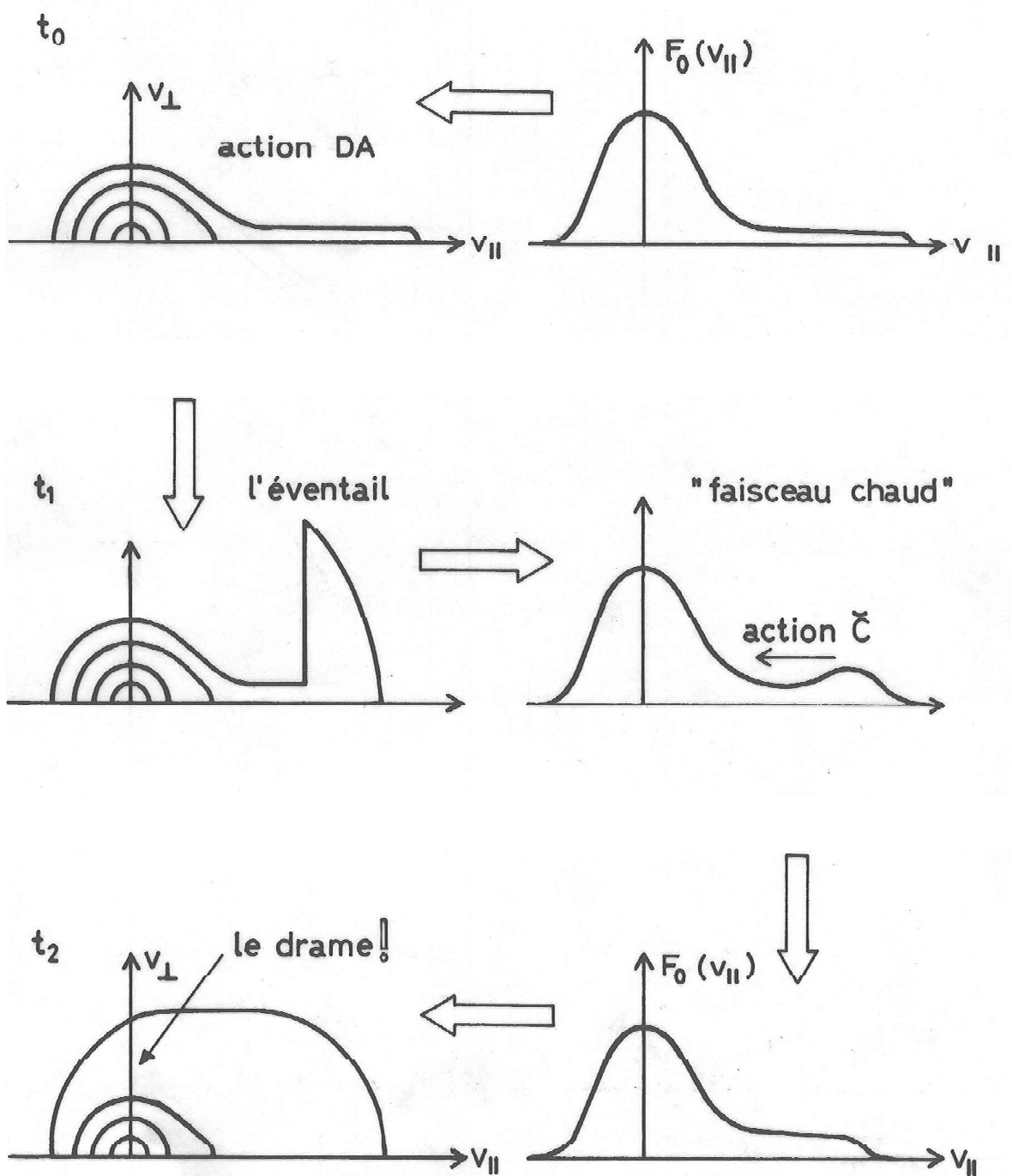


Figure 3.2 L'évolution quasilinéaire de l'instabilité de l'éventail. Les grandes flèches montrent le chemin logique menant d'une distribution d'électrons "runaway" à l'apparition de particules de grande vitesse perpendiculaire. La vitesse v^* est la limite de la première instabilité : pour $v_D > v^*$ l'interaction Doppler anormale (DA) domine sur l'interaction Čerenkov (Č).

En utilisant de nouveau la notation de l'éq. (3.45) on a

$$g_n(\mathbf{k}, \omega) = -\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 |k_{\parallel}|} \int d^3v \left[\frac{n\Omega}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} \right] J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) \delta \left(v_{\parallel} - \frac{\omega - n\Omega}{k_{\parallel}} \right). \quad (3.50)$$

Le phénomène de l'instabilité de l'éventail fait intervenir les deux résonances $n=0$ et $n=1$ aux vitesses $v_{\parallel} = v_C \equiv \omega/k_{\parallel}$ (Čerenkov) et $v_{\parallel} \approx v_D \equiv |\Omega|/k_{\parallel}$ (Doppler anormale).

Une onde qui a son interaction Čerenkov suffisamment loin du "bulk" n'est que très faiblement amortie ($\partial f_{e0}/\partial v_{\parallel} \approx 0$). Elle peut être rendue instable par l'interaction Doppler anormale entre l'onde et des particules de la queue. Formellement, on trouve :

$$g_0(\mathbf{k}, \omega) = -\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \text{sign}(k_{\parallel}) \left. \frac{\partial F_{e0}}{\partial v_{\parallel}} \right|_{v_{\parallel}=\omega_{\mathbf{k}}/k_{\parallel}}, \quad (3.51)$$

$$g_1(\mathbf{k}, \omega) = -\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{k_{\perp}}{|k_{\parallel}|} \frac{k_{\perp}}{2|\Omega|} F_{e0} \left(\frac{|\Omega|}{k_{\parallel}} \right), \quad (3.52)$$

où

$$F_{e0}(v_{\parallel}) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} v_{\perp} dv_{\perp} f_{e0}(\mathbf{v}). \quad (3.53)$$

On peut montrer que les particules subissant l'interaction Doppler anormale ne perdent que peu d'énergie dans celle-ci mais sont diffusées en angle (pitch-angle scattering) et forment un éventail dans l'espace des vitesses (Fig. 3.2) avant d'être ramenées vers le "bulk" par l'instabilité du faisceau chaud (Fig. 2.5). De cette manière apparaissent des particules de très haute vitesse perpendiculaire. Dans le tokamak TFR ces particules ont été piégées dans des miroirs magnétiques locaux (field ripples) et ont dérivé vers des points bien définis de l'enceinte où elles ont provoqué des trous.

Ondes de Bernstein

Les effets thermiques dans un plasma permettent l'existence d'ondes à des fréquences proches des harmoniques des fréquences cyclotroniques électroniques et ioniques. Ces ondes portent le nom de celui qui les a découvertes, Ira Bernstein. Ici, on ne discute que les ondes de Bernstein électroniques auxquelles la contribution des ions est négligeable. Supposant la température isotrope, la fonction diélectrique, éq. (3.28), se présente moyennant l'éq. (3.39) comme

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{1}{k^2 \lambda_d^2} \left\{ 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda_n(\beta) \frac{\omega}{\omega - n\Omega} [W(z_n) - 1] \right\}. \quad (3.54)$$

Tous les termes dans la somme sauf le terme $n = 0$ disparaissent quand la température tend vers zéro. Si on trouve une solution, $\omega = \omega_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}}$, de $\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$ aux alentours de $m\Omega$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, l'onde décrite par celle-ci dépendra obligatoirement de la température ; à vrai dire, son existence même sera due à la température.

Formalisant maintenant la recherche de ces ondes nouvelles, on pose

$$\omega_{\mathbf{k}} = m\Omega + \delta\omega_{\mathbf{k}}, \quad (3.55)$$

avec

$$|\Omega| \gg |\delta\omega_{\mathbf{k}}| \gg |k_{\parallel} v_{the}|. \quad (3.56)$$

Avec cette approximation on montre que seul les termes $n = 0$ et $n = m$ sont à retenir dans l'éq. (3.54) :

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) = & 1 + \frac{1}{k^2 \lambda_d^2} [1 - \Lambda_0(\beta)] + \\ & - \frac{1}{k^2 \lambda_d^2} \Lambda_m(\beta) \frac{\omega}{\omega - m\Omega} \left[1 - i\sqrt{\frac{\pi}{2}} z_m \exp\left(-\frac{1}{2} z_m^2\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

L'approximation résonnante fournit

$$\frac{\delta\omega_{\mathbf{k}}}{m\Omega} = \frac{\Lambda_m(\beta)}{1 + k^2 \lambda_d^2 - \Lambda_0(\beta)}, \quad (3.58)$$

$$\frac{\gamma_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{m\Omega}{|k_{\parallel}| v_{the}} \left(\frac{\delta\omega_{\mathbf{k}}}{m\Omega} \right)^2 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\delta\omega_{\mathbf{k}}}{k_{\parallel} v_{the}} \right)^2 \right], \quad (3.59)$$

où

$$\left. \frac{\partial \Re \epsilon}{\partial \omega} \right|_{\omega_{\mathbf{k}}} = \frac{\Lambda_m(\beta)}{k^2 \lambda_d^2} \frac{m\Omega}{(\delta\omega_{\mathbf{k}})^2} \quad (3.60)$$

a été utilisé.

La première partie de l'éq. (3.56) exige que l'expression dans l'éq. (3.58) soit $\ll 1$. Il y a deux manières de satisfaire ceci : Soit $\beta \ll 1$, soit $k^2 \lambda_d^2 \gg 1$. Dans les deux cas il s'agit de l'onde de Bernstein électronique. Discutons le deuxième.

Pour satisfaire la deuxième partie de l'éq. (3.56) $k_{\parallel}$ ne devrait pas être trop grand ce qui est le cas si $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$; on le prouvera à posteriori. Aussi on estime

$$k^2 \lambda_d^2 \approx k_{\perp}^2 v_{the}^2 / \omega_{pe}^2 = \beta \Omega^2 / \omega_{pe}^2 \quad (3.61)$$

et

$$\left| \frac{\delta \omega_{\mathbf{k}}}{m \Omega} \right| \approx \frac{\Lambda_m(\beta)}{\beta} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega^2} \lesssim \frac{1}{m^3} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega^2}. \quad (3.62)$$

Pour la deuxième partie de l'éq. (3.62) la valeur maximale de Λ_m a été utilisée, éq. (3.34). Pour les harmoniques basses on doit exiger $\omega_{pe}^2 \ll \Omega^2$, c'est-à-dire une basse densité (ou $\beta \ll 1$!).

L'amortissement de l'onde est faible si $|z_m| \gg 1$, éq. (3.59) :

$$|z_m| = \left| \frac{\delta \omega_{\mathbf{k}}}{k_{\parallel} v_{the}} \right| \approx \left| \frac{m \Omega}{k_{\parallel} v_{the}} \frac{\Lambda_m(\beta)}{\beta} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega^2} \right| \approx \left| m \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \frac{\Lambda_m(\beta)}{\beta^{3/2}} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega^2} \right| \gg 1, \quad (3.63)$$

ce qui montre qu'effectivement ces ondes propagent quasi-perpendiculairement au champ magnétique seulement.

3.4 Tenseur diélectrique dans un plasma maxwellien

En évaluant les dérivées dans l'éq. (3.24) pour une distribution maxwellienne anisotrope du type (1.76) on trouve

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) = & \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \mathbf{I} + \\ & - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 v_{th\alpha}^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3v \frac{n \Omega_{\alpha} \tau_{\alpha} + k_{\parallel} v_{\parallel}}{n \Omega_{\alpha} + k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega} f_{\alpha 0}(v_{\perp}, v_{\parallel}) \mathbf{V} \mathbf{V}^{\dagger}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Dans cette expression, il y a trois intégrales différentes du type (3.27) à évaluer :

$$\mathcal{L}_1 = \int_0^\infty v_\perp^1 J_n^2 \left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{v_\perp^2}{v_{th\alpha\perp}^2} \right) dv_\perp, \quad (3.65)$$

$$\mathcal{L}_2 = \int_0^\infty v_\perp^2 J_n \left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha} \right) J'_n \left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{v_\perp^2}{v_{th\alpha\perp}^2} \right) dv_\perp, \quad (3.66)$$

$$\mathcal{L}_3 = \int_0^\infty v_\perp^3 \left[J'_n \left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha} \right) \right]^2 \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{v_\perp^2}{v_{th\alpha\perp}^2} \right) dv_\perp, \quad (3.67)$$

Les intégrales (3.66) et (3.67) peuvent être produites avec l'éq. (3.27) en utilisant les dérivées $\partial/\partial p$ et $\partial^2/\partial p \partial q$.

La deuxième dérivée de $I_n(\beta)$ ainsi produite s'exprime en terme de I_n et I'_n à l'aide de l'équation différentielle de la fonction de Bessel modifiée, A&S, éq. (9.6.1),

$$\beta^2 I_n'' + \beta I_n' - (\beta^2 + n^2) I_n = 0. \quad (3.68)$$

Après un peu d'algèbre, on trouve

$$\mathcal{L}_1 = \frac{\Omega_\alpha^2}{k_\perp^2} \beta_\alpha \Lambda_n(\beta_\alpha), \quad (3.69)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{\Omega_\alpha^3}{k_\perp^3} \beta_\alpha^2 \Lambda'_n(\beta_\alpha) \quad (3.70)$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{\Omega_\alpha^4}{k_\perp^4} [n^2 \beta_\alpha \Lambda_n(\beta_\alpha) - 2 \beta_\alpha^3 \Lambda'_n(\beta_\alpha)]. \quad (3.71)$$

Ceci peut être inséré dans l'éq. (3.64) où les intégrales $\int dv_\parallel$ restent à faire. Il y en a de nouveau trois types,

$$\mathcal{Q}_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{dv_\parallel}{v_{th\alpha\parallel}} \frac{n\Omega_\alpha \tau_\alpha + k_\parallel v_\parallel}{n\Omega_\alpha + k_\parallel v_\parallel - \omega} \left(\frac{v_\parallel}{v_{th\alpha\parallel}} \right)^l \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{v_\parallel^2}{v_{th\alpha\parallel}^2} \right), \quad l = 0, 1, 2, \quad (3.72)$$

pour lesquels on trouve

$$\mathcal{Q}_1 = 1 + [(z_0^{(\alpha)} - z_n^{(\alpha)})\tau_\alpha + z_n^{(\alpha)}] \frac{1}{z_n^{(\alpha)}} [W(z_n^{(\alpha)}) - 1], \quad (3.73)$$

$$\mathcal{Q}_2 = [(z_0^{(\alpha)} - z_n^{(\alpha)})\tau_\alpha + z_n^{(\alpha)}] W(z_n^{(\alpha)}), \quad (3.74)$$

$$\mathcal{Q}_3 = 1 + [(z_0^{(\alpha)} - z_n^{(\alpha)})\tau_\alpha + z_n^{(\alpha)}] z_n^{(\alpha)} W(z_n^{(\alpha)}). \quad (3.75)$$

Après un dernier effort en algèbre, on a

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{I} + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} [z_0^{(\alpha)}]^2 \tau_\alpha \mathbf{e}_z : \mathbf{e}_z + \\ \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{z_0^{(\alpha)}}{z_n^{(\alpha)}} [W(z_n^{(\alpha)}) - 1] + \left(\frac{1}{\tau_\alpha} - 1 \right) W(z_n^{(\alpha)}) \right\} \mathbf{\Pi}(\beta_\alpha, \tilde{z}_n^{(\alpha)}; n) \end{aligned} \quad (3.76)$$

où

$$\mathbf{\Pi}(\beta, \tilde{z}_n; n) = \begin{pmatrix} \frac{n^2}{\beta} \Lambda_n(\beta) & in\Lambda'_n(\beta) & \frac{n\tilde{z}_n}{\sqrt{\beta}} \Lambda_n(\beta) \\ -in\Lambda'_n(\beta) & \frac{n^2}{\beta} \Lambda_n(\beta) - 2\beta\Lambda'_n(\beta) & -i\sqrt{\beta}\tilde{z}_n\Lambda'_n(\beta) \\ \frac{n\tilde{z}_n}{\sqrt{\beta}} \Lambda_n(\beta) & i\sqrt{\beta}\tilde{z}_n\Lambda'_n(\beta) & (\tilde{z}_n)^2 \Lambda_n(\beta) \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

et

$$\tilde{z}_n^{(\alpha)} = \frac{\omega - n\Omega_\alpha}{k_{\parallel} v_{th\alpha\perp}} \text{sign}(q_\alpha). \quad (3.78)$$

Ce tenseur diélectrique est suffisamment compliqué pour qu'on évite de l'utiliser autant que possible. Les deux composantes de $\mathbf{k}$, $k_{\parallel}$ et $k_{\perp}$, interviennent d'une manière asymétrique et sont toujours associées à des températures : le tenseur du plasma froid ne contient aucun k ! Divers modèles fluides sont obtenus en développant le tenseur en puissances de $k_{\parallel}$ et $k_{\perp}$ (ou en $v_{th\alpha\parallel}$ et $v_{th\alpha\perp}$). Il est aussi possible de ne développer qu'en puissance de $k_{\perp}$ en gardant les effets cinétiques dus aux dénominateurs résonnants. En fait, c'est même une bonne approximation très souvent applicable. Lorsque l'argument β_α des fonctions Bessel est grand on obtient en général une meilleure description en considérant cette composante α du plasma comme démagnétisé.

Pour des raisons de temps, il n'est pas possible de discuter dans ce cours les différents modèles avec leurs avantages et inconvénients. Nous allons toutefois dériver les relations de dispersion de quelques ondes. Aux exercices on montrera que le tenseur du plasma froid peut être obtenu de l'éq. (3.76) dans la limite

$$v_{th\alpha\parallel} = v_{th\alpha\perp} \rightarrow 0.$$

La forme (3.76) à (3.78) du tenseur diélectrique est due à O. Sauter. On remarque que les éléments Π_{xz} et Π_{yz} dépendent du signe de la charge q_α à travers la quantité $\tilde{z}_n^{(\alpha)}$. Dans la forme donnée par Ichimaru, éq.(5.21) dans son livre, cette dépendance est cachée d'une façon imprudente dans l'expression

$$\sqrt{\beta_\alpha} = k_\perp \rho_\alpha = k_\perp v_{th\alpha} / \Omega_\alpha.$$

La dépendance du signe de $k_\parallel$, explicite dans Ichimaru, est absorbée ici par la définition de la quantité $\tilde{z}_n^{(\alpha)}$, éq.(3.78).

Dans une situation réelle on aimerait parfois connaître la forme du tenseur diélectrique pour une direction de propagation quelconque par rapport au système de coordonnées (p.ex. dans un plasma qui est inhomogène perpendiculairement au champ magnétique). En remplaçant l'éq. (3.13) par

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_\parallel) \quad (3.79)$$

et en définissant $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ et β_α , éq. (3.29), avec le nouveau $k_\perp$, on peut écrire le tenseur $\mathbf{\Pi}$ sous la forme

$$\mathbf{\Pi}(\beta, \rho, \tilde{z}_n; k_x, k_y; n) = \begin{pmatrix} \frac{n^2}{\beta} \Lambda_n - 2k_y^2 \rho^2 \Lambda'_n & (in + 2k_x k_y \rho^2) \Lambda'_n & \tilde{z}_n \left(\frac{k_x \rho}{\beta} n \Lambda_n + i k_y \rho \Lambda'_n \right) \\ \Pi_{xy}^* & \frac{n^2}{\beta} \Lambda_n - 2k_x^2 \rho^2 \Lambda'_n & \tilde{z}_n \left(-i k_x \rho \Lambda'_n + \frac{k_y \rho}{\beta} n \Lambda_n \right) \\ \Pi_{xz}^* & \Pi_{yz}^* & (\tilde{z}_n)^2 \Lambda_n \end{pmatrix}, \quad (3.80)$$

où l'étoile signifie le complexe conjugué. Cette forme-ci est aussi due à O. Sauter.

3.5 Propagation parallèle

Le tenseur diélectrique, éq. (3.76), se simplifie considérablement pour les cas spéciaux de propagation parallèle et perpendiculaire au champ magnétique $\mathbf{B}_0$. Le premier cas est caractérisé par $k_{\parallel} \neq 0$ et $k_{\perp} = 0$ ce qui entraîne $\beta_{\alpha} = 0$. Comme $\Lambda_n(\beta) \sim \beta^n$ pour $\beta \rightarrow 0$ les seuls termes dans $\mathbf{\Pi}(\beta, \tau, z_n; n)$ qui survivent sont

$$\left. \begin{aligned} \frac{n^2}{\beta\tau} \Lambda_n(\beta) &\longrightarrow \frac{1}{2\tau} \delta_{n \pm 1}, \\ \frac{in}{\tau} \Lambda'_n(\beta) &\longrightarrow \frac{in}{2\tau} \delta_{n \pm 1}, \\ z_n^2 \Lambda_n(\beta) &\longrightarrow \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{th\parallel}^2} \delta_{n0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.81)$$

Les seules composantes non-nulles du tenseur sont $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy}$, $\epsilon_{yx} = -\epsilon_{xy}$ et ϵ_{zz} :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \frac{1}{2} \left\{ \frac{z_0^{(\alpha)}}{z_1^{(\alpha)}} \left[W(z_1^{(\alpha)}) - 1 \right] + \frac{z_0^{(\alpha)}}{z_{-1}^{(\alpha)}} \left[W(z_{-1}^{(\alpha)}) - 1 \right] \right\}, \\ \epsilon_{xy} &= \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \frac{i}{2} \left\{ \frac{z_0^{(\alpha)}}{z_1^{(\alpha)}} \left[W(z_1^{(\alpha)}) - 1 \right] - \frac{z_0^{(\alpha)}}{z_{-1}^{(\alpha)}} \left[W(z_{-1}^{(\alpha)}) - 1 \right] \right\}, \\ \epsilon_{zz} &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{k_{\alpha}^2}{k^2} W(z_0^{(\alpha)}). \end{aligned} \right\} \quad (3.82)$$

Ici, la température a été supposée isotrope ($\tau_{\alpha} = 1$) et la définition (2.105) a été utilisée dans l'expression pour ϵ_{zz} . La relation de dispersion complète, éq. (2.81), incluant les ondes électrostatiques et électromagnétiques, prend donc la même structure que pour un plasma froid,

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} - N^2 & \epsilon_{xy} & 0 \\ -\epsilon_{xy} & \epsilon_{xx} - N^2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (3.83)$$

L'indice de réfraction N est défini comme

$$N = \frac{ck}{\omega}; \quad (3.84)$$

son apparition dans les composantes xx et yy seulement est particulière à la propagation parallèle, voir éq. (2.79).

Les ondes transversales ($\mathbf{E}$ dans le plan $x - y$) sont découplées de l'onde longitudinale ($\mathbf{E}$ en direction z). La relation de dispersion de cette dernière,

$$\epsilon_{zz} = 0, \quad (3.85)$$

n'est pas affectée par le champ magnétique et identique à la relation (2.100) décrivant les ondes électrostatiques dans un plasma non-magnétisé. La partie électromagnétique de (3.83) a la forme d'un problème à valeur propre qui se résout facilement

$$N^2 = \epsilon_{xx} \pm i\epsilon_{xy}. \quad (3.86)$$

La solution avec le signe $+$ exige que $E_x = -iE_y$ ce qui décrit une onde de polarisation circulaire droite. L'autre signe mène à une onde de polarisation gauche pour laquelle $E_x = iE_y$. Il est commode de définir les fonctions diélectriques "droite" et "gauche" par

$$\epsilon_R = \epsilon_{xx} + i\epsilon_{xy} = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \frac{z_0^{(\alpha)}}{z_{-1}^{(\alpha)}} \left[W\left(z_{-1}^{(\alpha)}\right) - 1 \right], \quad (3.87)$$

$$\epsilon_L = \epsilon_{xx} - i\epsilon_{xy} = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \frac{z_0^{(\alpha)}}{z_1^{(\alpha)}} \left[W\left(z_1^{(\alpha)}\right) - 1 \right], \quad (3.88)$$

de telle sorte que les relations de dispersion des deux modes sont maintenant

$$\left. \begin{aligned} N^2 &= \epsilon_R, \\ N^2 &= \epsilon_L, \end{aligned} \right\} \quad (3.89)$$

au lieu de l'éq. (3.86).

La limite du plasma froid s'obtient de (3.87) et (3.88) en observant que $W\left(z_{\pm 1}^{(\alpha)}\right) = 0$ dans ce cas,

$$\epsilon_R = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega + \Omega_{\alpha})}, \quad (3.90)$$

$$\epsilon_L = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega - \Omega_{\alpha})}. \quad (3.91)$$

Avant d'étudier quelques domaines de fréquences particuliers, il est bon de rappeler les relations de dispersion des ondes froides.

Dans un plasma à deux composantes, des électrons et des ions d'une seule espèce, l'onde droite a une résonance ($k \rightarrow \infty$) à $\omega = |\Omega_e|$ (le champ tourne dans la même direction que les électrons !) et une coupure ($k = 0$) à

$$\omega_{cR} = \frac{1}{2} \left[|\Omega_e| - \Omega_i + \sqrt{(|\Omega_e| + \Omega_i)^2 + 4(\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2)} \right]. \quad (3.92)$$

Notez que $\omega_{cR} > |\Omega_e|$. A très haute fréquence ($\omega \gg |\Omega_e|, \omega_{pe}$) l'onde se comporte comme une onde électromagnétique dans le vide, $\omega = kc$, tandis qu'à basse fréquence la vitesse de phase est donnée par la vitesse d'Alfvén

$$c_A^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 n_i m_i}, \quad (3.93)$$

si $c_A \ll c$, ce qui est normalement le cas dans un tokamak,

$$\frac{c_A^2}{c^2} = \frac{\Omega_i^2}{\omega_{pi}^2} = \frac{\Omega_e^2}{\omega_{pe}^2} \frac{m_e}{m_i}, \quad (3.94)$$

où $\omega_{pe} \sim |\Omega_e|$.

Ayant noté ces propriétés du mode de polarisation droite, on peut tracer qualitativement sa relation de dispersion, Fig. 3.3. A basse fréquence, ce mode porte différents noms selon la communauté : magnétosonique rapide (MS), magnétoacoustique rapide, Alfvén compressionnel, Alfvén rapide ou même rapide tout court. Le nom causant le moins de malentendu est "onde magnétosonique (ou acoustique) rapide". L'attribut "rapide" est nécessaire quand on parle avec des gens de la MHD qui appellent l'onde acoustique ionique "l'onde magnétosonique lente". Aux fréquences moyennes le même mode s'appelle "siffleur" (Whistler W) parce qu'il est à l'origine de certains signaux ionosphériques en audio-fréquence qui rappellent des coups de sifflet. Sa relation de dispersion simplifiée par la restriction $\Omega_i \ll \omega \ll |\Omega_e|$ est

$$\omega_k = \frac{k^2 c^2}{\omega_{pe}^2} |\Omega_e|. \quad (3.95)$$

Ce mode est fortement dispersé : les hautes fréquences propagent plus rapidement que les basses fréquences. Un éclair sur l'hémisphère Sud de la terre peut exciter ce mode dans une large bande de fréquences. Le pulse qui propage le long des lignes du champ magnétique terrestre vers l'hémisphère Nord se disperse, les hautes fréquences arrivant les premières produisant ainsi le coup de sifflet. A haute fréquence, le mode n'a pas de nom particulier.

Le mode de polarisation gauche a sa résonance à Ω_i et sa coupure à

$$\omega_{cL} = \frac{1}{2} \left[-|\Omega_e| + \Omega_i + \sqrt{(|\Omega_e| + \Omega_i)^2 + 4(\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2)} \right] \quad (3.96)$$

au-dessus de $|\Omega_e|$ à haute densité ($\omega_{pe}^2 \gtrsim 2\Omega_e^2$) et entre Ω_i et $|\Omega_e|$ dans le cas contraire. La relation de dispersion de ce mode est tracée qualitativement dans la Fig. 3.3. A basse fréquence ($\omega < \Omega_i$) le mode s'appelle onde Alfvén (MHD), onde Alfvén torsionnelle ou lente (chauffage HF) ou même "onde lente" tout court. Sa vitesse de phase est égale à la vitesse Alfvén dans la limite $k \rightarrow 0$. A très haute fréquence ($\omega \gg |\Omega_e|, \omega_{pe}$) sa vitesse de s'approche de la vitesse de la lumière.

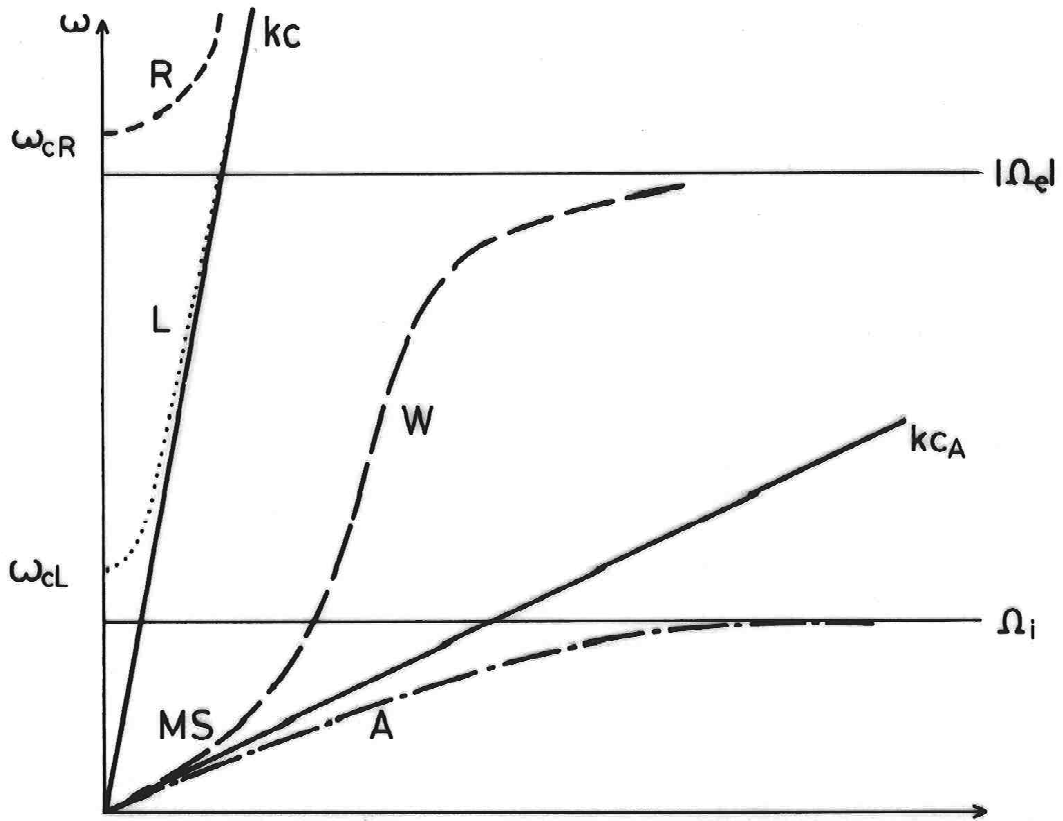


Figure 3.3 Relation de dispersion qualitative pour les modes électromagnétiques propagant parallèlement au champ magnétique. La position de la coupure du mode de polarisation gauche au-dessous de $|\Omega_e|$ est correcte si la densité est basse à modérée ($\omega_{pe}^2 \lesssim 2\Omega_e^2$).

Quelles sont les modifications apportées à cette image par la théorie cinétique ?

D'abord, résultat théorique important, les résonances à Ω_e et Ω_i sont inatteignables parce que les termes les contenant, éqs.(3.87) et (3.88), sont purement imaginaires.

Rien ne devient jamais infini dans la nature et on a dû développer la théorie cinétique pour le prouver formellement dans le cas de ces résonances.

Ensuite, on peut évidemment estimer l'amortissement subit par les différents modes de la Fig. 3.3. A très basse fréquence

$$\Re \epsilon_R = \Re \epsilon_L = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2}$$

et donc

$$\frac{\partial \Re \Delta}{\partial \omega} = 2 \frac{k^2 c^2}{\omega^3}$$

pour les deux polarisations. Comme les parties imaginaires sont égales aussi, les amortissements subis par les ondes magnétosoniques rapides et les ondes Alfvén lentes sont identiques à basse fréquence

$$\frac{\gamma_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 c^2} \frac{\omega}{kv_{thi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_i}{kv_{thi}} \right)^2 \right]. \quad (3.97)$$

Dans un tokamak de la taille de TCA ("tokamak à chauffage Alfvén") on a $v_{the} = c_A$ quelque part à mi-chemin entre le bord et le centre du plasma. Avec l'inégalité

$$\frac{\Omega_i}{kv_{thi}} \gg \frac{\omega}{kv_{thi}} = \frac{c_A}{v_{thi}} \gg \frac{c_A}{v_{the}} \sim 1$$

on déduit que les ondes de basse fréquence ne sont pas amorties dans un tel plasma.

Une manière d'utiliser les ondes Alfvén lentes pour chauffer des ions est de les faire échouer sur une "plage magnétique" (magnetic beach) : Des ondes Alfvén propageant le long d'un champ magnétique faiblissant s'approchent de l'endroit où $\omega = \Omega_i$ et y sont absorbées.

Dans le cas du mode siffleur, $\Omega_i \ll \omega \ll |\Omega_e|$ on trouve une dépendance exponentielle du type

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_e}{kv_{the}} \right)^2 \right]$$

qui montre que l'amortissement est faible sauf dans le cas de longueurs d'ondes très petites de l'ordre du rayon de Larmor des électrons.

Comme pour l'onde d'Alfvén on peut faire échouer le mode siffleur (ou plutôt l'onde "cyclotronique électronique") sur la plage magnétique qui se trouve à $|\Omega_e|$ cette fois-ci. C'est une méthode de production du plasma souvent utilisée.

Pour que l'absorption dans la région $|\Omega_e|$ soit grande, il faut pourtant que

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \gtrsim \frac{v_{the}}{c} \quad (3.98)$$

comme on trouve en analysant la relation de dispersion qui découle de (3.87) dans la limite $\omega \rightarrow |\Omega_e|$

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} \approx 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \frac{\omega}{k v_{the}} \approx 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \frac{c}{v_{the}}. \quad (3.99)$$

Selon le théorème de dissipation - fluctuation de la mécanique statistique un domaine qui absorbe fortement des ondes peut tout aussi bien en émettre. L'émission d'ondes cyclotroniques électroniques dépend de la température électronique. Dans un champ magnétique inhomogène différentes fréquences viennent d'endroits différents et il est ainsi possible d'obtenir des informations sur la température à ces endroits. Un diagnostic basé sur ce principe et qui s'appelle "mesure ECE" (Electron Cyclotron Emission) est utilisé sur pratiquement tous les tokamaks du monde.

3.6 Propagation perpendiculaire

Ce cas est caractérisé par $k_{\parallel} = 0$ et l'absence d'un amortissement, les arguments des fonctions W dans l'éq. (3.76) étant infinis et $W = 0$. La propagation se fait dans la direction x , voir éq. (3.13). Les équations de Maxwell donnent

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ -\epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} - N^2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} - N^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \quad (3.100)$$

où

$$\epsilon_{xx} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{k_{\alpha}^2}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 \Omega_{\alpha}^2}{\omega(\omega - n \Omega_{\alpha})} \Lambda_n(\beta_{\alpha}), \quad (3.101)$$

$$\epsilon_{xy} = -i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - n \Omega_{\alpha}} n \Lambda'_n(\beta_{\alpha}), \quad (3.102)$$

$$\epsilon_{yy} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{k_{\alpha}^2}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 \Omega_{\alpha}^2}{\omega(\omega - n\Omega_{\alpha})} \left[\Lambda_n(\beta_{\alpha}) - \frac{2\beta_{\alpha}^2}{n^2} \Lambda'_n(\beta_{\alpha}) \right], \quad (3.103)$$

$$\epsilon_{zz} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - n\Omega_{\alpha}} \Lambda_n(\beta_{\alpha}). \quad (3.104)$$

Ici, la température a de nouveau été supposée isotrope, $\tau_{\alpha} = 1$. Les composantes ϵ_{xz} et ϵ_{yz} sont nulles parce que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \Lambda_n(\beta_{\alpha}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda'_n(\beta_{\alpha}) = 0.$$

La relation se découple en deux équations,

$$N^2 = \epsilon_{zz}, \quad (3.105)$$

$$N^2 = \frac{\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + \epsilon_{xy}^2}{\epsilon_{xx}}, \quad (3.106)$$

la première déterminant la fréquence d'un mode purement électromagnétique ($E_z \neq 0$, $E_x = E_y = 0$) et la deuxième un mode hybride. Il est bon de savoir qu'en propagation oblique tous les modes sont mélangés et qu'un mode pur est parfois un heureux hasard, parfois une bonne approximation.

En physique des plasmas, l'onde avec un champ électrique parallèle à $\mathbf{B}_0$ porte le nom d'*onde ordinaire*, éq. (3.105). Son compagnon, éq. (3.106), est l'*onde extraordinaire*; son champ électrique est perpendiculaire à $\mathbf{B}_0$ et, selon la fréquence, tantôt perpendiculaire à la direction de propagation x , tantôt parallèle :

$$\frac{E_x}{E_y} = -\frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx}}. \quad (3.107)$$

L'onde extraordinaire est purement longitudinale (électrostatique) dans la limite

$$\epsilon_{xx} = 0 \quad (3.108)$$

ce qui détermine ses résonances $k \rightarrow \infty$, voir éq. (3.106). Elle est transversale (électromagnétique) si $\epsilon_{xy} \ll \epsilon_{xx}$. Ses coupures ($k = 0$) sont déterminées par

$$\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + \epsilon_{xy}^2 = 0. \quad (3.109)$$

Près d'une résonance, éq. (3.108), le champ E_y est sans importance et les équations de Maxwell, éq. (3.100), se réduisent à

$$\epsilon_{xx}E_x = 0. \quad (3.110)$$

Cette équation peut être identifiée avec celle décrivant les ondes de Bernstein en propagation purement perpendiculaire. En effet, dans le cas $k_{\parallel} = 0$ et $\tau_{\alpha} = 1$ on montre à l'aide de $\sum n\Lambda_n = 0$ que la fonction diélectrique (3.28) se réduit à la forme de ϵ_{xx} , éq. (3.101).

Les éléments du tenseur diélectrique (3.101) - (3.104) dépendent fortement de la longueur d'onde par le biais des fonctions $\Lambda_n(\beta_{\alpha})$. La raison physique est la taille finie des rayons de Larmor. Si, cependant, les longueurs d'ondes sont beaucoup plus grandes que les rayons de Larmor moyens, la limite du plasma froid ($T_{\alpha} \rightarrow 0$) donne une bonne approximation pour le tenseur. Toute la dépendance de la longueur d'onde tombe et on a alors

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2}, \quad (3.111)$$

$$\epsilon_{xy} = -i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \Omega_{\alpha}}{\omega(\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2)}, \quad (3.112)$$

$$\epsilon_{zz} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}. \quad (3.113)$$

Il est évident de l'éq. (3.113) que l'onde ordinaire (3.105) n'est pas affectée par la présence du champ magnétique, B_0 , dans cette limite. La relation de dispersion est identique à l'éq. (2.149) et montrée dans la Fig.3.4 (trace O).

Dans la même figure on a tracé la relation de dispersion de l'onde extraordinaire dans un plasma froid à une espèce ionique (traces X et MS). Les fréquences qui la caractérise qualitativement sont, depuis le bas, la résonance hybride inférieure

$$\omega_{LH}^2 = |\Omega_e \Omega_i| \left[\frac{\omega_{pe}^2 + |\Omega_e \Omega_i|}{\omega_{pe}^2 + \Omega_e^2} \right], \quad (3.114)$$

la première coupure

$$\omega_{c1} = -\frac{|\Omega_e|}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_e}{2}\right)^2 + \omega_{pe}^2}, \quad (3.115)$$

la résonance hybride supérieure

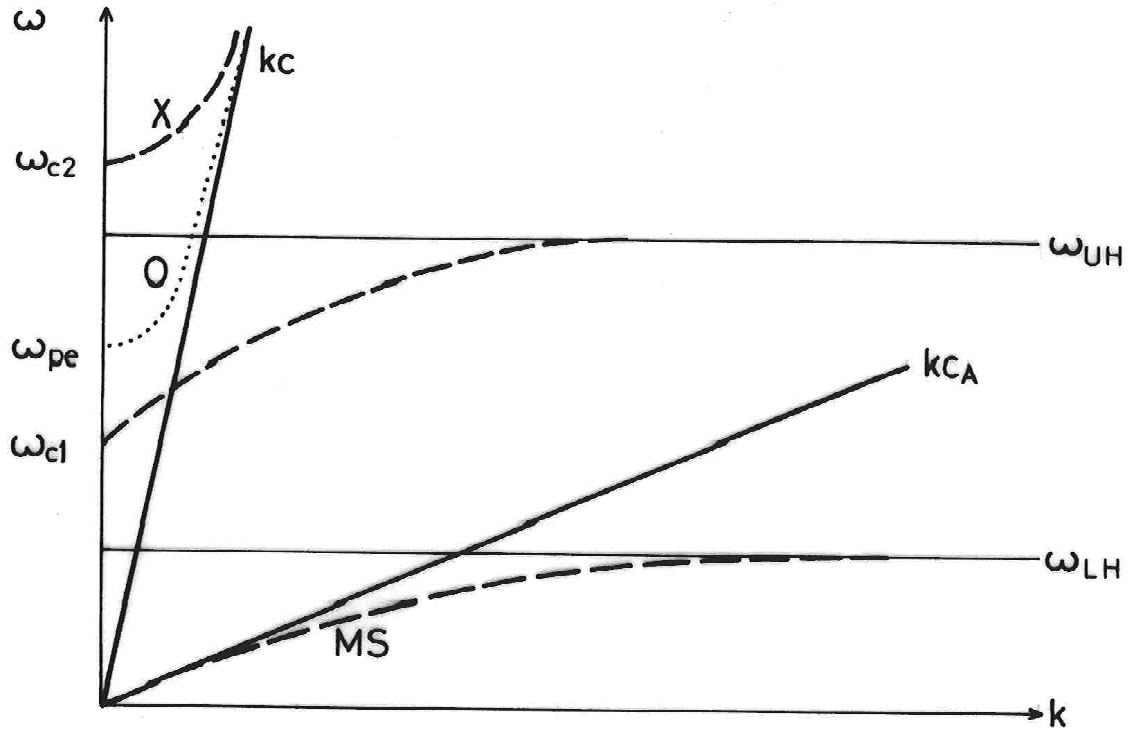


Figure 3.4 Relation de dispersion qualitative pour les modes qui propagent perpendiculairement au champ magnétique. L'onde ordinaire 0 est pointillée, l'onde extraordinaire X est traitillée. A basse fréquence elle devient l'onde magnétosonique rapide (MS).

$$\omega_{UH} = \sqrt{\Omega_e^2 + \omega_{pe}^2}, \quad (3.116)$$

et la deuxième coupure

$$\omega_{c2} = \frac{|\Omega_e|}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_e}{2}\right)^2 + \omega_{pe}^2}. \quad (3.117)$$

A très basse fréquence ($\omega \ll \Omega_i$) la vitesse de phase est déterminée essentiellement par la vitesse d'Alfvén ($\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 1 + c^2/c_A^2$, $\epsilon_{xy} \rightarrow 0$) et à haute fréquence par la vitesse de la lumière.

Pour illustrer l'effet de la température sur ces relations de dispersion on étudie le cas de l'onde ordinaire, éq. (3.105). Négligeons les ions et posons, comme dans l'étude des ondes de Bernstein,

$$\omega_{\mathbf{k}} = m\Omega + \delta\omega_{\mathbf{k}}, \quad (3.118)$$

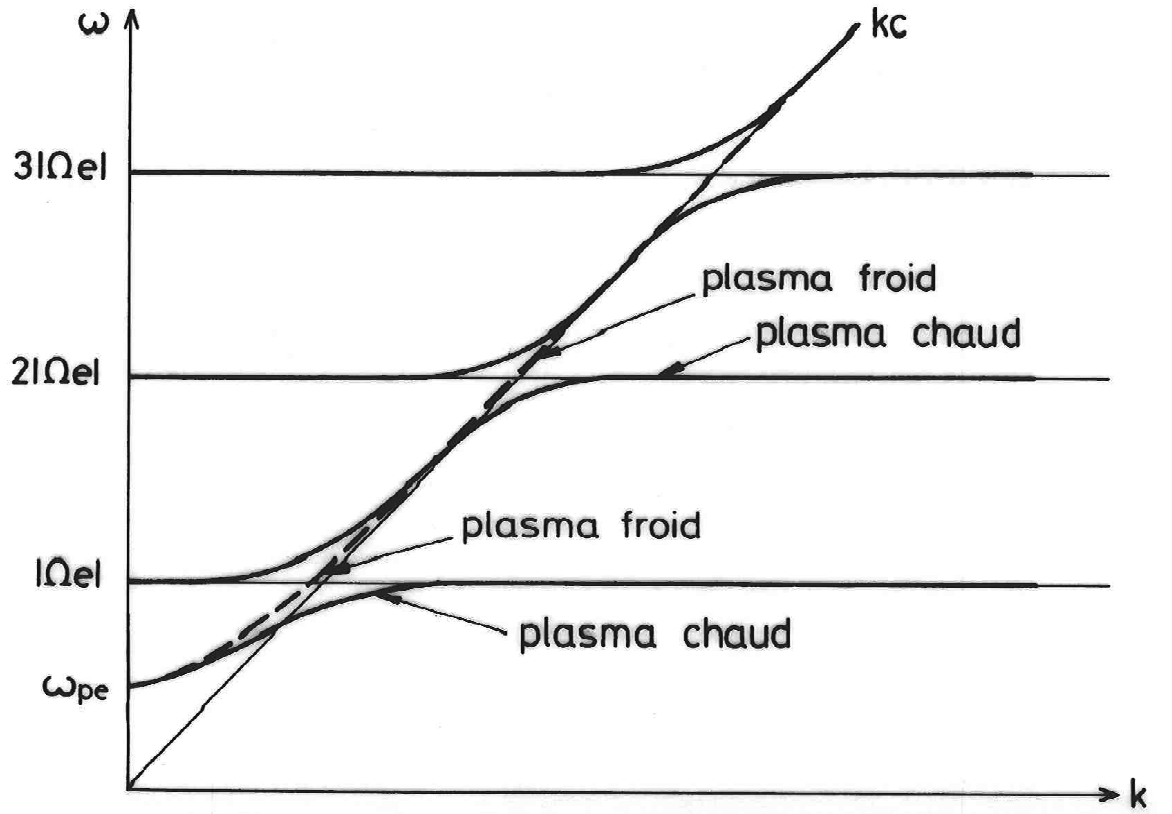


Figure 3.5 Relation de dispersion qualitative du mode ordinaire dans un plasma chaud.

supposant $|\delta\omega_{\mathbf{k}}/\Omega| \ll 1$. Si l'on retient que les termes $n = 0$ et $n = m$ la relation de dispersion, éqs (3.104) et (3.105) devient

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left[\Lambda_0(\beta) + \frac{\omega}{\omega - m\Omega} \Lambda_m(\beta) \right]. \quad (3.119)$$

Après avoir développé ceci jusqu'au premier ordre en $\delta\omega_{\mathbf{k}}$ on trouve

$$\delta\omega_{\mathbf{k}} = m\Omega \frac{\omega_{pe}^2 \Lambda_m(\beta)}{m^2 \Omega^2 - [k^2 c^2 + \omega_{pe}^2 \Lambda_0(\beta)]}. \quad (3.120)$$

On vérifie qu'effectivement $\delta\omega_{\mathbf{k}} \ll |\Omega|$ pour une large gamme de paramètres. Le seul endroit où l'approximation est nécessairement fautive est dans le voisinage de la relation de dispersion de l'onde ordinaire du plasma froid. On conclut que la relation de dispersion doit avoir l'allure montrée dans la Fig. 3.5.

Les effets cinétiques sur la propagation du mode extraordinaire sont semblables avec une complication supplémentaire due à la présence des résonances.

3.7 Propagation oblique

Comme mentionné plus haut, il est très souvent impossible de découpler analytiquement les différentes polarisations. Très souvent, il n'y a même pas un intérêt de faire cela parce que les modes satisfaisant l'éq. (2.81),

$$\Delta \cdot \mathbf{E} = 0$$

n'ont en général aucun caractère particulier.

Des fois, il est pourtant quand même possible d'éviter l'ordinateur et dans ces cas spéciaux il vaut la peine de persévérer. La compréhension des phénomènes fondamentaux se transmet plus facilement à l'aide de formules qu'à l'aide d'un output multicolore !

C'est l'onde d'Alfvén qui nous sert d'illustration. Partons de la théorie des ondes de basse fréquence ($\omega \ll \Omega_i$) selon le modèle du plasma froid. L'équation (2.81) s'écrit explicitement

$$\begin{pmatrix} \omega_{pi}^2/\Omega_i^2 - N_{\parallel}^2 & 0 & N_{\parallel}N_{\perp} \\ 0 & \omega_{pi}^2/\Omega_i^2 - N_{\parallel}^2 - N_{\perp}^2 & 0 \\ N_{\parallel}N_{\perp} & 0 & -\omega_{pe}^2/\omega^2 - N_{\perp}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (3.121)$$

Ici on a supposé $1 \ll \omega_{pi}^2/\Omega_i^2 = c^2/c_A^2$ et les abréviations $N_{\parallel} = k_{\parallel}c/\omega$ et $N_{\perp} = k_{\perp}c/\omega$ on été utilisées. Comme

$$-\epsilon_{zz} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \gg \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_i^2} \gg \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2},$$

la composante ϵ_{zz} domine largement le tenseur. Les seuls termes importants dans le déterminant sont ceux qui contiennent ϵ_{zz} et les relations de dispersion des deux modes de basse fréquence (onde Alfvén, onde magnéto-sonique) sont découplées

$$\left(\frac{c^2}{c_A^2} - N_{\parallel}^2\right) \left(\frac{c^2}{c_A^2} - N_{\parallel}^2 - N_{\perp}^2\right) = 0. \quad (3.122)$$

Une manière équivalente d'argumenter est d'insérer la dernière équation de (3.121)

$$E_z \approx N_{\parallel}N_{\perp} \frac{\omega^2}{\omega_{pe}^2} E_x$$

dans la première où on trouve que E_z ne contribue pas.

La propagation de l'onde Alfvén est strictement parallèle au champ $\mathbf{B}_0$

$$\omega = c_A k_{\parallel}. \quad (3.123)$$

La question se pose si cette propriété n'est pas perdue dans un plasma chaud. On peut très bien s'imaginer que les effets des rayons de Larmor finis puissent donner aux ondes Alfvén une vitesse de groupe perpendiculaire finie.

Pour l'étude de cette question on développe le tenseur diélectrique jusqu'au premier ordre en température. Un résultat consistant peut être dérivé en supposant $k v_{thi} \ll \omega \ll k_{\parallel} v_{the}$ tout en ayant $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$.

Supposant $1 \ll \omega_{pi}^2 / \Omega_i^2$ comme pour (3.122) on trouve

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} \left(1 - \frac{3}{4} \beta_i \right), \\ \epsilon_{xy} &= -i \frac{15}{8} \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} \frac{\Omega_i}{\omega} \beta_i, \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} \left[1 + \beta_i \left(\frac{3}{4} - 2 \frac{\Omega_i^2}{\omega^2} \right) + i \sqrt{2\pi} \frac{m_e}{m_i} \frac{k_{\perp}^2}{|k_{\parallel}|} \frac{v_{the}}{\omega} \right], \\ \epsilon_{yz} &= -i \frac{\omega_{pi}^2}{\omega \Omega_i} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_{\parallel}| v_{the}} \right), \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\omega_{pe}^2}{k_{\parallel}^2 v_{the}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_{\parallel}| v_{the}} \right) - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.124)$$

Les équations de Maxwell prennent la forme

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} - N_{\parallel}^2 & \epsilon_{xy} & N_{\perp} N_{\parallel} \\ -\epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} - N_{\perp}^2 - N_{\parallel}^2 & \epsilon_{yz} \\ N_{\perp} N_{\parallel} & -\epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} - N_{\perp}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (3.125)$$

Le résultat le plus important est contenu dans ϵ_{xx} : la relation de dispersion "froide" $\epsilon_{xx} - N_{\parallel}^2 = 0$ dépend maintenant de $k_{\perp}$ à travers $\beta_i = k_{\perp}^2 v_{thi}^2 / \Omega_i^2$. Il n'est pourtant pas évident que cette relation n'aie encore une signification. Pour montrer qu'elle est valable on argumente d'une façon semblable à celle utilisée dans le cas froid.

D'abord, on constate que ϵ_{zz} domine le tenseur de nouveau ; E_z est donc de nouveau petit,

$$E_z = - \frac{N_{\perp} N_{\parallel}}{\epsilon_{zz}} E_x + \frac{\epsilon_{yz}}{\epsilon_{zz}} E_y. \quad (3.126)$$

Dans la première équation de (3.125) E_z est substituée par l'éq. (3.126). Le modèle du plasma froid donne $E_y = 0$ pour une onde Alfvén. En supposant que dans un plasma chaud on aie toujours $|E_y| \ll |E_x|$ on trouve pour l'onde Alfvén cinétique

$$\epsilon_{xx} - N_{\parallel}^2 - \frac{N_{\perp}^2 N_{\parallel}^2}{\epsilon_{zz}} = 0, \quad (3.127)$$

où le dernier terme a été retenu à cause de sa partie imaginaire ; elle servira à estimer l'amortissement de Landau de ce mode.

On peut montrer que les termes négligés $\sim E_y$ sont effectivement plus petits que ceux retenus si $|k_{\perp}| \gg |k_{\parallel}|$.

Comme $N_{\parallel}^2 \approx \epsilon_{xx}$ on peut récrire (3.127) dans la forme

$$\epsilon_{xx} - N_{\parallel}^2 - \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} N_{\perp}^2 = 0. \quad (3.128)$$

Si T_e et T_i ne sont pas trop différents le terme ionique dans l'expression pour ϵ_{zz} est négligeable et on trouve

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = c_A^2 k_{\parallel}^2 \left[1 + k_{\perp}^2 \rho_i^2 \left(\frac{T_e}{T_i} + \frac{3}{4} \right) \right], \quad (3.129)$$

$$\gamma_{\mathbf{k}} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{c_A^2 k_{\perp}^2}{\Omega_i^2} |k_{\parallel}| c_s \quad (3.130)$$

Cette onde a joué un rôle important dans les recherches expérimentales et théoriques menées au CRPP dans les années 1980 - 1990. Dans un plasma inhomogène cette onde peut être excitée à travers une onde magnétozonique. L'énergie transférée est ensuite absorbée par effet Landau, éq. (3.130).

4.

La magnétohydrodynamique idéale

4.1 Introduction

Dans la première partie du cours, nous avons tenté de construire un modèle du plasma chaud "ab-initio". Nous avons trouvé que cela est possible en principe seulement.

Il est clair qu'un plasma de fusion, comme un plasma de tokamak ne sera jamais en équilibre dans un sens strict, Fig.4.1.

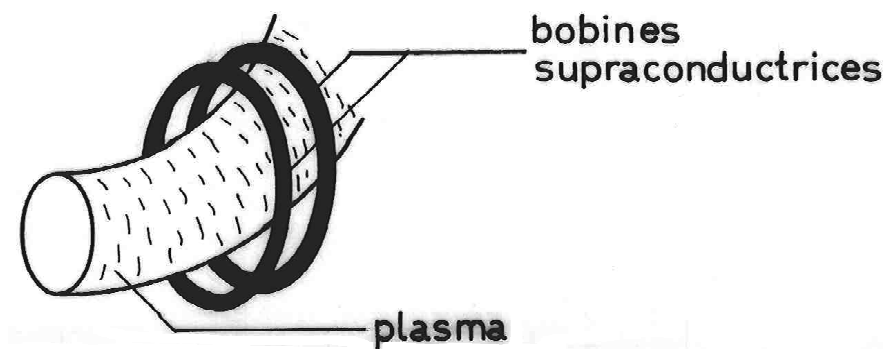


Figure 4.1 Le plasma dans un réacteur du type de tokamak a une température de l'ordre de 10^8 °K. Les bobines supraconductrices qui l'entourent ont une température proche du zéro absolu. Il doit donc y avoir de forts gradients de température.

On peut donc dire que

-) Les états stationnaires ne sont jamais des équilibres thermiques.
-) Pire encore : les collisions pouvant amener le plasma vers l'équilibre sont le plus souvent négligeables vis-à-vis des fréquences des phénomènes observés, $\omega \gg \nu_i$. Les conséquences en sont que les équilibres locaux (distribution maxwellienne locale : $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$) n'existent pas forcément et que le plasma peut être le siège de toutes sortes d'instabilités et de fluctuations locales.
-) Sur la base d'une théorie cinétique à l'équilibre thermique on peut estimer le taux de fluctuation thermique. Les fluctuations sont générées par la taille finie des particules, le plasma n'étant pas continu dans le sens strict. Comme le plasma a la tendance à osciller à ses fréquences propres, les particules excitent avec leur taille finie des modes ayant des fréquences autour de $\omega \sim \omega_{pe}, kc_s, \omega_{ce} \dots$. L'amplitude excitée est proportionnelle au paramètre du plasma (paramètre mesurant les effets de taille finie) :

$$\boxed{\text{amplitude} \sim g_p}$$

Ceci n'est vrai qu'à l'équilibre thermique. Les expériences nous montrent que les fluctuations sont, en général, bien plus importante :

$$\boxed{\text{amplitude} \gg \text{fluctuation thermique.}}$$

La conclusion est qu'il existe des turbulences qui ne sont pas en relation avec la taille finie des particules mais qui résultent d'instabilités excitées par des gradients ou des courants : C'est les phénomènes collectifs eux-mêmes qui sont à l'origine des fluctuations élevées.

Nous nous trouvons donc dans une situation très inconfortable : on voudrait étudier le comportement d'un plasma de taille macroscopique, mais on a toutes les raisons de penser que ce plasma est instable "microscopiquement" (haute fréquence, petite longueur d'onde). De plus, il est évident que ces instabilités influencent le transport macroscopique (diffusion de particules, conduction de chaleur, nuisibles au confinement) et que ce transport modifie les gradients (qui en sont la source).

Après avoir vu la théorie Vlasov, on sait qu'elle est beaucoup trop compliquée pour qu'on puisse l'appliquer directement à un plasma macroscopique en géométrie complexe. On abandonne alors la tentative "microscopique", "ab-initio", ... et on recommence d'une façon pragmatique avec un modèle phénoménologique, la MHD.

On va se restreindre à des phénomènes de grande longueur d'onde ($\lambda \gg \lambda_d$) et de basse fréquence ($\omega \ll \omega_{pe}$) et supposer que les fluctuations de haute fréquence et de courte longueur d'onde jouent un rôle (en induisant de la stochasticité) semblable à celui des collisions qui - si elles étaient fréquentes - amèneraient les fonctions de distributions vers des maxwelliennes.

Le modèle de la MHD est le plus simple du point de vue physique mais il permet de traiter avec succès beaucoup d'aspect macroscopiques importants. Nous allons le dériver d'abord à l'aide d'arguments heuristiques. Ensuite, on en sonde les limites en essayant de le dériver à partir de l'équation de Vlasov, tout en étant conscient que sa meilleure justification reste son succès.

4.2 Les équations de la MHD résistive

1. Dérivation heuristique

La dérivation heuristique est basée sur l'idée que le plasma est un gaz idéal bon conducteur. Effectivement, sa résistivité,

$$\eta = \frac{1}{\sigma_{\text{Spitzer}}} = \frac{m\nu_s}{e^2 n_e} \approx 5 \times 10^{-5} \frac{z \ln \Lambda}{T_{\text{eV}}^{3/2}} [\Omega\text{m}]$$

est très petite ; pour un plasma modérément chaud de 100 eV (10^6 °K) on a $\eta \approx 5 \cdot 10^{-7} \Omega\text{m}$ ce qui est comparable aux métaux : cuivre, $2 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$; acier, $7 \times 10^{-7} \Omega\text{m}$; mercure, $10^{-6} \Omega\text{m}$. Le plasma est bon conducteur. En MHD idéale on fait même l'hypothèse que $\eta = 0$, hypothèse qui nécessitera une discussion.

Le modèle s'obtient des équations de conservation de la masse et de l'impulsion, des équations de Maxwell complétées par une loi d'Ohm et d'une équation d'état.

On définit la densité massique $\rho(\mathbf{r}, t)$ et la vitesse du gaz $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ en termes connus de la cinétique :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} n_{\alpha}(\mathbf{r}, t) m_{\alpha}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha}}. \quad (4.2)$$

Remarquez que dans le contexte de la MHD on utilise ρ pour désigner la densité massique et non pas ρ_M . Il n'y a pas de danger de confusion parce qu'on n'a en général pas besoin de la densité de charge en MHD.

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (4.3)$$

Conservation de l'impulsion :

La densité de l'impulsion est donnée par $\rho \mathbf{u}$ et son flux par $\rho \mathbf{u} : \mathbf{u}$ (voir §1.10 du cours et les exos !) :

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = F_i : \text{densité de force} \quad (4.4)$$

avec

$$\mathbf{F} = \left(\sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \right) \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p. \quad (4.5)$$

Dans le modèle MHD, on néglige la densité de charge $\sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha}$, en renonçant à décrire les oscillations de haute fréquence ($\sim \omega_{pe}$) et de courte longueur d'onde ($\sim \lambda_D$). A basse fréquence, en ayant donc moyenné sur des temps $> \omega_{pe}^{-1}$, le plasma est quasi-neutre,

$$\overline{\sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha}} \approx 0.$$

La seule exceptions est l'écrantage de Debye, mais on ne s'y intéresse pas car $\lambda \gg \lambda_d$.

En introduisant (4.3) dans (4.4) on obtient (voir série 3, exercice 3)

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p. \quad (4.6)$$

Cette équation est l'analogue de l'équation d'Euler en hydrodynamique où la densité de force est donnée par $\mathbf{g} - \nabla p$, où $\mathbf{g}$ est l'accélération de la pesanteur. Ici on n'a pas tenu compte des forces visqueuses qui, dans le cas de l'hydrodynamique, font de l'équation d'Euler l'équation de Navier-Stokes.

La loi d'Ohm

Comme nous avons perdu la description de l'aspect "microscopique" nous devons maintenant "inventer" une relation entre $\mathbf{j}$ et $\mathbf{E}$. On peut utiliser pour cela la transformation de Lorentz pour le champ électromagnétique. Prenons d'abord un observateur qui se meut avec le plasma. Cet observateur constatera que la relation entre $\mathbf{j}'$ et $\mathbf{E}'$ est

$$\eta \mathbf{j}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t),$$

' désignant le système en mouvement, fixé sur le plasma. On a fait l'hypothèse que η est isotrope. Cette loi d'Ohm peut maintenant être transformée dans le système

de laboratoire. Comme on a supposé la quasineutralité il n'y a pas de courant de convection et $\mathbf{j} = \mathbf{j}'$. Le champ électrique, par contre, est

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B},$$

si on se restreint à des vitesses non-relativistes, $|\mathbf{u}| \ll c$.

La loi d'Ohm est donc

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \begin{cases} 0 & \text{MHD idéale} \\ \eta \mathbf{j} & \text{MHD résistive} \end{cases} \quad (4.7)$$

L'hypothèse $\eta = 0$ nous supprime la relation entre $\mathbf{j}$ et $\mathbf{E}$. On réussira quand même à construire un système d'équations complet. Jusqu'à présent nous avons obtenu les équations pour ρ (4.3), $\mathbf{u}$ (4.6) et $\mathbf{E}$ (4.7). Celle pour $\mathbf{B}$ s'obtient de

l'équation de Faraday :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}. \quad (4.8)$$

La première équation de Maxwell est utilisée dans sa forme pré-maxwellienne, c'est-à-dire réduite à la loi d'Ampère

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}. \quad (4.9)$$

Le courant de déplacement $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ est négligé en arguant de la basse fréquence des phénomènes étudiés. Il est effectivement nul si :

-) $\omega \rightarrow 0$, ou
-) $\epsilon_0 = 0$ donc $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = \infty$. Si on cherche des ondes ayant des vitesses de phase et de groupe suffisamment basses, $v_\phi, v_g \ll c$, cette approximation est justifiée. La vitesse typique de la MHD est la vitesse Alfvén, $v_a^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0}$. Dans un tokamak de $B_0 = 3\text{T}$, $n = 10^{20}\text{m}^{-3}$ et rempli de deuterium on a $\left(\frac{v_a}{c}\right)^2 \sim 10^{-3}$.

L'équation d'état

Nous avons une équation pour chaque inconnue, sauf pour la pression p . On cherche alors une équation d'état :

$$p = f(\rho).$$

Les résultats de la thermodynamique peuvent être utilisés si $\nu_{ii} \gg \omega$. Cette condition est satisfaite par l'équilibre ($\omega = 0$) mais très rarement pour les ondes et les instabilités.

Quand on étudie les ondes sonores dans un gaz normal, on utilise d'habitude la loi adiabatique en supposant que la propagation ondulatoire est beaucoup plus rapide que le flux de chaleur. Il n'y a donc pas d'échange de chaleur entre les différents éléments de volume en mouvement ; dans ce cas l'équation d'état est donnée par :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma_{ad}} = \frac{p}{p_0}, \quad (4.10)$$

où $\gamma_{ad} = \frac{2+f}{f} = \frac{5}{3}$, f étant le nombre de degrés de liberté. Ici, ρ_0 et p_0 caractérisent l'état d'équilibre, ρ et p un état perturbé, ces deux états vus par un observateur qui se meut avec le gaz. Sous forme différentielle, l'éq.(4.10) devient

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \frac{p}{\rho^{\gamma_{ad}}} = 0 \quad (4.11)$$

Le rapport $p/\rho^{\gamma_{ad}}$ ne varie pas pour un observateur se mouvant avec le gaz.

En MHD on admet (4.11) pour un plasma. Cette démarche est moins déraisonnable de ce que l'on pourrait penser au vu de la condition $\omega \gg \nu_{ii}$ (qui prévaut le plus souvent). La raison principale est que l'influence de l'équation d'état est rarement importante. En effet :

-) en cinétique nous avons rencontré l'onde acoustique-ionique qui est de basse fréquence. Elle devrait réapparaître dans le modèle MHD. En cinétique on trouve que les électrons se comportent comme si une loi "isotherme" était suivie. Notre interprétation est que les électrons peuvent égaliser leur température parce que leur vitesse domine la vitesse de phase : $T_e/m_e \gg T_e/m_i = c_s^2$. Pour ces ondes-ci l'éq. (4.11) n'est pas valable. Mais dans un tokamak où $T_e \sim T_i$ ces ondes sont fortement amorties et le résultat MHD un peu douteux.
-) Perpendiculairement au champ magnétique, les électrons n'ont pas de mobilité et l'adiabaticité est une hypothèse raisonnable.
-) Les ondes Alfvén torsionnelles satisfont $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ et ne perturbent pas la pression. L'éq. (4.11) ne joue donc aucun rôle pour elles.
-) Dans un tokamak, $\beta \equiv p_0/(B_0^2/2\mu_0) \ll 1$ et souvent $v_A \sim v_{the}$, donc l'adiabaticité n'est pas très justifiée. Par contre, on peut montrer que de $\beta \ll 1$ résulte que la vitesse de phase des ondes autres qu'ionique-acoustiques ne dépend pratiquement pas de p .
-) Dans le cas de l'onde Alfvén et de beaucoup d'instabilités on a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

ce que l'on peut prendre comme une autre "équation d'état". On suit alors le chemin de l'hydrodynamique des fluides incompressibles. La démarche est de prendre la divergence de l'équation de mouvement (4.6) et de produire ainsi une équation instantanée pour $\Delta p = \dots$

Conclusion : L'éq. d'état ne joue pas un grand rôle dans la physique qui va nous intéresser.

A l'aide de l'éq. (4.3) on peut réécrire (4.11) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) p + \gamma_{ad} p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (4.12)$$

Rassemblons toutes les équations de la MHD, donc les équations (4.3), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), et (4.12) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (4.13)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \begin{cases} 0 & \text{MHD idéale} \\ \eta \mathbf{j} & \text{MHD résistive} \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}, \quad (4.17)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) p + \gamma_{ad} p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (4.18)$$

Ces équations ne peuvent être justifiées formellement que dans un plasma dominé par des collisions,

$$\ell_{\text{lpm}} \ll L_p \text{ et } \tau_{\text{ltm}} \ll \tau_p.$$

Ici, ℓ_{lpm} et τ_{ltm} désignent le "libre parcours moyen" et le "libre temps moyen", L_p et τ_p sont respectivement la longueur et le temps macroscopique, L_p étant donné par la géométrie du système ou par les longueurs d'onde et τ_p par l'évolution temporelle de la décharge ou par les fréquences des ondes (ω^{-1}).

Les tentatives de les justifier quand même à partir de l'équation de Vlasov (ou plutôt, de Boltzmann) doivent être comprises comme mise en évidence des limites du modèle MHD !

2. Dérivation à partir des équations cinétiques

Le point de départ est l'équation de Boltzmann (Vlasov + terme de collision) :

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = \sum_\beta C_{\alpha\beta} \quad (4.19)$$

Dans la série 3 des exercices, on a appris à dériver les équations fluides, la seule différence ici étant le terme de collision. En prenant le moment 0 de l'éq. (4.19), c'est-à-dire en calculant $\int \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v = \dots$ on obtient

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{V}_\alpha) = 0, \quad (4.20)$$

le membre de droite étant nul si $\sum_\beta C_{\alpha\beta}$ ne contient pas de collisions inélastiques telles que l'ionisation etc.

Le moment d'ordre 1, $\int \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v = \dots$, donne

$$\begin{aligned} n_\alpha m_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_\alpha + (\mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{V}_\alpha \right] &= -\nabla \cdot \overrightarrow{\mathcal{P}}_\alpha + n_\alpha q_\alpha \mathbf{E} + \mathbf{j}_\alpha \times \mathbf{B} + \\ &\quad -n_\alpha m_\alpha \sum_\beta \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta), \end{aligned} \quad (4.21)$$

après utilisation de l'éq. (4.20). Le dernier terme représente la friction collisionnelle.

En définissant les densités massiques et d'impulsion comme dans le paragraphe §4.2.1, éqs.(4.1) et (4.2),

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \sum_\alpha n_\alpha(\mathbf{r}, t) m_\alpha, \\ \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= \sum_\alpha n_\alpha(\mathbf{r}, t) m_\alpha \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

on peut combiner les équations (4.20) et (4.21) de manière à obtenir (4.13), (4.14) et (4.15).

Dérivation de l'éq. (4.13)

De (4.20) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \nabla \cdot n_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha} = - \nabla \cdot \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha} = - \nabla(\rho \mathbf{u}).$$

Dérivation de l'éq. (4.14)

Pour faciliter la tâche prenons une seule espèce ionique. L'idée est d'ajouter les équations de mouvement (4.21) pour les électrons et les ions.

La vitesse moyenne des électrons doit satisfaire $|\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i| \ll v_{the}$, autrement on aurait des instabilités violentes de haute fréquence. Il est donc raisonnable de faire l'approximation $\mathbf{u} \approx \mathbf{V}_i$ car de toute façon $\rho \approx n_i m_i$. Alors

-) $n_e m_e \frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t} + n_i m_i \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} \approx \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$.
-) Le terme nonlinéaire est traité de la même manière :

$$n_e m_e (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \mathbf{V}_e + n_i m_i (\mathbf{V}_i \cdot \nabla) \mathbf{V}_i \approx \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

On remarque que ce terme ne nous intéresse pas beaucoup parce qu'il apparaîtrait dans nos théories linéaires seulement dans le cas de flux à l'équilibre, $\mathbf{V}_{io} \neq 0$. La démonstration peut d'ailleurs être faite correctement.

-) Le terme collisionnel, $\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \sum_{\beta} \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{V}_{\alpha} - \mathbf{V}_{\beta})$ est nul parce que l'impulsion totale est conservée lors d'une collision.
-) A cause de la quasineutralité on a $\sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} = 0$.
-) Reste à passer de $\sum_{\alpha} \overrightarrow{\mathcal{P}}_{\alpha}$ à $\mathbf{l}_p$. L'hypothèse que

$$\mathbf{l}_p \approx \sum_{\alpha} \overrightarrow{\mathcal{P}}_{\alpha}$$

n'est pas si évident. Il faut négliger la viscosité et faire l'hypothèse que la pression est isotrope (voir aussi série 3, exercice 4 : maxwellienne autour de $\mathbf{V}_{\alpha}$).

Dérivation de la loi d'Ohm, éq. (4.15)

C'est celle-ci qui demande le plus de discussion. Elle est essentiellement donnée par l'équation de mouvement des électrons,

$$n_e m_e \left[\frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t} + (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \mathbf{V}_e \right] = - \nabla p_e - e n_e \mathbf{E} + \mathbf{j}_e \times \mathbf{B} - n_e m_e \nu_{ei} (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) \quad (4.22)$$

-) D'abord, on néglige le membre de gauche de l'équation en négligeant *l'inertie des électrons* en prenant $m_e \rightarrow 0$. A basse fréquence, on a $n_e \sim n_i$, $V_e \sim V_i$ donc $j_e \sim j_i$. Il s'en suit que les forces électromagnétiques qui agissent sur les électrons sont du même ordre que celles qui agissent sur les ions :

$$\left| n_i m_i \frac{\partial V_i}{\partial t} \right| \sim |n_i q_i \mathbf{E} + \mathbf{j}_i \times \mathbf{B}| \sim |n_e q_e \mathbf{E} + \mathbf{j}_e \times \mathbf{B}| \gg \left| n_e m_e \frac{\partial V_e}{\partial t} \right|.$$

La dernière inégalité suit de $\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} \sim \frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t}$ et $m_e \ll m_i$.

-) On peut éliminer les quantités $\mathbf{j}_e$, $\mathbf{V}_e$, $\mathbf{V}_i$, n_e de (4.22) en faveur des quantités MHD $\mathbf{j}$, $\mathbf{u}$ et $n_i = \rho/m_i$:

$$\mathbf{j}_e = \mathbf{j} - \mathbf{j}_i = \mathbf{j} - en_i \mathbf{V}_i \approx \mathbf{j} - en_i \mathbf{u},$$

$$n_e = n_i,$$

$$\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i = \frac{-n_i e}{-n_i e} (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) = \frac{n_i e \mathbf{V}_i + n_e (-e) \mathbf{V}_e}{-n_i e} = \frac{\mathbf{j}}{-n_i e}.$$

Le résultat est

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \frac{1}{en_i} \left(\underbrace{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}_{\text{terme de Hall}} - \underbrace{\nabla p_e}_{\text{force thermo-électrique}} \right) + \underbrace{\frac{m_e \nu_{ei}}{n_i e^2}}_{\equiv \eta: \text{résistivité}} \mathbf{j}. \quad (4.23)$$

En négligeant le terme de Hall et la force thermoélectrique on obtient la loi d'Ohm, l'équation (4.15). L'équation (4.23) est souvent appelée *la loi d'Ohm généralisée*.

-) Une estimation rapide montre que le terme de Hall disparaît avec $\omega/\Omega_{ci} \rightarrow 0$. A l'aide de (4.14) on montre que $\rho \omega u \sim |\mathbf{j} \times \mathbf{B}|$

$$\left| \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{en_i} \right| \sim \frac{\omega}{\Omega_{ci}} Bu \sim \frac{\omega}{\Omega_{ci}} |\mathbf{u} \times \mathbf{B}| \ll |\mathbf{u} \times \mathbf{B}| \quad \text{si } \frac{\omega}{\Omega_{ci}} \ll 1 \text{ qed.}$$

La force thermo-électrique est plus difficile à discuter. Une manière transparente est utilisée par Artsimowitsch et Sagdejew[†]. Ils discutent les deux termes à négliger (Hall et thermo-électrique) dans le même cadre en éliminant $\mathbf{E}$ des équations MHD à l'aide de la loi d'Ohm généralisée, éq. (4.23) :

[†] L.A. Artsimowitsch et R. S. Sagdejew, *Plasmaphysik für Physiker*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1983 (en allemand, p. 183 - 84)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E} = \\
&= \underbrace{\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})}_{[1]} - \underbrace{\frac{m_i}{e} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{\rho} \right)}_{[2]} + \underbrace{\frac{1}{e} \nabla \times \left(\frac{\nabla p_e}{n_i} \right)}_{[3]} - \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B})}_{[4]}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Pour négliger le terme [3] on aura besoin à l'équilibre que $\nabla n_i \parallel \nabla T_e$ et à l'ordre 1 que $\left(\frac{r_{Li}}{L_p} \right) \left(\frac{kc_s}{\omega} \right) \ll 1$ ce qui est d'habitude le cas : r_{Li} est le rayon de Larmor.

Le terme de Hall [2] peut être reexprimé avec l'éq. (4.14) :

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{u} - \nabla \times [\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})]$$

Inséré dans l'éq. (4.24) cela donne (avec [3] = 0 !)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\mathbf{B} + \frac{m_i}{e} \nabla \times \mathbf{u} \right] = \nabla \times \left\{ \mathbf{u} \times \left[\mathbf{B} + \frac{m_i}{e} \nabla \times \mathbf{u} \right] \right\} + \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \mathbf{B} \tag{4.25}$$

Le deuxième terme (qui provient du terme de Hall) dans les parenthèses droites est négligeable dans le plasma au repos à l'équilibre ($\mathbf{u}_0 = 0$) ou si le champ magnétique est assez fort :

$$\left| \frac{\frac{m_i}{e} \nabla \times \mathbf{u}}{B} \right| \sim \frac{ku}{\Omega_{ci}} = \frac{ku}{\omega} \frac{\omega}{\Omega_{ci}} = \frac{u}{v_\phi} \frac{\omega}{\Omega_{ci}} \ll 1.$$

Sous les conditions $\boxed{\omega/\Omega_{ci} \ll 1 \text{ et } r_{Li}/L_p \ll 1}$ la loi d'Ohm prend donc la forme (4.15) "résistive" !

Les termes [2] et [3] négligés, on a

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \mathbf{B}. \tag{4.26}$$

Cette équation peut être obtenue des équations de la MHD résistive, (4.15) et (4.16). Elle peut remplacer (4.15) et (4.16) si cela s'avère intéressant.

4.3 Quelques conséquences générales des équations MHD

1. La force magnétique

A l'aide de l'éq. (4.17), l'équation du mouvement (4.14) peut être réécrite comme

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

Le deuxième terme du membre de droite, la force magnétique, peut être réécrit en utilisant l'identité vectorielle

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A},$$

soit

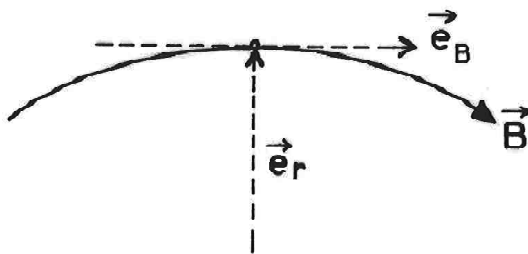
$$\frac{1}{2} \nabla B^2 = -(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla \left(p + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (4.27)$$

La force magnétique $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ se décompose donc en deux parties. La première peut être interprétée comme le gradient d'une pression, la *pression magnétique*,

$$\frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (4.28)$$

La deuxième partie $\frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ est non-nulle si les lignes de champ sont courbées ou divergentes. La courbure du champ magnétique produit une force analogue à celle que produiraient les lignes de champ si elles étaient des cordes élastiques tendues, Fig.4.2.



Dans la direction $\mathbf{e}_B$ B_r diminue. Il y a donc une force radiale f_r tirant le plasma vers l'intérieur,

$$f_r = B \nabla_B B_r < 0.$$

Figure 4.2 Des lignes de champ magnétique courbées.

2. La diffusion du champ magnétique et la MHD idéale

Discutons l'éq. (4.26). Si L est la longueur caractéristique sur laquelle le champ varie substantiellement ($L \sim B/\nabla B$, par exemple), on peut estimer que

$$|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})| \sim \frac{uB}{L},$$

$$\left| \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \mathbf{B} \right| \sim \frac{\eta}{\mu_0} \frac{B}{L^2}.$$

Le rapport R_M des deux termes est

$$R_M = \mu_0 \frac{uL}{\eta}.$$

Il est appelé *le nombre de Reynolds magnétique* et détermine si le champ magnétique diffuse à travers le plasma ($R_M \ll 1$),

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \mathbf{B}, \quad (4.29)$$

ou s'il est plutôt transporté par le plasma (cas de la MHD idéale!), $R_M \gg 1$:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (4.30)$$

Cette dernière équation implique en effet que le champ est gelé dans le plasma en mouvement. Cela est possible parce que les courants image se forment et se déforment aisément dans un plasma bon conducteur, $\eta = 0$. La démonstration formelle en est donnée dans le paragraphe suivant.

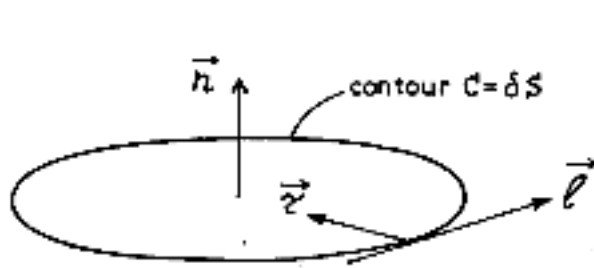
3. Le champ magnétique gelé de la MHD idéale

On démontre que le champ est gelé dans le plasma en montrant que le flux magnétique

$$\phi = \iint_S \mathbf{d}\sigma \cdot \mathbf{B}$$

à travers une surface plane S quelconque est produit exclusivement par le mouvement du plasma (en prenant les lignes de champ fixes sur le plasma). De (4.30) on tire

$$\frac{d\phi}{dt} = \iint_S \mathbf{d}\sigma \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \oint_{C \equiv \delta S} \mathbf{d}\ell \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{d}\ell \times \mathbf{u}) \quad (4.31)$$



Les vecteurs unitaires $\ell, \tau, \mathbf{n}$ forment un système orthogonal droit.

Figure 4.3 Surface plane S fixe dans le laboratoire délimitée par le contour C .

On fait l'hypothèse que le champ est amené par le plasma avec la vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ et on montre que le changement du flux, $d\phi/dt$, ainsi produit est effectivement celui qui est décrit par l'éq. (4.31). Ceci se fait en trois étapes en décomposant $\mathbf{u}$ localement selon les trois composantes ℓ, τ et $\mathbf{n}$, Fig.4.3.

1) Un déplacement $\mathbf{u} \parallel \ell$ ne contribue pas au flux, ce qui est confirmé par (4.31) : $\mathbf{d}\ell \times \mathbf{u} = 0$. On peut donc se restreindre au cas

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\tau + \mathbf{u}_n,$$

où $\mathbf{u}_\tau = u_\tau \tau$ et $\mathbf{u}_n = u_n \mathbf{n}$. L'équation (4.31) prend alors la forme

$$\frac{d\phi}{dt} = \oint_C (B_n d\ell u_\tau - B_\tau d\ell u_n) : \text{flux à travers } \underline{C \text{ fixe}}. \quad (4.32)$$

Il nous reste donc à prouver dans les deux étapes suivantes que les mouvements du plasma dans les directions τ et $\mathbf{n}$ produisent les flux correspondants au premier et deuxième terme de l'intégrand, respectivement. On a insisté dans l'éq.(4.32) sur " C fixe" dans le laboratoire parce que tout à l'heure on introduira C' qui indiquera la position de C si ce contour était transporté par le plasma pendant un intervalle δt .

2) Un déplacement dans le plan S est décrit par $u_\tau \neq 0, u_n = 0$. On veut montrer que le changement $\delta\phi$ de ϕ pendant δt équivaut au premier terme de l'intégrand dans l'éq.(4.32). La situation est décrite dans la Fig.4.4. La flèche montre un



Figure 4.4 Le contour C fixe et le contour C' déplacé dans le plan S .

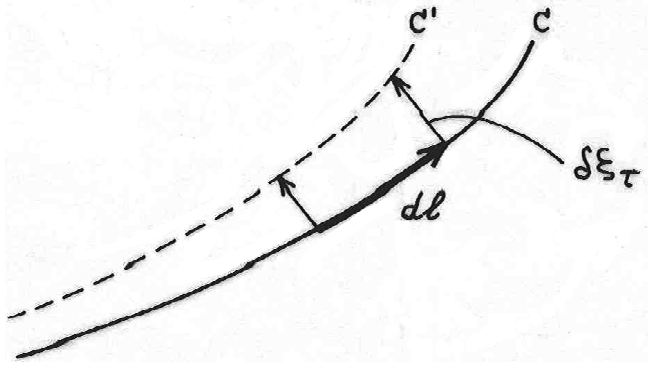


Figure 4.5 Contribution de dl au flux (direction positive de $\delta\xi_\tau$ vers l'intérieur !). Le flux $B_n dl \delta\xi_\tau$ est déplacé de l'extérieur vers l'intérieur.

déplacement $\delta\xi_\tau \equiv u_\tau \delta t$ dans la direction positive (dans la direction de τ !). De l'autre côté de la surface le déplacement est dans la direction négative. Les détails sont montrés sur la Fig.4.5. On en conclut que

$$\delta\phi = \oint B_n dl \delta\xi_\tau = \underbrace{\oint B_n dl u_\tau \delta t}_{\frac{d\phi}{dt} \delta t \text{ en accord avec (4.32)!}} \quad (4.33)$$

3) Reste à étudier le déplacement $\perp$ au plan S : $u_n \neq 0, u_\tau = 0$. Dans la Fig.4.6 on montre une situation où le plasma se déplace dans la direction positive du côté droit de la surface et dans la direction négative de l'autre côté.

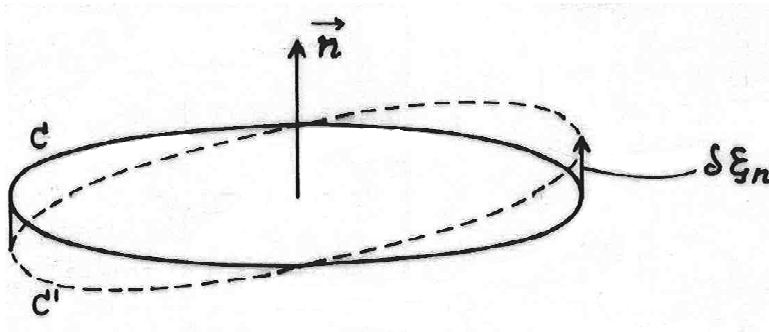


Figure 4.6 Déplacement perpendiculaire au plan S . La flèche indique $\delta\xi_n \equiv u_n \delta t > 0$ (positif parce que dans la direction de $\mathbf{n}$!)

Comme le champ est gelé, le flux à travers C' à $t + \delta t$ est le même qu'à travers C en temps t :

$$\phi(C', t + \delta t) = \phi(C, t).$$



Figure 4.7 Le demi-volume de droite

Utilisons $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ au temps $t + \delta t$ en intégrant sur le (ou les) volume délimité par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Dans notre dessin, Fig.4.6, on peut discuter p. ex. le demi-volume de droite (qui a la forme d'une *cassata*, Fig.4.7) :

$$\iiint \nabla \cdot \mathbf{B} d^3r = \oint \mathbf{B}(t + \delta t) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

L'élément de surface $d\boldsymbol{\sigma}$ ici est la normale extérieure (de la "cassata") du théorème de Gauss : $d\boldsymbol{\sigma}$ pointe vers le haut à la surface supérieure délimitée par $\mathcal{C}'$, mais vers le bas à la surface inférieure, délimitée par $\mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow 0 &= \underbrace{\phi(\mathcal{C}', t + \delta t)}_{=\phi(\mathcal{C}, t)} - \phi(\mathcal{C}, t + \delta t) + \oint_{\mathcal{C}} dl \delta \xi_n (-B_\tau), \\ \hookrightarrow \delta \phi &= \phi(\mathcal{C}, t + \delta t) - \phi(\mathcal{C}, t) = \underbrace{\oint_{\mathcal{C}} dl \overbrace{\delta \xi_n}^{u_n \delta t} (-B_\tau)}_{\text{en accord avec (4.32) !}}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

En combinant (4.33) avec (4.34) on montre que $\frac{d\phi}{dt} = \frac{\delta \phi}{\delta t}$ est effectivement donné par l'éq.(4.32).

Remarque : Le champ ne reste gelé que pour des temps inférieurs au temps de diffusion déterminé par l'éq. (4.29) :

$$T_{\text{diff}} \sim \frac{\mu_0 L^2}{\eta}. \quad (4.35)$$

Evidemment, le temps de diffusion diminue quand les gradients augmentent. En MHD idéale on considère souvent - pour des raisons de facilité - des discontinuités dans le champ magnétique confinant ou oscillant. Ceci est une idéalisation permise dans l'approximation $\sigma = \infty$ mais ne saurait être observée dans la nature.

4.4 L'équilibre

1. Surfaces magnétiques

Formellement, un équilibre est défini par les équations de la MHD idéale en posant $\partial/\partial t = 0$. Ici, on se restreint aux équilibres statiques qui sont caractérisés par $\mathbf{u}_0 = 0$. Les équations de (4.13) à (4.18) sont vides sauf (4.14) et (4.17) qui deviennent

$$0 = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (4.36)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}. \quad (4.37)$$

De l'éq. (4.16) reste la condition initiale

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.38)$$

La conséquence immédiate de (4.36) est

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{j} \cdot \nabla p = 0.$$

Dans un plasma confiné on a en général $\nabla p \neq 0$ partout et on peut alors dessiner les surfaces de $p = \text{const.}$ Le gradient ∇p étant perpendiculaire à ces surfaces, le champ $\mathbf{B}$ et le courant $\mathbf{j}$ doivent les suivre, étant donné qu'ils sont $\perp$ à ∇p , Fig.4.8.

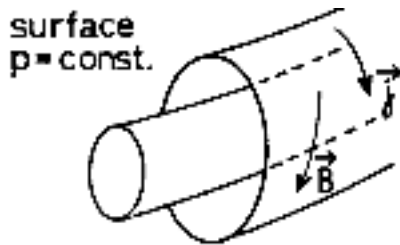


Figure 4.8 Les *surfaces magnétiques* sont aussi des surfaces de pression constante, $p = \text{const.}$

2. Equilibres plans

Un gradient de pression $\nabla p(x)$ peut être maintenu par des courants dans les plans $(y - z)$ qui sont des plans de pression constante.

$$(4.36) \quad \longrightarrow \quad \frac{dp}{dx} = j_y B_z - j_z B_y.$$

Les quantités $\mathbf{j}$ et $\mathbf{B}$ ne dépendent que de x , à l'instar de p . Donc

$$(4.37) \quad \longrightarrow \quad \mu_0 j_y = -\frac{dB_z}{dx}, \quad \mu_0 j_z = \frac{dB_y}{dx}.$$

Alors :

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{d}{dx} \underbrace{\frac{1}{2\mu_0}(B_y^2 + B_z^2)}_{\text{pression magnétique!}}$$

En intégrant on obtient l'équation pour un équilibre plan général :

$$p(x) + \frac{1}{2\mu_0} [B_y^2(x) + B_z^2(x)] = \text{const.}$$

Remarque : Des discontinuités dans $p(x)$ et $\mathbf{B}^2(x)$ sont permises !!

3. Equilibres cylindriques : $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial}{\partial r} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \equiv \frac{d}{dr}$

$$(4.36) \quad \longrightarrow \quad \frac{dp}{dr} = j_\theta B_z - j_z B_\theta$$

$$(4.37) \quad \longrightarrow \quad \mu_0 j_\theta = -\frac{dB_z}{dr}, \quad \mu_0 j_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r B_\theta)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{d}{dr} \underbrace{\frac{1}{2\mu_0}(B_z^2 + B_\theta^2)}_{\text{pression}} - \underbrace{\frac{1}{\mu_0 r} B_\theta^2}_{\text{tension}}$$

On distingue 3 cas :

- a) striction axiale, $\mathbf{j} = j_z \mathbf{e}_z$, $\mathbf{B} = B_\theta \mathbf{e}_\theta$ (z-pinch)
- b) striction azimuthale, $\mathbf{j} = j_\theta \mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_z$ (θ -pinch)
- c) striction hélicoïdale, $\mathbf{j} = (j_\theta, j_z)$ (screw-pinch).

4. Equilibres toriques, axisymétriques ("2D")

(Le cas 3D général est très compliqué.)

L'axisymétrie implique $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$.

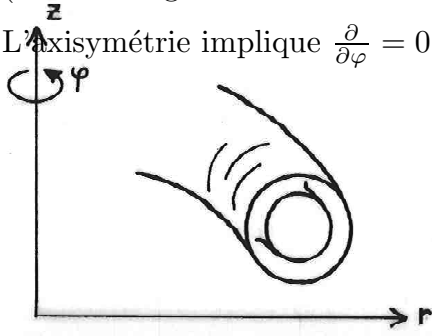


Figure 4.9 Les coordonnées de la géométrie axisymétrique.

En MHD on a l'habitude d'utiliser φ comme coordonnée angulaire dans le cas 2D, Fig.4.9, mais θ dans le cas cylindrique 1D comme dans le point 3 plus haut. On utilise souvent R comme coordonnée radiale. Ici, je suis la notation de Cairns, p.30[†].

Soit ψ une coordonnée qui caractérise les surfaces magnétiques. C'est donc une quantité $\psi(r, z)$ qui est constante sur une surface ; elle ne varie pas dans la direction du champ magnétique : $\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0$. Explicitement :

$$B_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + B_z \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

Cette équation est satisfaite avec l'ansatz

$$B_r = -f(r, z) \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad B_z = f(r, z) \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

La condition (4.38), $\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_r + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0$, restreint le choix pour $f(r, z)$: $f(r, z) = 1/r$ fait l'affaire. Donc

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (4.39)$$

En argumentant avec le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ on montre que ce choix est unique. Voilà l'argument : $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\mathbf{B}$ est donc de la forme $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$; comme $\partial \mathbf{A} / \partial \phi = 0$ on a $B_r = -\partial A_\phi / \partial z$ et $B_z = r^{-1} \partial(r A_\phi) / \partial r$, donc $\psi \equiv r A_\phi$.

Aussi, nous savons par construction que $p = p(\psi)$. Une autre quantité importante qui ne dépend que de ψ est

$$T = r B_\phi \quad (4.40)$$

Cette quantité est liée au flux de courant poloïdal. Prenons un cercle de rayon r autour de l'axe majeur (cercle : $\mathcal{C}$), Fig.4.10.

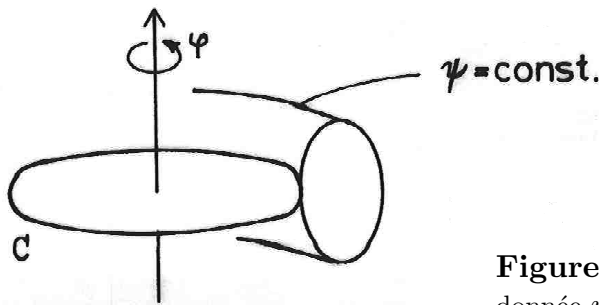


Figure 4.10 Surface magnétique de coordonnée ψ et contenant le cercle $\mathcal{C}$.

[†] R. A. Cairns, *Plasma Physics*, Blackie, Glasgow and London, 1985

Comme les courants suivent les surfaces magnétiques, le flux de courant ($\equiv$ courant total) à travers $\mathcal{C}$ ne dépend pas de l'endroit où le cercle se trouve sur la surface ψ . Il peut même se trouver à l'extérieur du tore, Fig.4.10.

Le courant total à travers $\mathcal{C}$ est trivialement :

$$\begin{aligned} I(\psi) &= \int_0^r r' dr' \int_0^{2\pi} d\varphi j_z(r', z) = \int_0^r r' dr' \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\mu_0} [\nabla \times \mathbf{B}]_z = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \\ &= \frac{2\pi r}{\mu_0} B_\varphi = \frac{2\pi}{\mu_0} T(\psi). \end{aligned}$$

On peut maintenant exploiter la forme spéciale, éq. (4.39), que prend le champ dans le cas axisymétrique. On remplace d'abord $\mathbf{j}$ dans l'éq. (4.36) par $\nabla \times \mathbf{B}/\mu_0$, éq. (4.37), et ensuite B_r et B_z par les expressions de l'éq. (4.39). Les composantes radiales et axiales de l'éq. (4.36) ainsi modifiée exigent indépendamment l'une de l'autre que

$$r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{dT^2}{d\psi} + \mu_0 r^2 \frac{dp}{d\psi} = 0. \quad (4.41)$$

Ceci est l'équation de Grad-Shafranov qui caractérise les équilibres toriques. Ici, les fonctions $p(\psi)$ et $T(\psi)$ peuvent être choisies arbitrairement. Ce choix nous mène à une équation différentielle, en général nonlinéaire, pour $\psi(r, z)$. Une fois trouvée une solution $\psi(r, z)$, n'importe quelle surface $\psi(r, z) = \text{const}$ peut être prise comme surface $p = 0$, c'est-à-dire n'importe quelle surface $\psi(r, z) = \text{const}$ peut représenter le bord du plasma.

Dans le cas général d'un choix nonlinéaire pour les dépendances en ψ des quantités $dT^2/d\psi$ et $dp/d\psi$, seulement un traitement numérique peut fournir des solutions pour ψ .

Une conséquence simple :

Un champ magnétique purement torique imposé de l'extérieur, Fig.4.11, ne peut confiner un plasma (fait connu de l'étude des orbites particulières).

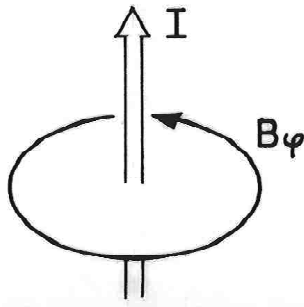


Figure 4.11 Un champ torique imposé de l'extérieur par un courant vertical, I , se comporte comme $B_\varphi \sim \frac{1}{r}$.

Démonstration : $B_\varphi \sim 1/r \rightarrow T(\psi) = \text{const} \rightarrow \frac{dT^2}{d\psi} = 0$. Tout plasma intéressant a $\frac{dp}{d\psi} \neq 0 \rightarrow \psi(r, z) \neq 0 \rightarrow B_r, B_z \neq 0$. Autrement, ce n'est pas un équilibre.

De l'éq. (4.39) on apprend que dans un équilibre torique il faut des champs B_r et B_z mais aussi, à travers l'éq. (4.37), des courants j_r et j_z . Les champs et courants du tokamak sont une réalisation possible.

4.5 Les équations linéarisées de la MHD idéale

1. L'équation de mouvement

Dans ce contexte on a l'habitude d'indiquer les quantités de l'équilibre avec un indice 0 et le premier ordre sans indice. Pour plus de clarté, nous restons avec notre notation

$$A(\mathbf{r}, t) = A_0(\mathbf{r}) + A_1(\mathbf{r}, t) + \dots$$

sauf pour la quantité ξ qui sera définie plus bas. Soient donc $\rho_1, p_1, \mathbf{B}_1$ et $\mathbf{j}_1$ les perturbations (d'amplitude petite !) de $\rho_0, p_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{j}_0$. On ne s'intéresse ici qu'à des équilibres statiques, $\mathbf{u}_0 = 0$. Avec ces indications on trouve les équations linéarisées du (4.13), (4.14), (4.17), (4.18) et (4.30) :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_1) = 0, \quad (4.42)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0, \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla p_0 + \gamma_{ad} p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0). \quad (4.45)$$

Il est plus commode de travailler avec le déplacement du plasma hors de sa position d'équilibre, $\xi(\mathbf{r}, t)$, qu'avec la vitesse, $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$. Leur relation est simplement

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (4.46)$$

En terme de cette nouvelle quantité, les équations (4.42), (4.44) et (4.45) prennent la forme,

$$\rho_1 = -\nabla(\rho_0 \boldsymbol{\xi}), \quad (4.47)$$

$$p_1 = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 - \gamma_{ad} p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad (4.48)$$

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0). \quad (4.49)$$

L'équation de mouvement (4.43) peut ainsi être écrite entièrement en terme du déplacement $\boldsymbol{\xi}$:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = & \nabla \{ \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 + \gamma_{ad} p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times [\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0)] + \\ & \frac{1}{\mu_0} \{ \nabla \times [\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0)] \} \times \mathbf{B}_0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

On interprète habituellement le membre de droite de l'équation comme une densité de force et on écrit

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}), \quad (4.51)$$

où $\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})$ est défini par identification de (4.51) avec (4.50). A l'exception du cas du plasma infini et homogène, cette équation de mouvement doit être complétée par des conditions aux limites physiques appropriées. Malheureusement, en MHD, les conditions aux limites constituent un sujet compliqué parce que la conductibilité infinie permet des courants de surface. Dans un but de simplicité, on considère d'abord un plasma homogène et infini.

2. Plasma homogène et infini

L'homogénéité implique $\mathbf{j}_0 = 0$, $\mathbf{B}_0 = \text{const}$, $p_0 = \text{const}$. L'équation de mouvement (4.50) devient alors

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \gamma_{ad} p_0 \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{\mu_0} \{ \nabla \times [\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0)] \} \times \mathbf{B}_0 \quad (4.52)$$

C'est une équation différentielle à coefficients constants où un ansatz de Fourier-Laplace

$$\boldsymbol{\xi} \sim \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

nous mène à une relation de dispersion. L'éq.(4.52) devient alors

$$-\rho_0\omega^2\xi = -\gamma_{ad}p_0\mathbf{k} : \mathbf{k} \cdot \xi - \frac{1}{\mu_0} \{ \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times (\xi \times \mathbf{B}_0)] \} \times \mathbf{B}_0$$

En utilisant deux fois l'identité vectorielle $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ on trouve

$$\begin{aligned} -\mu_0\rho_0\omega^2\xi = & -\mathbf{k} \{ (B_0^2 + \mu_0\gamma_{ad}p_0)\mathbf{k} \cdot \xi - (\xi \cdot \mathbf{B}_0)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \} + \\ & + \mathbf{B}_0(\mathbf{k} \cdot \xi)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) - \xi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2 \equiv \mu_0\mathbf{F}_{hom}(\xi) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Cette équation est un problème aux valeurs propres qui, avec $\xi \neq 0$ nous fournira la relation de dispersion des ondes MHD.

L'opérateur de force MHD est assez compliqué, même dans un plasma homogène, à cause de l'anisotropie introduite par le champ magnétique. Notons que l'opérateur $\mathbf{F}_{hom}(\)$ est symétrique (ou auto-adjoint) dans le sens que

$$\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{F}_{hom}(\xi) = \xi \cdot \mathbf{F}_{hom}(\boldsymbol{\eta}) \quad \forall \xi, \boldsymbol{\eta}. \quad (4.54)$$

Par conséquent, l'équation (4.53) doit avoir trois solutions réelles pour ω^2 avec 3 vecteurs propres ξ correspondant à trois polarisations (ou "branches") d'onde.

Pour l'analyse des différentes solutions de l'éq. (4.53), il est utile d'introduire un système de coordonnées. Nous choisissons l'axe z parallèle au champ magnétique et le vecteur d'onde dans le plan $(x - z)$:

$$\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{k} = k_x\mathbf{e}_x + k_z\mathbf{e}_z.$$

On obtient pour les 3 composantes de l'éq.(4.53) :

$$\begin{aligned} \rho_0\omega^2\xi_x &= \left(\frac{k^2 B_0^2}{\mu_0} + k_x^2 \gamma_{ad} p_0 \right) \xi_x & + & k_x k_z \gamma_{ad} p_0 \xi_z \\ \rho_0\omega^2\xi_y &= & \frac{k_z^2 B_0^2}{\mu_0} \xi_y & \\ \rho_0\omega^2\xi_z &= k_x k_z \gamma_{ad} p_0 \xi_x & + & k_z^2 \gamma_{ad} p_0 \xi_z \end{aligned} \quad (4.55)$$

où $k^2 = k_x^2 + k_z^2$.

La discussion des ondes Alfvén et magnétosonores qui suit est tirée du cours MHD de A. Bondeson.

Les ondes d'Alfvén

L'équation (4.55) montre que la composante y de déplacement, qui est orthogonale au champ magnétique ainsi qu'au vecteur d'onde, est découplée des deux autres composantes et satisfait simplement $\mu_0\rho_0\omega^2\xi_y = k_z^2 B_0^2 \xi_y$. Ceci conduit directement

à une expression pour la fréquence ω en fonction du vecteur d'onde $\mathbf{k}$, appelée la relation de dispersion :

$$\omega^2 = k_z^2 v_A^2 = k_z^2 \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0}. \quad (4.56)$$

Dans l'équation (4.55), la vitesse d'Alfvén,

$$v_A = \frac{B_0}{(\mu_0 \rho_0)^{1/2}} \quad (4.57)$$

représente la vitesse caractéristique d'un signal propagé par des perturbations magnétiques. L'autre vitesse caractéristique du modèle MHD est la vitesse sonore $v_s = (\gamma_{ad} p_0 / \rho_0)^{1/2}$; en cinétique nous avons défini la vitesse sonore un peu différemment, voir éq.(2.143), ou dans la notation actuelle, $(p_{e0} / \rho_0)^{1/2}$.

Nous voyons que les ondes d'Alfvén ne perturbent ni la densité ni la pression du fluide, parce que le déplacement est strictement transversal ($\boldsymbol{\xi} \perp \mathbf{k}$) et les mouvements du plasma sont donc incompressibles : $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$. La perturbation du champ magnétique, éq.(4.49) est perpendiculaire au champ d'équilibre : $\mathbf{B}_1 = ik_z B_0 \xi_y \mathbf{e}_y$, Fig.4.12.

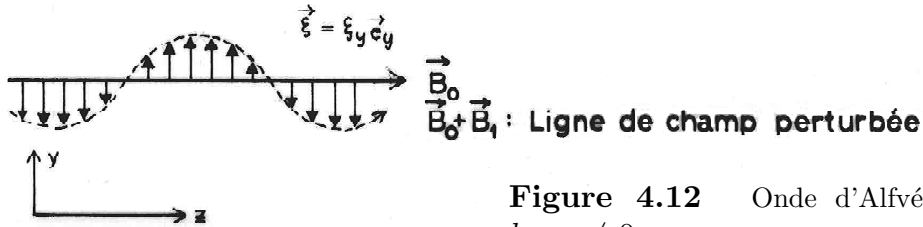


Figure 4.12 Onde d'Alfvén avec $\omega = k_{\parallel} v_A \neq 0$

Ceci veut dire que la pression magnétique, éq.(4.28), n'est pas perturbée $\left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right)_1 = \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1}{\mu_0} = 0$, à l'instar de la pression thermique. Donc, les ondes d'Alfvén changent uniquement la direction des lignes de champ et ne compriment ni le champ magnétique, ni le fluide. La force qui essaie de rétablir l'équilibre et qui produit les oscillations est due à la tension des lignes de champ [deuxième terme de la force magnétique dans l'éq.(4.27)] !

Pour les ondes d'Alfvén transversales, les lignes de champ se comportent exactement comme des cordes tendues. La relation de dispersion (4.56) montre que la fréquence ω ne dépend que de k_z et qu'elle est donc complètement indépendante des variations dans les directions perpendiculaires au champ d'équilibre. Par conséquent, chaque ligne de champ oscille indépendamment des autres. De plus, comme $\omega = \pm k_z v_A$, les perturbations se propagent avec la vitesse d'Alfvén dans les deux directions des lignes de champ sans changer de forme.

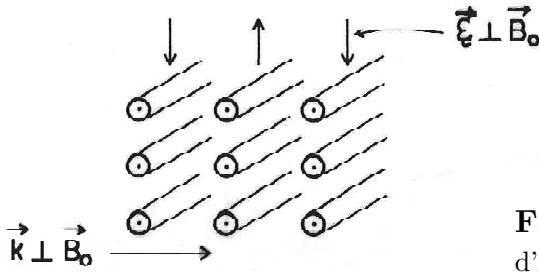


Figure 4.13 Perturbation du type onde d'Alfvén avec $\omega = 0$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$.

Nous savons que ω^2 est toujours réel en MHD idéale; une instabilité ne peut donc apparaître que si $\omega^2 < 0$. La relation de dispersion (4.56) montre que les ondes d'Alfvén sont stables ($\omega^2 \geq 0$) dans une zone homogène, mais certaines perturbations sont au seuil de stabilité $\omega^2 = 0$, Fig.4.13.

Ceci arrive quand $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$ (dans notre géométrie quand $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x$) et que les trois vecteurs $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{k}$ et $\boldsymbol{\xi}$ sont tous perpendiculaires. Dans ce cas, le déplacement ne courbe pas les lignes de champ et ne comprime ni le champ magnétique, ni le plasma. Un tel déplacement ne produit donc pas de force.

Cela montre qu'un plasma magnétisé (et homogène) ne peut pas s'opposer à certains type de déplacement. Ce genre de déplacement joue un rôle important dans les instabilités d'équilibres plus compliqués où les différentes polarisations sont couplées par l'inhomogénéité.

Ondes magnéto-sonores

L'équation (4.55) montre que les composantes du déplacement dans le plan $(x-z)$ de $\mathbf{B}_0$ et de $\mathbf{k}$ sont couplées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \rho_0 \omega^2 \xi_x &= \left(\frac{k^2 B_0^2}{\mu_0} + k_x^2 \gamma_{ad} p_0 \right) \xi_x + k_x k_z \gamma_{ad} p_0 \xi_z, \\ \rho_0 \omega^2 \xi_z &= k_x k_z \gamma_{ad} p_0 \xi_x + k_z^2 \gamma_{ad} p_0 \xi_z, \end{aligned} \quad (4.58)$$

où $k^2 = k_x^2 + k_z^2$. La condition pour qu'une solution non triviale existe donne la relation de dispersion

$$\omega^4 - \omega^2 (v_A^2 + v_s^2) k^2 + v_A^2 v_s^2 k^2 k_z^2 = 0,$$

qui a les deux solutions

$$\omega^2 = \frac{1}{2} (v_A^2 + v_s^2) k^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} (v_A^2 + v_s^2)^2 k^4 - v_A^2 v_s^2 k^2 k_z^2}. \quad (4.59)$$

Les deux types d'ondes associés sont appelés ondes magnéto-sonore rapide [+ dans (4.59)] et lente [- dans (4.59)]. Nous voyons qu'en général, le déplacement perturbe à la fois le champ magnétique et la pression thermique, pour les deux polarisations,

parce que les fréquences sont influencées par les vitesses d'Alfvén et du son. Pour mieux comprendre les caractéristiques de ces deux types d'ondes, il est utile de considérer la limite de $\beta \ll 1$, où la vitesse sonore est nettement inférieure à celle d'Alfvén :

$$\frac{v_s^2}{v_A^2} = \frac{\mu_0 \gamma_{ad} p}{B_0^2} = \frac{\gamma_{ad}}{2} \beta \ll 1 \quad (4.60)$$

Dans cette limite, les deux solutions de l'éq.(4.59) sont approximativement

$$\omega^2 = v_A^2 k^2, \quad \boldsymbol{\xi} = \xi_x \mathbf{e}_x, \quad \text{magnéto-sonore rapide,} \quad (4.61)$$

$$\omega^2 = v_s^2 k_z^2, \quad \boldsymbol{\xi} = \xi_z \mathbf{e}_z, \quad \text{magnéto-sonore lente.} \quad (4.62)$$

Selon l'équation (4.61), les ondes magnéto-sonores rapides se propagent d'une manière isotrope (ce qui est approximativement juste même pour $\beta = 0(1)$), mais malgré la vitesse de propagation isotrope, le déplacement est perpendiculaire au champ dans le plan généré par $\mathbf{k}$ et $\mathbf{B}_0$. Ce type d'ondes est parfois appelé onde d'Alfvén de pression ("compressional Alfvén wave" en anglais) alors que les ondes d'Alfvén, éq.(4.56) sont appelées ondes d'Alfvén transversales ("shear Alfvén wave"). En fait, dans le cas des ondes "de pression", le champ est comprimé et courbé selon la direction de propagation :

$$\mathbf{B}_1 = i [\boldsymbol{\xi}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) - \mathbf{B}_0(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi})] \approx i \xi_x B_0 (k_z \mathbf{e}_x - k_x \mathbf{e}_z). \quad (4.63)$$

Les ondes qui se propagent le long des lignes de champ ($\mathbf{k} = k_z \mathbf{e}_z$) sont donc transversales et perturbent la direction de $\mathbf{B}$ alors que les ondes qui se propagent dans la direction perpendiculaire au champ sont longitudinales et en perturbent l'intensité, Fig.4.14.

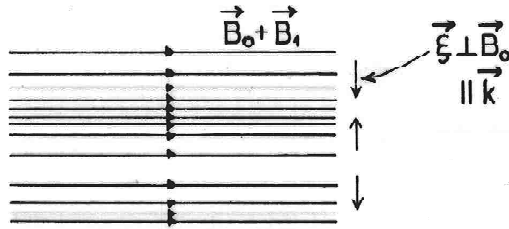


Figure 4.14 Onde magnéto-sonore rapide (onde d'Alfvén de pression) dans le cas $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$.

Notons que dans le cas de propagation parallèle au champ, les ondes "de pression" et transversales sont toutes les deux transversales et effectivement inséparables, alors qu'elles se comportent très différemment dans le cas de propagation perpendiculaire.

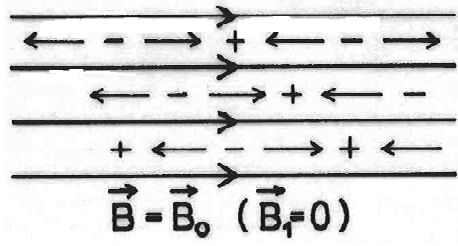


Figure 4.15 Onde magnéto sonore lente (onde sonore ionique).

Finalement, les ondes magnéto sonores lentes [– dans (4.59), ou (4.62)] se propagent le long des lignes de champ, parce que $\omega \approx \pm v_s k_z$ et le déplacement est presque parallèle au champ $\xi = \xi_z \mathbf{e}_z$, Fig.4.15.

De toute évidence, ce sont des ondes sonores ioniques où, dans la limite de $\beta \ll 1$, le déplacement est réduit à la direction du champ parce que l'onde a une énergie cinétique (fréquence) insuffisante pour perturber le champ magnétique.

Avec β fini, les modes magnéto sonores lents se propagent faiblement dans la direction perpendiculaire. Néanmoins, même avec β fini, la relation de dispersion (4.59) montre que la fréquence la plus basse a une limite finie lorsque $k_x \rightarrow \infty$ et k_z est fixe.

$$\omega^2(k_x = \infty) = \frac{v_A^2 v_s^2}{v_A^2 + v_s^2} k_z^2 \quad (4.64)$$

Ceci veut dire qu'une discontinuité de type sonore dans la direction perpendiculaire ne bouge pas au cours du temps.

Il faut noter que les ondes sonores sont liées aux mouvements du fluide le long des lignes de champ. En fait, ce sont les ondes ionique-acoustiques rencontrées dans le chapitre 2. Elle sont donc en réalité fortement amorties par la résonance entre l'onde et le mouvement thermique des ions (l'amortissement de Landau), sauf si $T_e \gg T_i$. En fait, pour des distributions Maxwelliennes, il faut que $\frac{T_e}{T_i}$ soit au moins de l'ordre de 3 pour qu'une "onde" sonore existe. Heureusement pour l'applicabilité des équations MHD, les ondes sonores ne jouent qu'un très petit rôle pour les instabilités, qui est de permettre que la pression reste constante sur les lignes de champ dans la configuration déplacée. Cette propriété est correctement décrite par l'approximation MHD.

3. Le plasma confiné et les conditions aux bords

Le modèle MHD sert surtout à l'analyse de la stabilité macroscopique de plasmas confinés ("équilibres et stabilité MHD"). Dans ce but on modélise d'une façon idéalisée le plasma entouré d'un vide et d'une coque métallique de conductibilité infinie, Fig.4.16

Le plasma est décrit par l'équation de mouvement, éq. (4.50), tandis que dans le vide les équations de Maxwell (sans le courant de déplacement)

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0, \quad (4.65)$$

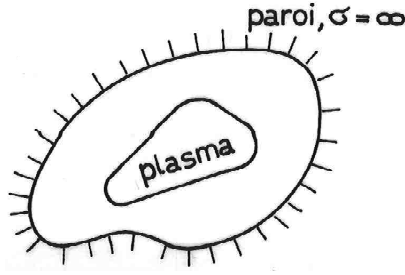


Figure 4.16 Le modèle usuel d'un plasma confiné : le plasma est entouré d'un vide et d'une coque métallique.

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = 0, \quad (4.66)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}, \quad (4.67)$$

doivent être satisfaites. L'équation (4.66) est souvent résolue avec l'ansatz

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \Psi. \quad (4.68)$$

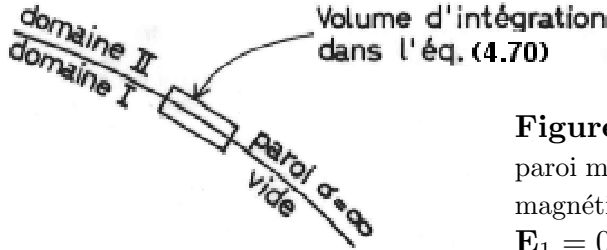


Figure 4.17 L'interface paroi-vide. Dans la paroi métallique ($\sigma = \infty$, domaine II) le champ magnétique perturbé, $\mathbf{B}_1 = 0 \forall t$ parce que $\mathbf{E}_1 = 0 \forall t$.

Ce qui reste à résoudre dans le vide suit alors de l'éq. (4.65),

$$\Delta \Psi = 0, \quad (4.69)$$

l'éq. (4.67) n'intervenant que pour les conditions aux bords. Comme le champ variant avec le temps, $\mathbf{B}_1$, ne peut pas pénétrer dans la paroi conductrice, Fig.4.17, on obtient du théorème de Gauss

$$0 = \iiint d^3r \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = \oiint d\sigma \cdot \mathbf{B}_1 = \text{aire} \times \left(B_{1n}^I - \underbrace{B_{1n}^{II}}_{=0} \right) \longrightarrow \underbrace{B_{1n}}_{\text{à la paroi}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\mathbf{n} \cdot \nabla \Psi = 0} \quad \text{à la paroi } \sigma = \infty \quad (4.70)$$

La composante normale du champ magnétique doit être nulle à la surface de la paroi (équivalent à "le champ ne peut pas pénétrer" et "lignes gelées"!).

Il nous reste à discuter les conditions de raccordement ("matching conditions") des solutions ξ et Ψ à l'interface plasma-vide. La difficulté ici est que l'interface bouge.

Comme les équations différentielles (4.50) et (4.69) sont du deuxième ordre dans la direction de la normale à l'interface, deux conditions sont nécessaires. On les obtient en exploitant la continuité du champ électrique tangentiel et de la pression totale.

Continuité de la pression totale (bilan de pression)

La première condition s'obtient en exigeant que l'accélération de la surface du plasma soit finie. La composante perpendiculaire de la force, éq. (4.27), agissant sur une couche infiniment mince qui contient la surface, Fig.4.18, doit être nulle, la couche ($\varepsilon \rightarrow 0$) ne contenant aucune masse.

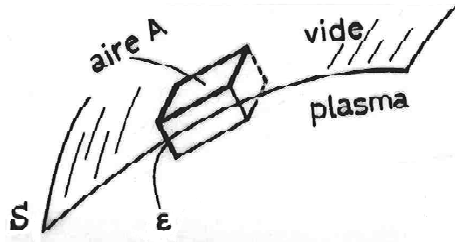


Figure 4.18 L'interface plasma-vide.

Comme les lignes de champ ($\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_1$, lignes gelées!) sont parallèles à la surface, la composante perpendiculaire à la surface de la force magnétique, éq.(4.27), est donnée entièrement par le gradient de la pression totale, $p + B^2/2\mu_0$. La raison en est que le terme $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ est fini parce que $\mathbf{B}$ ne peut pas sauter dans la direction de ses propres lignes de force ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$). Par contre, la densité de force, éq. (4.27), serait infinie dans la couche si la pression totale présentait une discontinuité, p et B étant finis des deux côtés de S . Il faut donc exiger que la pression totale soit identique des deux côtés de la surface S .

$$\left[p + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right]_S = 0. \quad (4.71)$$

Cette notation signifie que le saut de $p + \frac{B^2}{2\mu_0}$ à travers S est nul. L'équation (4.71) s'applique d'une façon indépendante à l'équilibre et à l'ordre 1. Dans le premier cas on obtient trivialement

$$\left[p + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right]_{S_0} = 0, \quad (4.72)$$

ou

$$p_0 + \frac{1}{2\mu_0} B_{0p}^2 = \frac{1}{2\mu_0} B_{0v}^2 \text{ sur } S_0. \quad (4.73)$$

Les indices p et v indiquent ici les côtés plasma et vide de la surface S_0 . On remarque que le champ magnétique n'est pas continu à travers la surface si la

pression du plasma est non-nulle au bord. Cela veut dire que des courants de surface maintiennent l'équilibre avec leur force magnétique $\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0$.

Le bilan de pression d'ordre 1 s'obtient en remarquant que la position d'un point $\mathbf{r}$ sur la surface perturbée S s'obtient par

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \xi_n \mathbf{n}_0$$

où $\mathbf{r}_0$ est un point sur S_0 , $\mathbf{n}_0$ la normale à S_0 en ce point et $\xi_n = \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\xi}$. L'éq. (4.71) s'écrit donc, de manière correcte jusqu'au premier ordre

$$\begin{aligned} p_0(\mathbf{r}) + p_1(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2\mu_0} [B_{0p}^2(\mathbf{r}) + 2\mathbf{B}_{0p}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{B}_{1p}(\mathbf{r}_0)] &= \\ &= \frac{1}{2\mu_0} [B_{0v}^2(\mathbf{r}) + 2\mathbf{B}_{0v}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{B}_{1v}(\mathbf{r}_0)] . \end{aligned} \quad (4.74)$$

Les quantités d'argument $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \xi_n \mathbf{n}_0$ peuvent être développées autour de $\mathbf{r}_0$, en particulier

$$p_0(\mathbf{r}) = p_0(\mathbf{r}_0) + \frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{n}_0 \xi_n = p_0(\mathbf{r}_0) + \boldsymbol{\xi} \cdot \underbrace{\nabla p_0}_{\|\mathbf{n}_0\|} \Big|_{\mathbf{r}_0}$$

A l'aide de (4.48) et (4.73) on trouve finalement

$$-2\mu_0 \gamma_{ad} p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} + 2\mathbf{B}_{0p} \cdot \mathbf{B}_{1p} + \xi_n \frac{\partial B_{0p}^2}{\partial n} = 2\mathbf{B}_{0v} \cdot \mathbf{B}_{1v} + \xi_n \frac{\partial B_{0v}^2}{\partial n} \Big|_{S_0} . \quad (4.75)$$

Tous les termes sont ici du premier ordre. Ceci est la première condition de raccordement pour les perturbations. Si on substitue $\mathbf{B}_{1p}$ et $\mathbf{B}_{1v}$ par leurs valeurs tirées des éqs. (4.49) et (4.68) on obtient une relation entre $\boldsymbol{\xi}$ et Ψ à la surface S_0 .

Continuité du champ électrique tangentielle

La loi de Faraday $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$ impose la continuité des composantes tangentielles de $\mathbf{E}$ à travers toute surface, en particulier à travers l'interface plasma-vide. Pour un observateur qui se meut avec la surface la situation est particulièrement simple. Du côté plasma, ce champ est nul, $\mathbf{E}'_{1p}|_{tang} = 0$, car $\sigma = \infty$. On a donc

$$0 = \mathbf{E}'_{1p}|_{tang} = \mathbf{E}'_{1v}|_{tang} = \mathbf{E}_{1v} + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_{0v}|_{tang \ S} .$$

Le prime ' désigne les quantités dans le référentiel lié à la surface. Comme cette expression est déjà du premier ordre, elle peut être évaluée en S_0 au lieu de S . On obtient

$$\mathbf{E}_{1v}|_{tang} = -\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_{0v}|_{tang\ S_0}.$$

En appliquant la loi de Faraday à un morceau D de surface S_0

$$\iint_D \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = - \oint_{\delta D} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

on trouve que le champ électrique tangentiel détermine la composante normale du champ magnétique, c'est-à-dire :

$$\mathbf{n}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{n}_0 \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_{tang})|_{S_0}$$

parce que l'équation précédente tient pour tout D . Avec (4.15) et (4.46), on peut donc écrire

$$\mathbf{n}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{1v}}{\partial t} = \mathbf{n}_0 \cdot \nabla \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \times \mathbf{B}_{0v} \right) \Big|_{S_0},$$

soit

$$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{B}_{1v} = \mathbf{n}_0 \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_{0v})|_{S_0}. \quad (4.76)$$

On en tire la deuxième condition de raccordement entre $\boldsymbol{\xi}$ et Ψ en exprimant $\mathbf{B}_{1v}$ en fonction de Ψ , éq. (4.68).

4.6. La stabilité MHD

1. Le problème à valeur propre

Les mouvements de faible amplitude d'un plasma confiné sont décrits par les Eqs (4.50), (4.69), (4.70), (4.75) et (4.76). L'analyse des mouvements possibles se fait avantageusement par la recherche des mouvements propres. En supposant la dépendance temporelle de $\boldsymbol{\xi}$ et de Ψ en $\exp(-i\omega t)$ l'éq. (4.51) prend la forme d'un problème à valeur propre linéaire,

$$-\omega^2 \rho_0(\mathbf{r}) \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}), \quad (4.77)$$

$\mathbf{F}$ étant un opérateur différentiel linéaire du 2^{ème} ordre, voir l'éq. (4.50),

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = -\mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad (4.78)$$

qui a la forme d'une force de ressort. Sous les conditions aux limites discutées plus haut, cet opérateur est auto-adjoint. On peut montrer que

$$\int_{\text{plasma}} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\xi} \, d^3r = \int_{\text{plasma}} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d^3r, \forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \text{ satisfaisant les cond. aux limites} \quad (4.79)$$

La démonstration peut être trouvée dans un article de B.B. Kadomtsev [†] Elle est longue et assez difficile. La conséquence immédiate est que $\omega^2 \in \mathbf{IR}$. Si toutes les valeurs propres ω^2 sont positives le plasma est stable et les seuls mouvements possibles sont des ondes. Si, par contre, on trouve une valeur ω^2 négative, le plasma est instable. Une instabilité de la MHD idéale n'oscille pas mais croît exponentiellement comme $e^{\gamma t}$ où $\gamma = +\sqrt{-\omega^2}$, en contraste avec les instabilités cinétiques qui, en général, croissent en oscillant.

Pour déterminer le spectre de ω^2 on peut directement résoudre les équations différentielles (4.50) et (4.69) avec les contraintes (4.70), (4.75) et (4.76). Cela n'est possible analytiquement que dans des cas très simples. Dès que les profils sont inhomogènes ou que l'équilibre est torique, ces problèmes doivent être résolus numériquement. L'approche numérique est aujourd'hui l'approche normale, les développements importants s'étant faits dans les années 70 (1D, 2D) et 80 (2D, 3D).

Grâce au fait que l'opérateur $\mathbf{K}$ est auto-adjoint, il est possible de formuler un principe variationnel qui est équivalent à nos éqs (4.50), (4.69), (4.70), (4.75) et (4.76). Ce principe, que l'on appelle "le principe d'énergie", est d'une grande aide pour se faire une idée générale de la stabilité d'une configuration compliquée. Il est aussi utilisé comme point de départ pour les approches numériques.

2. Le principe d'énergie

Partant des éqs (4.77) et (4.78), donc de

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = -\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad (4.80)$$

on peut écrire

$$\int_{\text{plasma}} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \cdot \rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} \, d^3r = - \int_{\text{plasma}} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\xi} \, d^3r, \quad (4.81)$$

et avec l'aide de (4.79)

[†] B.B. Kadomtsev, "Hydromagnetic Stability of a Plasma", dans *Reviews of Plasma Physics*, ed. M. A. Leontovich, Consultants Bureau, New York 1966, Vol. 2, pp 153 - 199.

$$\int_{\text{plasma}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right)^2 d^3r + \int_{\text{plasma}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\xi} d^3r = 0 \quad (4.82)$$

Cette équation exprime formellement la conservation de l'énergie.

A l'ordre où l'on travaille ici, l'interface plasma-vide peut être prise comme fixe en S_0 et il est possible d'inverser l'ordre de l'intégrale et de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$:

$$\frac{d}{dt} \left[\underbrace{\int_{\text{plasma}} \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right)^2 d^3r}_{\equiv T} + \underbrace{\int_{\text{plasma}} \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\xi} d^3r}_{\equiv W} \right] = 0 \quad (4.83)$$

Le premier terme représente l'énergie cinétique du plasma T , le deuxième l'énergie potentielle W . Cette dernière est formée d'une partie magnétique et d'une partie thermique (pression!). L'énergie magnétique du vide est aussi incluse (à travers les conditions de raccordement!). Il existe différentes formes explicites pour W , chacune entre elles ayant ses mérites dans des circonstances différentes. On donne ici deux formes explicites :

$$W = W_p + W_s + W_v, \quad (4.84)$$

où

$$W_p = \frac{1}{2} \int_{\text{plasma}} \left[\frac{\mathbf{B}_1^2}{\mu_0} - p_1 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_1) \right] d^3r, \quad (4.85)$$

$$W_s = \frac{1}{2} \oint_{S_0} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\xi})^2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\mathbf{B}_{0v}^2}{2\mu_0} - \frac{\mathbf{B}_{0p}^2}{2\mu_0} - p_0 \right) d\sigma, \quad (4.86)$$

$$W_v = \frac{1}{2} \int_{\text{vide}} \frac{\mathbf{B}_1^2}{\mu_0} d^3r. \quad (4.87)$$

S'il n'y a pas de courant de surface au bord du plasma (S_0), W_s , l'énergie potentielle de la surface est nulle. La deuxième forme explicite s'obtient directement de $\int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) d^3r$ par une intégration par partie. Le résultat est W_p et

$$W_s + W_v = \frac{1}{2} \oint_{S_0} \left(p_1 + \frac{\mathbf{B}_{0p} \cdot \mathbf{B}_{1p}}{\mu_0} \right) (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}) d\sigma. \quad (4.88)$$

Notez que la littérature anglo-saxonne utilise le symbole δW pour $\frac{1}{2} \int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\xi} d^3r$ en arguant que, pour $\boldsymbol{\xi}$ infinitésimal, cette expression constitue le changement (d'où δ) de l'énergie potentiel **total**, W , lorsqu'on perturbe un équilibre (dans ce cas, le changement de première ordre en $\boldsymbol{\xi}$ est nul ; voir par exemple dans le livre de K. Nishikawa et M. Wakatani, "Plasma Physics", Springer 1990, 1994)

Les formes de T et W établies, le "principe d'énergie" n'est rien d'autre que le principe de moindre action de la mécanique

$$\delta \int L dt = 0 \quad (4.89)$$

où le lagrangien $L = T - W$. A partir de l'éq. (4.89), on peut effectivement retrouver toutes les équations d'origine, (4.50), (4.69), (4.75) et (4.76). Les détails peuvent être trouvés dans l'article de Kadomtsev cité plus haut.

Cela établi, on peut se servir de théorèmes généraux de la mécanique (ou des maths) qui montrent que le système en question est stable si et seulement si la fonctionnelle W est définie positive pour tout déplacement $\boldsymbol{\xi}$ (et Ψ) satisfaisant les conditions aux limites. En d'autres termes, le minimum de W doit être positif. Il est facile à voir que cette condition est suffisante pour la stabilité en récrivant le problème à valeur propre, l'éq. (4.77) en se servant de (4.78),

$$\omega^2 \rho_0 \boldsymbol{\xi} = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\xi}. \quad (4.90)$$

Pour chaque mode propre l ($\omega_l, \boldsymbol{\xi}_l$) on peut former le "quotient de Rayleigh",

$$\omega_l^2 = \frac{\int \boldsymbol{\xi}_l \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\xi}_l d^3r}{\int \rho_0 \boldsymbol{\xi}_l^2 d^3r} = \frac{2W(\boldsymbol{\xi}_l)}{\int \rho_0 \boldsymbol{\xi}_l^2 d^3r} \quad (4.91)$$

qui est non-négatif (mode stable !) si $W(\boldsymbol{\xi}_l) \geq 0$. Si tous les modes propres (qui forment une base de l'espace fonctionnel des perturbations $\boldsymbol{\xi}, \Psi$, physiquement possibles) ont des valeurs propres positives, $\omega_l^2 > 0$, le plasma est stable.

Inversement, si on trouve un déplacement **quelconque** satisfaisant toutes les conditions aux limites, le plasma est instable et il existe au moins une valeur propre négative. La démonstration se fait en deux pas :

a) Les modes propres sont orthogonaux sous la mesure $\rho_0(\mathbf{r})$ ou peuvent être orthogonalisés en cas de dégénérescence de valeurs propres. Soient ω_ℓ et $\omega_{\ell'}$ deux valeurs propres différentes ; on a alors

$$\begin{aligned} \omega_\ell^2 \rho_0(\mathbf{r}) \boldsymbol{\xi}_\ell(\mathbf{r}) &= \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\xi}_\ell, \\ \omega_{\ell'}^2 \rho_0(\mathbf{r}) \boldsymbol{\xi}_{\ell'}(\mathbf{r}) &= \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\ell'}, \end{aligned}$$

d'où suit trivialement

$$\begin{aligned}\omega_l^2 \int \boldsymbol{\xi}_{l'} \cdot \boldsymbol{\xi}_l \rho_0(\mathbf{r}) d^3r &= \int \boldsymbol{\xi}_{l'} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\xi}_l d^3r, \\ \omega_{l'}^2 \int \boldsymbol{\xi}_l \cdot \boldsymbol{\xi}_{l'} \rho_0(\mathbf{r}) d^3r &= \int \boldsymbol{\xi}_l \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\xi}_{l'} d^3r.\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{K}$ est auto-adjoint, les expressions à droite sont égales et en soustrayant la deuxième équation de la première on obtient

$$(\omega_l^2 - \omega_{l'}^2) \int \boldsymbol{\xi}_{l'} \cdot \boldsymbol{\xi}_l \rho_0(\mathbf{r}) d^3r = 0$$

ce qui démontre l'orthogonalité : $\int \boldsymbol{\xi}_{l'} \cdot \boldsymbol{\xi}_l \rho_0 d^3r = 0$ si $\omega_l^2 \neq \omega_{l'}^2$. Par contre, les modes de la MHD idéale ne sont pas forcément normalisable (une propriété mathématique du modèle !).

b) Soit $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})$ un déplacement satisfaisant toutes les conditions aux limites qui rend $W(\boldsymbol{\xi})$ négatif. En développant $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})$ en termes de fonctions propres, $\boldsymbol{\xi} = \sum_l a_l \boldsymbol{\xi}_l$, on peut écrire

$$\begin{aligned}2W(\boldsymbol{\xi}) &= \int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\xi} d^3r = \\ &= \sum_{l',l} a_l a_{l'} \int \boldsymbol{\xi}_{l'} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\xi}_l d^3r = \sum_{l',l} a_l a_{l'} \int \boldsymbol{\xi}_{l'} \cdot (\omega_l^2 \rho_0 \boldsymbol{\xi}_l) d^3r = \\ &= \sum_{l',l} a_l a_{l'} \omega_l^2 \int \boldsymbol{\xi}_{l'} \cdot \boldsymbol{\xi}_l \rho_0 d^3r = \sum_l a_l^2 \omega_l^2 \int |\boldsymbol{\xi}_l|^2 \rho_0 d^3r.\end{aligned}$$

Dans cette forme, il est évident qu'au moins une valeur ω_l^2 est négative si $W(\boldsymbol{\xi})$ est négative. Notez que dans le cas où des fonctions propres non-normalisables existeraient cet argument se complique mathématiquement.

Remarque :

On peut se faire une idée grossière de la stabilité d'une configuration en étudiant le signe de W pour différentes perturbations $(\boldsymbol{\xi}, \Psi)$ sans résoudre le problème à valeur propre.

3. Plasma non-magnétisé confiné par un champ

Voici une application simple de l'expression de l'énergie potentielle W . Etudions un cas où il n'y a pas de champ magnétique à l'intérieur du plasma de pression $p_0 = \text{const.}$

A l'aide de l'éq. (4.48) l'éq. (4.85) donne

$$W_p = \frac{1}{2} \int_{\text{plasma}} \gamma_{ad} p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})^2 d^3 r. \quad (4.92)$$

Comme du côté plasma $B_{0p} = 0$ et $p_0 = \text{const.}$ l'éq. (4.86) se réduit à

$$W_s = \frac{1}{4\mu_0} \int_{S_0} \xi_n^2 \frac{\partial \mathbf{B}_{0v}^2}{\partial n} d\sigma, \quad (4.93)$$

tandis que (4.87) reste inchangée :

$$W_v = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{vide}} \mathbf{B}_1^2 d^3 r, \quad (4.94)$$

voir Kadomtsev de nouveau. L'énergie potentielle est donnée par la somme, éq. (4.84), des trois contributions plasma, surface et vide. W_p et W_v sont positifs. Le plasma est donc stable si

$$\left. \frac{\partial \mathbf{B}_{0v}^2}{\partial n} \right|_{S_0} > 0 \quad \text{partout,}$$

c'est-à-dire si le champ côté vide de S_0 (le seul en jeu dans ce modèle) augmente dans toutes les directions s'éloignant du plasma. Si, par contre, $\frac{\partial \mathbf{B}_{0v}^2}{\partial n} < 0$ sur une portion de S_0 , on peut toujours trouver au moins une perturbation qui rend W négatif.

Pour simplifier, on se restreint à l'étude des longueurs d'onde suffisamment courtes pour que la surface S_0 puisse être supposée plane. Prenons un système de coordonnées local tel que $\mathbf{e}_x$ est normal à S_0 et $\mathbf{e}_z$ est dans la direction du champ magnétique, $\mathbf{B}_{0v}$, donc $\mathbf{B}_{0v} = (0, 0, B_0(x))$. On montre qu'une perturbation de la forme $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, 0, 0) \exp[i(k_y y + k_z z)]$ rend effectivement W négatif. D'abord, on constate que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0 \rightarrow W_p = 0.$$

La solution dans le vide, $\mathbf{B}_1 = \nabla \Psi$, éq. (4.68), est déterminée par l'éq. (4.69), $\Delta \Psi = 0$. La fonction Ψ doit donc avoir la forme

$$\Psi = \Psi_0 (e^{-x\kappa} + C e^{x\kappa}) e^{i(k_y y + k_z z)}, \quad (4.95)$$

où

$$\kappa = +\sqrt{k_y^2 + k_z^2},$$

et Ψ_0 et C sont des constantes d'intégration à déterminer. Si le vide est semi-infini le champ $\mathbf{B}_1$ ne peut pas croître exponentiellement (énergie infinie !), donc $C = 0$. La condition de raccordement, éq. (4.76), donne pour notre cas simple

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = B_0 \frac{\partial \xi_x}{\partial z}. \quad (4.96)$$

Si on prend $\xi_x = \xi_0 \sin(k_y y + k_z z)$ on a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\kappa \Psi(0) = k_z \xi_0 B_0 \cos(k_y y + k_z z),$$

d'où on conclut que

$$\Psi(x) = -\frac{k_z}{\kappa} \xi_0 B_0 e^{-\kappa x} \cos(k_y y + k_z z). \quad (4.97)$$

Constatant que $\int dy \frac{\cos^2}{\sin^2}(k_y y + k_z z) = \frac{1}{2}$ on obtient de l'éq. (4.93)

$$W_s = \frac{1}{8\mu_0} \int_{\Delta S_0} \xi_0^2 \frac{\partial B_0^2}{\partial x} d\sigma, \quad (4.98)$$

où ΔS_0 désigne la partie de la surface S_0 sous étude. L'énergie du vide, éq. (4.94), peut être ramenée à une intégrale sur la surface en effectuant celle sur x ; on utilise aussi $\mathbf{B}_1 = \nabla \Psi$:

$$\begin{aligned} W_v &= \frac{1}{4\mu_0} \int_{\Delta S_0} \frac{k_z^2}{\kappa^2} \xi_0^2 B_0^2 \underbrace{(\kappa^2 + k_y^2 + k_z^2)}_{2\kappa^2} d\sigma \underbrace{\int_0^\infty e^{-2\kappa x} dx}_{1/2\kappa} \\ &= \frac{1}{4\mu_0} \int_{\Delta S_0} \frac{k_z^2}{\kappa} \xi_0^2 B_0^2 d\sigma \end{aligned} \quad (4.99)$$

En combinant $W_p = 0$ et les éqs (4.98) et (4.99) on trouve, éq. (4.84),

$$W = \frac{1}{4\mu_0} \int_{\Delta S_0} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial B_0^2}{\partial x} + \frac{k_z^2}{\kappa} B_0^2 \right] \xi_0^2 d\sigma. \quad (4.100)$$

Avec $\frac{\partial B_0^2}{\partial x} < 0$ l'énergie potentielle devient négative pour $k_z^2/\kappa \rightarrow 0$ (ou $k_z \ll k_y$), c'est-à-dire si la longueur d'onde de la perturbation est grande dans la direction du champ magnétique. On trouve ainsi la perturbation la plus instable.

Ce genre de perturbation est désignée par le mot "flute" ou "interchange". Le champ magnétique est peu perturbé parce que les lignes sont peu déformées ou comprimées. Elles sont déplacées plus ou moins parallèlement l'une par rapport à l'autre. Cette instabilité est très similaire à l'instabilité "Rayleigh-Taylor" qui se manifeste à l'interface de deux liquides de densité différente si le liquide lourd repose sur le léger (p. ex. "eau sur huile" est un équilibre instable). L'instabilité se manifeste par un échange ("interchange") de volumes comme dans le cas de l'instabilité "flute" du plasma.

Dans un tokamak, où $B_\varphi \sim 1/r$, il est inévitable d'avoir $\frac{\partial B_{0\varphi}^2}{\partial n} < 0$ à l'extérieur de l'anneau. On s'attend alors à y voir des instabilités se développer. Ces instabilités s'appellent "ballooning modes" parce qu'elles gonflent le champ magnétique localement comme s'il y avait un endroit faible (dans la "chambre à air" représentée par une surface magnétique). Les modes "ballooning" peuvent être stabilisés sous certaines conditions ; quand ils ne le sont pas, ils dégradent fortement le confinement.

4. La striction confinée par un courant de surface [†]

Une étude de stabilité complète d'une configuration expérimentalement réalisable demande des moyens numériques considérables. Il existe quelques configurations très, très idéalisées qui peuvent être étudiées analytiquement. La striction confinée par un courant de surface en fait partie.

La démarche ici est de montrer à quel point cette configuration est idéalisée, de discuter rapidement comment on peut obtenir les modes associés aux fréquences propres les plus instables du système et de citer ensuite les résultats. Malgré les simplifications, ces derniers présentent un certain intérêt pour les tokamaks.

La configuration est celle d'un plasma cylindrique (r, θ, z) de rayon a , de pression p_0 et de densité ρ_0 constantes ; le plasma est plongé dans un champ magnétique axial constant, $\mathbf{B}_{0p} = (0, 0, B_{0p})$. Sur la surface du plasma circulent des courants (de surface) dans les directions axiale, J_z , et azimutale J_θ .

Le courant de surface J_z produit un courant axial total,

$$I = 2\pi a J_z.$$

Ce courant crée un champ azimutal d'intensité

[†] Voir "surface layer pinch" chez Kadomtsev, repris aussi par Cairns, "Plasma Physics", pp 34 - 39.

$$\frac{\mu_0}{2\pi r} I$$

dans le vide (dans le plasma ce champ est nul) ; voir la loi d'Ampère, éq. (4.17). Le courant azimuthal, lui, crée une discontinuité du champ axial à travers la surface

$$\left[B_{0z} \right] = -\mu_0 J_\theta. \quad (4.101)$$

Le champ magnétique à l'extérieur du plasma est donc donné par

$$\mathbf{B}_{0v} = \left(0, \frac{\mu_0}{2\pi r} I, B_{0p} - \mu_0 J_\theta \right). \quad (4.102)$$

Des 4 quantités libres, p_0 , B_{0p} , I et J_θ , une est déterminée par le bilan de pression appliquée aux champs de l'équilibre, éq. (4.73).

Comme le terme $p_1 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}$ dans l'éq. (4.85) contient le terme $\gamma_{ad} p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})^2$, voir éq. (4.48), toujours stabilisant, on ne cherche que des déplacements satisfaisant $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$, les plus instables.

Avec l'ansatz

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}) \\ \Psi(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(r) \\ \Psi(r) \end{bmatrix} e^{im\theta + ikz},$$

les équations (4.50) et (4.69) se réduisent à

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \begin{bmatrix} P(r) \\ \Psi(r) \end{bmatrix} = 0, \quad (4.103)$$

où $P = p_1 + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_{0p} / \mu_0$ est la pression totale linéarisé, une quantité importante en MHD. Les arguments nécessaires pour arriver de (4.50) à (4.103) sont les suivants. Comme p_0 et $\mathbf{B}_{0p} = B_{0p} \mathbf{e}_z$ sont des constantes, on a $p_1 = 0$ ($\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$!) ainsi que $\mathbf{B}_1 = ik B_{0p} \boldsymbol{\xi}$ à l'aide des éqs. (4.48) et (4.49). L'éq. (4.50) se réduit alors à

$$-\omega^2 \rho_0 \boldsymbol{\xi} = \frac{ik B_{0p}}{\mu_0} (\nabla \times \boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{B}_{0p},$$

ce qui peut être écrit comme

$$\left(-\omega^2 \rho_0 + \frac{k^2 B_{0p}^2}{\mu_0} \right) \boldsymbol{\xi} = -\nabla P. \quad (4.104)$$

Avec $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$, l'éq.(4.104) fournit $\Delta P = 0$ et donc la partie supérieure de l'éq.(4.103).

Les deux équations différentielles (4.103) ont comme solution les fonctions de Bessel modifiées[†],

$$C_1 I_m(kr) + C_2 K_m(kr). \quad (4.105)$$

La fonction $K_m(x)$ a un pôle en $x = 0$, et $I_m(x) \rightarrow \infty$ pour $x \rightarrow \infty$. On a donc

$$P(r) = P(a) \frac{I_m(kr)}{I_m(ka)} \quad (4.106)$$

et

$$\Psi(r) = \Psi(a) \frac{K_m(kr)}{K_m(ka)}, \quad (4.107)$$

si le vide qui entoure le plasma s'étend jusqu'à l'infini. Les deux constantes, $P(a)$ et $\Psi(a)$, sont nos inconnues restantes. Le déplacement $\boldsymbol{\xi}(r)$ s'obtient de $P(r)$ à l'aide de l'éq. (4.104).

Pour résoudre le problème complètement, il faut encore que $\boldsymbol{\xi}(r)$ et $\Psi(r)$ satisfassent les conditions de raccordement (4.75) et (4.76), deux relations linéaires qui prendront la forme (symbolique) :

$$\begin{aligned} A_{11}(k, m, a, \omega)P(a) + A_{12}(k, m, a, \omega)\Psi(a) &= 0, \\ A_{21}(k, m, a, \omega)P(a) + A_{22}(k, m, a, \omega)\Psi(a) &= 0. \end{aligned}$$

Une solution non-nulle pour $P(a)$ et $\Psi(a)$, donc pour $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})$ et $\Psi(\mathbf{r})$, s'obtient seulement quand le déterminant de ce système linéaire disparaît :

$$A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} = 0. \quad (4.108)$$

C'est l'équation qui fournit les fréquences propres recherchées : la relation de dispersion des modes propres. Le calcul détaillé donne

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{B_{0p}^2}{\mu_0 \rho_0} - \frac{\left(\frac{m}{a} B_{0v\theta} + k B_{0vz}\right)^2}{\mu_0 \rho_0 k^2} \frac{I'_m(ka) K_m(ka)}{I_m(ka) K'_m(ka)}$$

[†] M. Abramowitz + I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publ., Inc., New York, 1970

$$-\frac{B_{0v\theta}^2}{\rho_0\mu_0ak} \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)}. \quad (4.109)$$

au lieu de l'éq. (4.108).

Le plasma est instable si $\omega^2 < 0$. Comme $I_m(x) > 0$ et $I'_m(x) > 0$ alors que $K_m(x) > 0$ mais $K'_m(x) < 0$, seul le dernier terme dans l'éq. (4.109) est négatif et peut provoquer une instabilité. Au vu de l'éq. (4.102) seulement le courant axial J_z (ou I) peut rendre le plasma instable. Ce développement suit de près celui d'A. Cairns (p. 36-39).

Etudions quelques cas spéciaux pour illustrer les instabilités décrites par l'éq. (4.109). Prenons d'abord le cas d'un confinement par un courant de surface axial et un courant azimuthal mais sans champ axial à l'extérieur, $B_{0vz} = 0$. Le cas $m = 0$ est le plus simple, l'éq. (4.109) donne

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{B_{0p}^2}{\mu_0\rho_0} - \frac{B_{0v\theta}^2}{\rho_0\mu_0ak} \frac{I'_0(ka)}{I_0(ka)}. \quad (4.110)$$

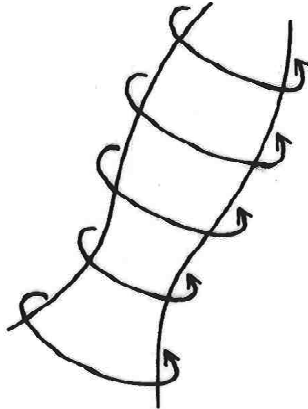


Figure 4.19 L'instabilité "sausage" est une perturbation du type $m = 0$.

Des relations de récurrence pour les fonctions Bessel modifiées on trouve que $I'_0(x) = I_1(x) < \frac{1}{2}xI_0(x) \forall x$. Le plasma est donc stable si $B_{0p}^2 > B_{0v\theta}^2/2$. Si le courant axial dépasse une certaine limite il y a instabilité. Elle a la forme d'une saucisse et s'appelle effectivement "sausage instability" en anglais, Fig.4.19. Sur cette figure, on a dessiné les lignes de champ à l'extérieur du plasma. A l'intérieur il faut tendre les lignes axiales, $\mathbf{B}_{0p} = (0, 0, B_{0p})$. Si elles sont assez fortes l'instabilité n'a pas lieu.

De même manière, on peut discuter les instabilités, $m \neq 0$, et en particulier la plus fameuse, le "kink", l'instabilité hélicoïdale, $m = 1$. Elle a la forme d'une spirale, Fig.4.20.

L'équation (4.109) nous permet même d'étudier le tokamak. Dans ce but, on remplace un tokamak de circonférence $2\pi R$ par un cylindre de longueur $L = 2\pi R$ (R est le rayon majeur du tokamak) en espérant que le cylindre nous donne des

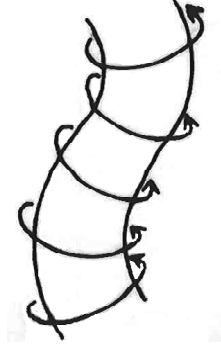


Figure 4.20 Le mode "kink", une perturbation du type $m = 1$, est le mode le plus instable. Il est l'origine de la limite de stabilité de Kruskal-Shafranov, (4.118).

résultats relevant pour un tokamak de grand rapport d'aspect, $R/a \gg 1$. Dans le calcul on se servira du fait que $|B_{0\theta}| \ll |B_{0z}|$ dans une telle configuration ; cette propriété sera vérifiée à posteriori dans l'éq.(4.116).

Faisons l'hypothèse (à vérifier aussi) que $ka \ll 1$ pour les instabilités qui nous intéressent. Avec cela on peut approximer $I_m(x)$ par $(\frac{1}{2}x)^m/m!$ et la fonction $K_m(x)$ par $\frac{1}{2}(m-1)!(\frac{1}{2}x)^{-m}$; ces approximations sont bonnes si $x \ll 1$ (et $m > 0$). En les utilisant dans l'éq. (4.109) on trouve

$$\omega^2 = \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \left[B_{0p}^2 k^2 + \left(\frac{m}{a} B_{0v\theta} + k B_{0vz} \right)^2 - \frac{m}{a^2} B_{0v\theta}^2 \right]. \quad (4.111)$$

Ici, ω^2 est une fonction quadratique en k , elle a son minimum en

$$k_{crit} = -\frac{m}{a} \frac{B_{0v\theta} B_{0vz}}{B_{0p}^2 + B_{0vz}^2}. \quad (4.112)$$

La valeur minimale est

$$\omega_{min}^2 = \frac{B_{0v\theta}^2}{\mu_0 \rho_0 a^2} \left(\frac{B_{0p}^2 m^2}{B_{0p}^2 + B_{0vz}^2} - m \right). \quad (4.113)$$

Si les champs longitudinaux sont dominants, le bilan de pression demande que

$$p_0 + \frac{B_{0p}^2}{2\mu_0} = \frac{B_{0vz}^2}{2\mu_0}.$$

Si on introduit

$$\beta = \frac{p_0}{B_{0v}^2/2\mu_0}, \quad (4.114)$$

on peut récrire l'éq. (4.113) comme

$$\omega_{min}^2 = \frac{B_{0v\theta}^2}{\mu_0 \rho_0 a^2} m \left(m \frac{1-\beta}{2-\beta} - 1 \right). \quad (4.115)$$

Expérimentalement, les équilibres de type tokamak sont limités à $\beta \ll 1$. Dans ces circonstances seuls les modes $m = 1$ et $m = 2$ peuvent être instables. On vérifie aussi que l'hypothèse $ka \ll 1$ est justifiée par $m \leq 2$, $|B_{0v\theta}| \ll |B_{0vz}|$ et l'éq. (4.112). Le mode le plus instable, le kink, $m = 1$, a pour valeur propre, éq. (4.111),

$$\omega^2 = \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \left[k^2 (B_{0p}^2 + B_{0vz}^2) + 2 \frac{k}{a} B_{0v\theta} B_{0vz} \right].$$

Cette valeur est positive (le plasma est stable) si

$$|ka| > \left| \frac{B_{0v\theta}}{B_{0vz}} \right|,$$

où on a utilisé le fait que $B_{0vz} \approx B_{0p}$ car $\beta \ll 1$ dans un tokamak. L'instabilité n'est possible que pour les grandes longueurs d'onde. Dans un tore la longueur d'onde maximale possible est $2\pi R$ car toute perturbation doit être périodique sur cet intervalle. Le tokamak est donc stable si

$$\left| \frac{B_{0v\theta}}{B_{0vz}} \right| < ak_{min} = \frac{2\pi a}{\lambda_{max}} = \frac{a}{R}. \quad (4.116)$$

En introduisant le facteur de sécurité

$$q = \frac{aB_{0z}}{RB_{0\theta}} \quad (4.117)$$

on peut dire que le tokamak est instable si

$$q < 1 \quad (4.118)$$

au bord du plasma. Cette limite de stabilité s'appelle la *condition de Kruskal-Shafranov*; elle reste valable dans un tokamak de rapport d'aspect fini et de profile de courant réel.

4.7. Un problème mathématiquement simple

1. Formulation du problème

Ce problème, qui n'a rien à faire ni avec la MHD ni avec un autre problème physique réel, est utile pour comprendre, par analogie, la démarche dans les paragraphes précédants. On se restreint ici à une dimension spatiale.

Définissons sur l'axe x un domaine "plasma", $0 \leq x \leq 1$, et un domaine "vide", $1 \leq x \leq 2$. Dans le plasma, on se propose de résoudre une équation d'onde pour $\xi(x, t)$ correspondant à l'éq. (4.50) ou, respectivement, à (4.51),

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \equiv F(\xi), \quad \text{dans } 0 \leq x \leq 1, \quad (4.119)$$

et, dans le "vide", un "laplacien" pour $\psi(x, t)$, correspondant à l'éq. (4.69),

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad \text{dans } 1 \leq x \leq 2. \quad (4.120)$$

On va prendre les conditions aux limites et de raccordement en analogie lointaine avec la MHD comme

$$\xi(x = 0, t) = 0, \quad (4.121)$$

$$\xi(x = 1, t) = - \left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=1}, \quad (4.122)$$

$$\left. \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=1} = \psi(x = 1, t), \quad (4.123)$$

et

$$\psi(x = 2, t) = 0. \quad (4.124)$$

La première de ces conditions, (4.121), correspond à une condition sur l'axe en géométrie cylindrique et les trois autres aux équations (4.75), (4.76) et (4.70).

Remarque : Ici, on aurait bien aimé voir la condition

$$\left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=2} = 0,$$

plus près de celle en MHD, (4.70), au lieu de l'éq. (4.124). Cependant, le problème mathématique qui en résulte est trop pathologique pour être utile à la compréhension du § 4.6. Si, d'un point de vue formel, on désirait être plus près du § 4.6 on pourrait remplacer (4.120) par

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \kappa^2 \psi = 0, \quad \text{dans } 1 \leq x \leq 2$$

et imposer $\partial\psi/\partial x = 0$ à la "paroi" $x = 2$.

2. La symétrie de l'opérateur de force

Un opérateur différentiel est ou n'est pas auto-adjoint sous certaines conditions aux limites comme mentionné dans l'éq. (4.79). Ici, on peut prouver la symétrie avec un effort limité. Il est intéressant de constater qu'effectivement le vide apparaît dans cette démonstration à travers les conditions de raccordement.

On veut donc prouver que

$$\int_0^1 \eta \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = \int_0^1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \xi dx \quad (4.125)$$

$\forall \xi, \eta$ qui satisfont les conditions aux limites. Pour la démonstration, on aura besoin des quantités ϕ et ψ qui prolongent les "déplacements" η et ξ dans le "vide" à travers les conditions de raccordement, (4.122), (4.123), et qui satisfont la condition aux limites, (4.124).

Démonstration :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \eta \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx &= \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] dx = \\ &= - \int_0^1 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \left| \eta \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_0^1 = - \int_0^1 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \eta \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=1}, \\ \int_1^2 \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] dx = \\ &= - \int_1^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \left| \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_1^2 = - \int_1^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial x} \xi \Big|_{x=1}. \end{aligned}$$

Dans la première équation, la dernière égalité fait intervenir la condition sur "l'axe", (4.121) pour η tandis que la dernière égalité dans la deuxième équation tient compte de la conditions (4.124) pour ϕ et de (4.122) et (4.123) pour passer de la paire (ϕ, ψ) à (η, ξ) .

En additionnant les deux équations on trouve

$$\int_0^1 \eta \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx + \int_1^2 \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx = - \int_0^1 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} dx - \int_1^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \left| \eta \frac{\partial \xi}{\partial x} + \xi \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=1}.$$

De la même manière on montre que

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \xi dx + \int_1^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \psi dx = - \int_0^1 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} dx - \int_1^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \left| \eta \frac{\partial \xi}{\partial x} + \xi \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=1}.$$

Comme les conditions aux limites (4.121) et (4.122) font intervenir la solution dans le vide, les deux quantités ψ et ϕ doivent satisfaire l'équation du vide, (4.120) et les deuxièmes termes à gauche disparaissent. Ainsi on a démontré explicitement la symétrie (4.125) de l'opérateur sous ces conditions aux limites. Il est donc auto-adjoint.

3. L'énergie, le lagrangien et le principe de moindre action

Pour le système d'équations, (4.119) à (4.124), on peut obtenir une loi de conservation qui joue le rôle de la conservation d'énergie. On peut ainsi identifier des expressions qui correspondent aux énergies cinétique et potentielle et permettent de trouver un lagrangien.

La démarche étant identique au § 4.6.2, on multiplie l'éq.(4.119) par $\partial\xi/\partial t$ et intègre sur le "plasma" :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial\xi}{\partial t} \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} dx &= \int_0^1 \frac{\partial\xi}{\partial t} \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{\partial\xi}{\partial t} \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^3\xi}{\partial^2 x \partial t} \xi \right] dx \end{aligned}$$

Ici, on a utilisé la symétrie (4.125). En sortant la dérivée temporelle commune des intégrales, on obtient

$$\frac{d}{dt} \left[\underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial\xi}{\partial t} \right)^2 dx}_{\equiv T} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \xi \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} dx}_{\equiv W} \right] = 0. \quad (4.126)$$

Cette équation correspond à l'éq.(4.83). En intégrant par partie, on peut symétriser l'expression pour l'énergie potentielle dans le plasma, W_p :

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \xi \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\xi \frac{\partial\xi}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \right)^2 \right] dx \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \right)^2 dx}_{W_p} - \underbrace{\frac{1}{2} \xi \frac{\partial\xi}{\partial x} \Big|_{x=1}}_{W_s+W_v}. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Le deuxième terme à droite représente la contribution à l'énergie potentielle de la surface, W_s et du vide, W_v , en analogie avec l'éq.(4.88).

Si, aussi en analogie avec la MHD, on définit

$$W_v = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (4.128)$$

on montre à l'aide de (4.120) et des conditions aux limites que

$$\begin{aligned}\frac{dW_v}{dt} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial t} \Big|_{x=1} = \xi \frac{\partial^2\xi}{\partial x \partial t} \Big|_{x=1} \\ &= -\psi \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial t} \Big|_{x=1} = \frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\xi}{\partial t} \Big|_{x=1}\end{aligned}$$

avec la conséquence immédiate

$$2\frac{dW_v}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\psi \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \Big|_{x=1} = \frac{d}{dt} \left(\xi \frac{\partial\xi}{\partial x} \right) \Big|_{x=1} = -2\frac{d}{dt}(W_s + W_v).$$

Pour la dernière égalité, on s'est servi de l'éq.(4.127). Ce résultat nous permet de tirer l'expression pour W_s :

$$W_s = -\xi \frac{\partial\xi}{\partial x} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} - \xi\psi \right) \Big|_{x=1}. \quad (4.129)$$

La deuxième forme est celle qui entre dans le lagrangien, $L = T - W$:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} - \xi\psi \right) \Big|_{x=1}. \quad (4.130)$$

Le principe variationnel de "moindre action",

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0,$$

reproduit (bon exercice !!) les équations différentielles (4.119) et (4.120) ainsi que les conditions de raccordement, (4.122) et (4.123). Les conditions de Dirichlet, (4.121) et (4.124), doivent être imposées à l'espace fonctionnel des solutions, ξ et ψ , ainsi que des variations, $\delta\xi$ et $\delta\psi$. Autrement, les variations sont arbitraire à part qu'elles satisfont

$$\delta\xi(x, t_1) = \delta\xi(x, t_2) = 0.$$

Dans la forme

$$\frac{\omega^2}{2} \delta \int_0^1 \xi^2 dx = \delta W$$

le principe est utilisé comme point de départ pour les approches numériques du problème de la stabilité MHD. C'est la forme "variationnelle forte" de la théorie des éléments finis.

4. Résolution du système des équations différentielles

Dans ce problème simple, les équations différentielles se résolvent facilement. En prenant la dépendance temporelle comme $\exp(-i\omega t)$, l'équation d'onde (4.119) prend la solution spatiale,

$$\xi = C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x),$$

que l'on réduit directement à

$$\xi = C_1 \sin(\omega x)$$

en tenant compte de la condition sur l'axe, éq.(4.121). Dans le vide on trouve

$$\psi = C_3 + C_4 x$$

ce qui se réduit à

$$\psi = C_3(1 - x/2)$$

sous la condition à la paroi, éq.(4.124). Les conditions de raccordement imposent

$$\xi(x=1) = C_1 \sin \omega = \frac{C_3}{2} = - \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=1}$$

et

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=1} = C_1 \omega \cos \omega = \frac{C_3}{2} = \psi(x=1).$$

Une solution non-nulle pour C_1 et C_3 est possible, si la "relation de dispersion",

$$\tan \omega = \omega, \tag{4.131}$$

est satisfaite. On trouve $\omega = 0$ et, graphiquement,

$$\omega_\ell \approx \pm(\ell + 1/2)\pi, \quad \ell = 1, 2, \dots \tag{4.132}$$

La solution $\omega = 0$ ne fournit pas de fonction propre non-nulle et on a donc les valeurs propres $\omega_\ell \neq 0$, définies par (4.131) et associées aux fonctions propres définies par

$$\begin{aligned} \xi_\ell(x) &= C_1 \sin(\omega_\ell x), \\ \psi_\ell(x) &= 2C_1 \omega_\ell \cos \omega_\ell (1 - x/2). \end{aligned}$$

5.

Effets non-linéaires

5.1 Un rappel en guise d'introduction

Parfois, dans ce cours, la physique non-linéaire a déjà été touchée. La raison en était la non-linéarité de l'équation de Vlasov mais la discussion s'est rarement concentrée sur cet aspect. Dans ce chapitre, il est donc utile de se rappeler les endroits où la physique non-linéaire n'a pas pu être complètement ignorée dans le passé.

1. L'équation de Vlasov

Rappelez-vous de la forme de l'équation de Vlasov, (1.46)

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (5.1)$$

où $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ et t sont les variables indépendantes et $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ les variables dépendantes inconnues. Le dernier terme représente donc une non-linéarité quadratique d'inconnues. Notez que c'est le seul terme non-linéaire dans le système Maxwell-Vlasov, les équations de Maxwell, eqs.(1.1) à (1.4), étant linéaires ainsi que les relations entre la fonction de distribution et les sources des équations de Maxwell :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \int f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v. \quad (5.3)$$

Ainsi, les équations Vlasov-Maxwell sont un système d'équations intégral-différentielles non-linéaires avec une seule non-linéarité quadratique.

2. Les états stationnaires

Les complications sérieuses qu'une telle non-linéarité peut créer ont été évitées en se restreignant pragmatiquement au milieu homogène et stationnaire.

D'abord, dans un plasma homogène, il est facile de trouver des états stationnaires, voir §1.11. Dans le cas contraire, le système à résoudre est déjà si compliqué, qu'en général, on ne s'en sort pas sans ordinateur. Ce système s'écrit comme suit :

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} [\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r})] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (5.4)$$

et

$$\nabla \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r})/\mu_0 = \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3 v = \mathbf{j}_0(\mathbf{r}), \quad (5.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad (5.6)$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3 v = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (5.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0. \quad (5.8)$$

Même dans un modèle physique beaucoup moins riche que la théorie Vlasov, la MHD idéale, on n'a pu résoudre que des cas fortement simplifiés, en particulier en géométrie plane et cylindrique, §§4.4.2 et 4.4.3. En géométrie torique déjà, le recours à l'ordinateur est nécessaire pour la résolution de l'équation Grad-Shafranov, éq.(4.41) ! Pour arriver là, on a dû faire le deuil sur un éventuel flux de masse, $\mathbf{u}_0$, ainsi que sur un champ électrique DC, $\mathbf{E}_0$, des quantités actuellement très en vogue toutes les deux et reliées directement l'une à l'autre à travers la loi d'Ohm, éq.(4.15) "idéale".

3. Amortissement et l'énergie d'une onde (de Langmuir)

Dans le chapitre 1, §10, il a été démontré que le système Vlasov(non-linéaire)-Maxwell conserve notamment l'énergie. Ensuite, partant dans le chapitre 2 de l'équation de Vlasov linéarisée, (2.1), on a trouvé que, notamment dans un plasma maxwellien, une onde est amortie et disparaît sans laisser des traces macroscopiques. Particulièrement gênant était la question de la conservation d'énergie. L'onde avait manifestement perdu de l'énergie mais il n'était pas clair comment et où. On avait alors étudié le mouvement d'une particule, éq.(2.33) dans un champ oscillant et, par un argument non-linéaire, expliqué que l'énergie perdue était partie à tout jamais dans les particules dites *résonnantes*.

Une manière plus formelle et théoriquement plus satisfaisante est présentée en suite du modèle à une particule dans les équations (2.31) à (2.67). Sans aller dans les détails du calcul, on peut argumenter comme suit.

L'énergie du champ électromagnétique est une quantité quadratique dans les variables dépendantes $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ de cette théorie, la densité d'énergie étant, eq.(1.63),

$$u_{ch} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right). \quad (5.9)$$

Dans le cas qui est le nôtre, où $\mathbf{E}_0 = 0$ et $\mathbf{B}_0 = 0$, l'énergie du champ peut être obtenue correcte au 2^{ème} ordre à partir des champs $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t)$ de la théorie linéaire :

$$u_{ch} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \mathbf{E}_1^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_1^2 \right), \quad (5.10)$$

Son partenaire, l'énergie particulaire, par contre, ne peut être obtenue de la seule théorie linéaire, à savoir de $f_{\alpha 1} \sim \mathbf{E}_1 \sim \mathbf{B}_1$. Ce n'est qu'à l'ordre 2 que f_α peut révéler le changement dans l'énergie des particules résonnantes.

Ceci est facile à voir quand on sépare les ordres explicitement. Pour alléger la notation, introduisons l'abréviation $\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ pour l'accélération d'une particule dans le champ électromagnétique, $(q_\alpha/m_\alpha)(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Ainsi, l'équation de Vlasov prend la forme

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{a}_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (5.11)$$

Développant les inconnues comme $f_\alpha = f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1} + f_{\alpha 2} + \dots$ et $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{a}_{\alpha 0} + \mathbf{a}_{\alpha 1} + \mathbf{a}_{\alpha 2} + \dots$, on peut explicitement séparer les ordres :

1^{er} ordre :

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{a}_{\alpha 1} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{a}_{\alpha 0} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (5.12)$$

2^{ème} ordre :

$$\frac{\partial f_{\alpha 2}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 2}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{a}_{\alpha 2} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{a}_{\alpha 1} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{a}_{\alpha 0} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 2}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (5.13)$$

Pour connaître l'évolution de la fonction de distribution au 2^{ème} ordre, il faudrait donc, après avoir résolu l'éq. (5.12), résoudre l'équation linéaire inhomogène (5.13) pour $f_{\alpha 2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, c-à-d :

$$\frac{\partial f_{\alpha 2}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 2}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{a}_{\alpha 0} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 2}}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{a}_{\alpha 2} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} = -\mathbf{a}_{\alpha 1} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}}. \quad (5.14)$$

Ce n'est pas si simple mais si on se montre de nouveau pragmatique et satisfait d'avoir déjà résolu le premier ordre, $f_{\alpha 1}$, $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{B}_1$, on peut se restreindre et imposer à l'équation de Vlasov, (5.11), une onde (1D) donnée, $E_1(x, t) = E_{10}(t) \sin(kx - \omega t)$; ici, la dépendance temporelle de l'amplitude est supposée

lente dans le sens que $|E_{10}^{-1} dE_{10}/dt| \ll |\omega|$. Comme l'onde est donnée, on peut se concentrer sur les particules qui sont décrites par l'éq.(2.38),

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{eE_{10}(t)}{m} \sin(kx - \omega t) \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (5.15)$$

En résolvant cette équation, on a pu calculer le gain (ou la perte) d'énergie des particules dans le champ donné, éq.(2.39),

$$\dot{u}_p = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} \bar{n} m v^2 f(x, v, t) dv. \quad (5.16)$$

De cette manière, on a appris que le changement de l'énergie des particules, u_p , moyennée sur l'espace, est donnée par l'éq.(2.56)

$$\langle \dot{u}_p \rangle = -\omega_{pe}^2 \frac{\epsilon_0}{2} E_{10}^2 \int dv v \left[\pi \delta(kv - \omega) + \frac{1}{E_{10}} \frac{dE_{10}}{dt} \frac{\partial}{\partial \omega} \mathcal{P} \frac{1}{kv - \omega} \right] \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (5.17)$$

On reconnaît ici des termes rappelant ceux de la relation de dispersion, eq.(2.20) et la boucle est bouclée; le premier terme donne le changement d'énergie des particules résonnante et le deuxième celui des particules non-résonnantes. Notez que le **taux de changement** de la densité d'énergie des particules résonnantes est proportionnel à l'amplitude au carré de l'onde tandis que, dans le cas des particules non-résonnantes, la **densité d'énergie** elle-même y est proportionnel.

De ce dernier résultat, il suit un corollaire important concernant l'énergie d'une onde qui est définie comme la somme des énergies du champ et des particules non-résonnantes. On a

$$\langle u_p \rangle_{non-rés} = -\omega_{pe}^2 \frac{\epsilon_0}{4} E_{10}^2 \int dv \frac{\partial}{\partial \omega} \mathcal{P} \frac{v \frac{\partial f_0}{\partial v}}{kv - \omega},$$

ce qui peut être écrit comme

$$\langle u_p \rangle_{non-rés} = -\omega_{pe}^2 \left\langle \frac{\epsilon_0}{2} E_1^2 \right\rangle \frac{\partial}{\partial \omega} \int_{-\infty}^{\infty} dv \mathcal{P} \frac{(kv - \omega) + \omega}{k} \frac{\frac{\partial f_0}{\partial v}}{kv - \omega}.$$

Le terme contenant $(kv - \omega)$ dans le numérateur se simplifie avec le dénominateur et laisse l'intégrale de $\frac{\partial f_0}{\partial v}$ qui donne zéro ($f(\pm\infty) = 0$!). Ainsi, il reste

$$\langle u_p \rangle_{non-rés} = \left\langle \frac{\epsilon_0}{2} E_1^2 \right\rangle \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int dv \mathcal{P} \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial v}}{\omega - kv}. \quad (5.18)$$

Rappelez-vous de la relation de dispersion (2.12) du problème unidimensionnel simple. Elle pouvait être écrite, éq.(2.13), comme

$$\epsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_{e0}/dv}{v - \omega/k} dv - i\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \text{sign}(k) \left. \frac{df_{e0}}{dv} \right|_{v=\omega/k} = 0. \quad (5.19)$$

En identifiant les termes dans (5.18) et (5.19) on peut écrire

$$\begin{aligned}\langle u_p \rangle_{non-rés} &= \left\langle \frac{\epsilon_0}{2} E_1^2 \right\rangle \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \Re(\epsilon - 1)] = \\ &= \langle u_{ch} \rangle \left[-1 + \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \Re \epsilon) \right]\end{aligned}$$

ou

$$\langle u_{onde} \rangle = \langle u_{ch} \rangle + \langle u_p \rangle_{non-rés} = \langle u_{ch} \rangle \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \Re \epsilon) \quad (5.20)$$

Dans le cas général on trouve, voir le livre de Tom Stix,

$$\langle u_{onde} \rangle = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \epsilon^H) \cdot \mathbf{E} \right]. \quad (5.21)$$

Ici, le signe H désigne la partie hermitique d'une matrice complexe.

5.2 Ondes nonlinéaires simple

L'équation de Vlasov, éq. (1.46), est non-linéaire dans le terme contenant les forces. Dans le contexte de Vlasov, c'est même la seule non-linéarité car les équations de Maxwell, (1.1) à (1.4), sont linéaires. Ce n'est pas vrai par contre pour les équations fluides qui peuvent être obtenues de l'équation de Vlasov. C'est l'opérateur linéaire qui décrit l'évolution de particules sans interactions

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (5.22)$$

appelé "free-streaming operator" en anglais, qui est à l'origine des dérivées temporelles totales contenant des termes non-linéaires de convection macroscopique dans les équations de fluides.

En effet, en prenant les moments de vitesse, $\mathbf{v}$, d'ordre zéro et un de l'éq. (5.22) il vient

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \right] n_\alpha(\mathbf{r}, t) &= -n_\alpha(\mathbf{r}, t) \nabla \cdot \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t), \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \right] \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t) &= \\ &= - \frac{\bar{n}_\alpha}{n_\alpha(\mathbf{r}, t)} \nabla \cdot \int (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha) : (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha) f_\alpha d^3 v, \quad (5.24)\end{aligned}$$

comme nous l'avons vu aux exercices. Notez que $\bar{n}_\alpha$ correspond à N/V dans l'éq. (1.16). La vitesse macroscopique $\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ est définie par

$$n_\alpha(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \bar{n}_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (5.25)$$

Le terme de droite de l'équation (5.24) mesure le mouvement thermique aléatoire et est associée à la pression du gaz (voir exercices).

Ce qui nous intéresse ici est de mentionner l'omniprésence de l'opérateur

$$\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla$$

et son effet principal sur des perturbations ondulatoires. Le cas le plus idéalisé est obtenu de (5.24) pour un faisceau froid (membre de droite = 0 !) en une dimension. Examinons d'abord les oscillations de faible amplitude dans un faisceau homogène de vitesse constante V_0 : $V_\alpha = V_0 + u(x, t)$ avec $|u| \ll |V_0|$. Posant $u \sim \exp(ikx - i\omega t)$ et en linéarisant (5.24), on obtient la relation de dispersion pour les ondes linéaires

$$\omega = kV_0. \quad (5.26)$$

Il s'en suit que, dans l'approximation linéaire, on a affaire à un milieu non dispersif : $v_{ph} = \omega/k = \text{const.}$ Admettons maintenant qu'au faisceau est imposée une certaine perturbation initiale dont la vitesse est de la forme de $a \sin kx$. Il est commode d'étudier l'évolution de cette perturbation dans un système de coordonnées se mouvant à la vitesse V_0 en posant $x = x' + V_0 t$, $V_\alpha = u + V_0$. Dans ce système on a (en omettant le prime de x') :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (5.27)$$

En suivant l'évolution du faisceau dans l'espace de phase (x, u) , où chaque point se déplace dans le temps, avec sa propre vitesse, Fig. 5.1, le demi-plan supérieur se meut vers la droite, tandis que celui du bas se déplace vers la gauche, la vitesse de tout point étant proportionnelle à son éloignement de l'axe des x . L'état initial du faisceau (t_1) dans ce plan a l'aspect d'une sinusoïde qui se raidit au cours du temps jusqu'à l'apparition d'une pente infinie (t_2). Au moment suivant, l'onde est basculée et la fonction $u(x)$ cesse d'être univoque (t_3).

L'apparition d'une pente infinie se traduit dans le langage Fourier par l'apparition de vecteurs d'onde de plus en plus grands. Dans l'approximation linéaire le second membre de l'éq. (5.27) peut être négligé, ce qui correspond au profil stationnaire de l'onde linéaire que l'on a prise comme

$$u^{(1)} = a \sin kx. \quad (5.28)$$

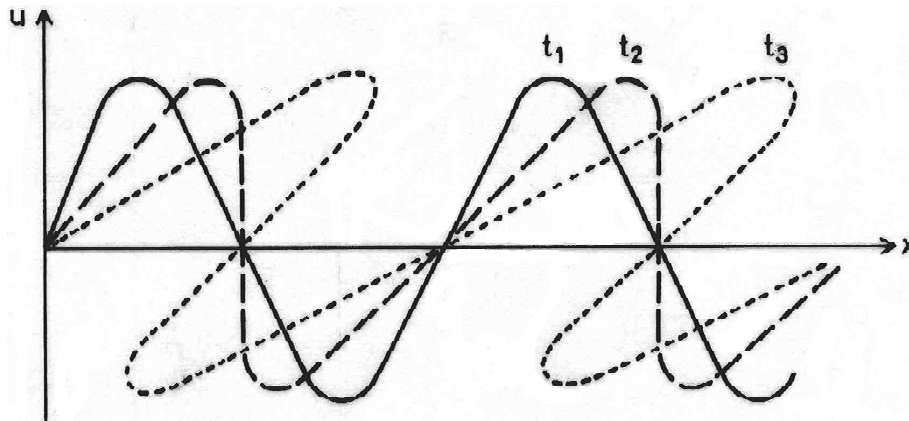


Figure 5.1 Basculement de l'onde dans un flux de particules libres

En procédant par approximations successives, il est possible d'itérer la solution linéaire (5.28) dans le second membre de (5.27) et de calculer une première correction non-linéaire

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} = -ka^2 \sin kx \cos kx = -\frac{ka^2}{2} \sin 2kx, \quad (5.29)$$

où $u^{(2)}$ est la contribution du second ordre. Il s'ensuit que $u^{(2)}$ correspond à l'apparition du deuxième harmonique, croissant dans le temps. Après un laps de temps $t \sim 1/ka$, l'amplitude de cet harmonique aura atteint celle du premier. Il devient manifeste que, pour des intervalles de temps de cet ordre et supérieurs, la méthode par approximations successives devient inapplicable.

En réalité, le raidissement du front d'onde peut être limité soit par la dissipation soit par la dispersion. Un exemple du premier cas est l'onde de choc dans un gaz normal qui est un produit de la compétition entre l'effet non-linéaire et la viscosité. Un fameux exemple du deuxième cas sont les solitons issus de l'équations de Korteweg-de-Vries. Les propriétés étonnantes de ces ondes non-linéaires ont été découvertes par des physiciens du plasma. Les premiers solitons observés expérimentalement dans un plasma étaient des ondes acoustiques ioniques fortement dispersées à petite longueur d'onde, éq. (2.141). Un exemple d'une onde qui bascule (le cas sans dissipation ni dispersion) est évidemment l'onde sur l'eau peu profonde (la vague du bord de la mer).

Il est important de réaliser que la dispersion peut parfois déterminer l'applicabilité de la méthode par approximations successives. En effet, il suit de (5.29) que le deuxième harmonique n'acquiert la possibilité de croître jusqu'à une grande amplitude qu'en vertu du fait qu'il demeure tout le temps dans le système de coordonnées envisagé (c'est-à-dire bouge à la même vitesse que l'onde linéaire dans le référentiel du laboratoire). En présence de dispersion, la vitesse de phase du deuxième harmonique diffère de la vitesse de phase du premier par la grandeur $\Delta v_{ph} = v_{ph}(2k) - v_{ph}(k)$, l'équation (5.29) prenant la forme

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + \Delta v_{ph} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = -\frac{ka^2}{2} \sin 2kx. \quad (5.30)$$

Ainsi on obtient une solution limitée en amplitude tout en satisfaisant à la condition initiale $u^{(2)}(x, t = 0) = 0$:

$$u^{(2)} = \frac{a^2}{4\Delta v_{ph}} [\cos 2kx - \cos 2k(x - \Delta v_{ph}t)]. \quad (5.31)$$

Pour une faible amplitude a cette quantité reste toujours du second ordre. Si $\Delta v_{ph} \rightarrow 0$, la méthode par approximations successives devient inadéquate. Il apparaît clairement en quoi consiste la différence entre les milieux non dispersifs et dispersifs. Dans les milieux non dispersifs tous les harmoniques sont en résonance les uns avec les autres et, par conséquent, un pompage intense d'énergie devient possible entre les modes, jusqu'au basculement, c'est-à-dire jusqu'à l'apparition d'harmoniques infinis liés à la formation d'une singularité sur le profil de l'onde. Dans les milieux dispersifs ce pompage intense ne se manifeste en général pas.

Cette discussion du faisceau froid de particules en l'absence d'interaction a été prise presque mot pour mot dans le livre de B.B. Kadomtsev, "Phénomènes collectifs dans les plasmas", Editions Mir, Moscou, 1979. Elle nous a permis de voir que si les effets non-linéaires sont inévitables, il y a parfois espoir de pouvoir utiliser une théorie de perturbation.

Une autre situation où le non-linéaire est inévitable est celle d'une instabilité. D'habitude, la théorie linéaire prédit une croissance exponentielle de la forme $\exp \gamma t$ lorsqu'un équilibre est instable. Toute instabilité est causée par une situation énergétiquement défavorable au système. Lors de la croissance de l'instabilité l'énergie "change de place" (énergie potentielle $\rightarrow$ énergie cinétique ordonnée $\rightarrow$ énergie cinétique désordonnée, etc.). Ce processus doit s'arrêter après quelques γ^{-1} (e-folding times, en anglais) suite à l'épuisement de la source d'énergie. La théorie non-linéaire cherche alors à déterminer, par exemple, l'amplitude atteinte par les ondes dans cet état saturé, stationnaire. Une autre question, très importante, est celle de la forme du spectre. L'onde émise par un faisceau froid (voir exercices) est monochromatique tandis qu'un faisceau chaud (Fig. 2.5) excite tout un spectre de vitesses de phase (et donc de k et de ω) différents. La méthode

(ou l'idéalisation) théorique doit refléter cette différence. Dans le premier cas, il s'agit d'un phénomène cohérent, dans le deuxième d'un phénomène turbulent. C'est ainsi qu'on distingue deux sortes de théories de perturbation, une cohérente et l'autre turbulente, les deux étant des modèles simplifiés. Essayons de saisir cette différence dans le cas de l'interaction résonnante onde-particule.

5.3 Interaction résonnante onde-particule et corrélations du champ

Pour préparer le terrain il nous faut d'abord définir ce que nous entendons par faisceaux "froids" et "chauds".

Dans le chapitre 2 nous avons trouvé l'expression pour l'amortissement de Landau des ondes plasmas, éq. (2.61) :

$$\frac{\gamma_k}{\omega_k} = \frac{\pi}{2} \text{sign}(k) \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \left. \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|_{v=\omega_k/k}, \quad (5.32)$$

qui nous donne aussi le taux de croissance de l'instabilité du faisceau chaud, Fig. 2.5. La spécificité de la formule (5.32) est qu'elle est locale en v . Pour une onde qui croît la fréquence n'est pas définie d'une façon précise mais seulement à γ_k près. Les résonances sont en fait élargies par la variation temporelle ; elles peuvent être considérées comme locales si l'étendue du faisceau Δv est beaucoup plus grand que la largeur des résonances. On peut donc caractériser un faisceau chaud par

$$\Delta v \gg \gamma_k/k$$

où k est le vecteur d'onde d'une onde instable typique. Moyennant une estimation de l'ordre de grandeur de γ_k il est possible de dériver une condition plus parlante.

Soient n_1 , V_f et Δv la densité, la vitesse moyenne et la largeur caractéristique du faisceau. Supposant que $n_1 \ll n_0$ où n_0 est la densité du plasma, le faisceau doit être bien détaché de la distribution principale pour exciter une instabilité. Admettons même qu'il soit si bien détaché que la fonction de distribution à l'endroit V_f soit entièrement déterminée par le faisceau ayant la valeur $f \approx n_1/n_0 \Delta v$. La dérivée maximale déterminant l'instabilité est donc de $\partial f/\partial v \approx n_1/n_0 (\Delta v)^2$. Substituant la dérivée dans (5.32) par cette valeur il vient

$$\gamma_k \approx \omega_{pe} \left(\frac{\omega_{pe}}{k \Delta v} \right)^2 \frac{n_1}{n_0}. \quad (5.33)$$

Comme on a $\omega_{pe}/k \approx V_f$ on trouve pour la condition du faisceau chaud

$$\Delta v \gg \frac{\gamma_k}{k} \approx V_f \left(\frac{V_f}{\Delta v} \right)^2 \frac{n_1}{n_0},$$

ce qui devient

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta v}{V_f} &\gg \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^{1/3}, & \text{faisceau chaud,} \\ \frac{\Delta v}{V_f} &\ll \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^{1/3}, & \text{faisceau froid.} \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

Ici, on s'est servi de la perte de sens du concept local de l'interaction résonnante pour caractériser "chaud" et "froid". Cette manière de faire, à première vue purement mathématique, est bien physique comme on va le montrer après avoir introduit quelques outils de travail. Toutes les considérations seront faites en se référant au problème du faisceau comme prototype de la classe des interactions résonnantes onde-particule à une dimension.

L'instabilité faible dans le sens

$$\left| \frac{\gamma_k}{\omega_k} \right| \ll 1, \quad (5.35)$$

exige que la densité du faisceau soit faible $n_1 \ll n_0$. Le faisceau excite tout un spectre d'ondes et, en approximation linéaire, le potentiel est une superposition de modes

$$\phi(x, t) = \sum_k \phi_k \exp(ikx - i\omega_k t + \gamma_k t). \quad (5.36)$$

où on s'imagine les vecteurs d'onde quantifiés par une boîte finie de longueur L . Supposant des conditions aux limites périodiques,

$$k = \frac{2\pi}{L} \nu, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.37)$$

En théorie non-linéaire il faut bien s'assurer que l'expression (5.36) est réelle ; il n'est pas permis de partir en complexe et d'attendre la fin du calcul pour reprendre la partie réelle du résultat : la superposition de deux solutions n'est pas une solution ! En prenant le complexe conjugué de (5.36) et en imposant

$$\phi^*(x, t) \equiv \phi(x, t) \quad (5.38)$$

on montre par identification (passer de k à $-k$ dans $\sum_k$!) que

$$\left. \begin{aligned} \phi_{-k}^* &= \phi_k, \\ \omega_{-k} &= -\omega_k, \\ \gamma_{-k} &= \gamma_k. \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

Selon la théorie linéaire les ondes dans (5.36) croissent sans bornes ; par la conservation de l'énergie nous savons que cela ne peut pas être juste. Après un certain temps, les particules du faisceau doivent avoir perdu leur énergie et l'instabilité être arrivée à saturation.

Etudions le mouvement d'une particule test qui au temps $t = 0$ se trouve à x_0 avec la vitesse v_0 . Sa trajectoire est décrite par la loi de Newton,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = e \nabla \phi [x(t), t]. \quad (5.40)$$

En approximation linéaire, on estime la déviation du parcours non-perturbé $x_0 + v_0 t$ en utilisant ce dernier dans le terme de droite (voir aussi § 2.4). Partant de l'expression (5.36) pour $\phi(x, t)$ on trouve

$$m \Delta x = m [x - (x_0 + v_0 t)] = ie \sum_k \frac{k \phi_k \exp(ik_0 x)}{i(kv_0 - \omega_k) + \gamma_k} \left\{ \frac{\exp[i(kv_0 - \omega_k)t + \gamma_k t] - 1}{i(kv_0 - \omega_k) + \gamma_k} - t \right\}. \quad (5.41)$$

La théorie linéaire cesse d'être correcte dès qu'on est forcé de tenir compte dans le membre de droite de (5.40) de la déviation Δx , c'est-à-dire au plus tard quand $k \Delta x \approx 1$. Le malheur arrive d'abord aux particules résonnantes car $|i(kv_0 - \omega_k) + \gamma_k|^2 \approx \gamma_k^2$ pour ces dernières tandis que $|i(kv_0 - \omega_k) + \gamma_k|^2 \gg \gamma_k^2$ pour les particules non-résonnantes. On fera donc l'hypothèse que les effets non-linéaires doivent être pris en compte pour les particules résonnantes mais que les ondes restent suffisamment petites pour permettre un traitement linéaire des particules non-résonnantes. En d'autres termes, on envisage un modèle où les particules non-résonnantes supportent le mouvement oscillatoire des ondes selon la théorie linéaire, alors que les particules résonnantes échangent de l'énergie avec ces ondes en accord avec la théorie non-linéaire. Cette séparation des rôles est possible à cause de l'équation (5.35).

Pour la discussion de la dynamique non-linéaire des particules résonnantes on doit introduire quelques échelles de temps associées à cette dynamique, la première étant le temps d'autocorrélation du champs τ_{ac} . Cette quantité mesure essentiellement le temps qu'il faut au champ pour oublier son passé. Formellement, le temps d'autocorrélation, τ_{ac} est le temps caractéristique de la fonction du même nom,

$$C(\tau) \equiv \left\langle \phi[x(t), t] \phi[x(t + \tau), t + \tau] \right\rangle, \quad (5.42)$$

tel que

$$\left. \begin{aligned} |C(\tau)| &\sim |C(0)| && \text{pour } \tau \lesssim \tau_{ac}, \\ |C(\tau)| &\ll |C(0)| && \text{pour } \tau \gg \tau_{ac}. \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

La moyenne $\langle \dots \rangle$ est prise sur un ensemble statistique ; ici, une moyenne sur toutes les conditions initiales de la particule test est un bon choix :

$$\left\langle \quad \right\rangle = \frac{1}{L} \int_0^L dx_0. \quad (5.44)$$

Développant $\phi[x(t), t]$ et $\phi[x(t + \tau), t + \tau]$ selon (5.36) et en observant que

$$\left\langle \exp(ikx_0) \exp(ik'x_0) \right\rangle = \delta_{-k \ k'}, \quad (5.45)$$

on trouve

$$C(\tau) = \sum_k |\phi_k|^2 \exp 2\gamma_k t \exp(-ikv_0 + i\omega_k + \gamma_k)\tau. \quad (5.46)$$

Cette expression peut être réécrite sous la forme

$$C(\tau) = \frac{L}{\pi} \int_0^\infty dk |\phi_k|^2 \exp[\gamma_k(2t + \tau)] \cos[(\omega_{pe} - kv_0)\tau] \quad (5.47)$$

en utilisant (5.39), $\omega_k \approx \text{sign}(k)\omega_{pe}$ pour une onde Langmuir et

$$\sum_k = \frac{L}{2\pi} \sum_k \frac{2\pi}{L} \longrightarrow \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk. \quad (5.48)$$

Un faisceau de largeur Δv excite initialement un spectre de largeur Δk :

$$\Delta v = \frac{\omega_{pe}}{k^2} \Delta k \approx V_f \frac{\Delta k}{k}. \quad (5.49)$$

Pour estimer le temps de corrélation τ_{ac} dans un tel spectre on l'approxime de la façon la plus grossière

$$|\phi_k|^2 \exp[\gamma_k(2t + \tau)] = \begin{cases} I_0(t, \tau) & \text{pour } k_0 \leq k \leq k_0 + \Delta k, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (5.50)$$

où $k_0 = V_f/\omega_{pe}$. Ainsi on peut évaluer l'intégrale (5.47) avec le résultat

$$C(\tau) = \frac{L\Delta k}{\pi} I_0(t, \tau) \frac{\sin \frac{1}{2}v_0\Delta k\tau}{\frac{1}{2}v_0\Delta k\tau} \cos \left[(k_0v_0 - \omega_{pe})\tau + \frac{1}{2}v_0\Delta k\tau \right]. \quad (5.51)$$

On constate que pour une particule résonnante ($k_0v_0 - \omega_{pe} \approx 0$) cette fonction contient deux temps caractéristiques, l'inverse du taux de croissance γ_k^{-1} et le temps d'autocorrélation,

$$\tau_{ac} \sim (v_0\Delta k)^{-1} \approx (V_f\Delta k)^{-1} \approx \omega_{pe}^{-1} \frac{V_f}{\Delta v}. \quad (5.52)$$

Un autre paramètre dont nous avons besoin pour notre discussion est l'inverse de la fréquence de piégeage (trapping frequency) ω_t qui mesure la fréquence d'oscillation d'une particule piégée dans le puits de potentiel de l'onde. En présence d'un spectre pour lequel

$$\langle \phi \rangle = 0$$

quelle que soit la particule test on ne peut définir ω_t qu'à partir d'une quantité statistique, la *fluctuation quadratique moyenne*

$$\phi_{fqm} \equiv \sqrt{\langle \phi^2(x, t) \rangle}. \quad (5.53)$$

En se servant de (5.39) on trouve

$$\phi_{fqm}^2 = \sum_k |\phi_k|^2 \exp 2\gamma_k t. \quad (5.54)$$

On peut alors estimer la fréquence de piégeage moyenne en écrivant le potentiel vu par une particule bougeant à la même vitesse que l'onde sous la forme $\phi(x) = \phi_{fqm} \cos kx$ et en utilisant l'équation de Newton,

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -m\omega_t^2 x \\ &= e \frac{d\phi}{dx} = -e\phi_{fqm} k \sin kx \approx -e\phi_{fqm} k^2 x. \end{aligned}$$

On a donc

$$\omega_t^2 = \frac{e}{m} k^2 \phi_{\text{fqm}}. \quad (5.55)$$

Finalement on note que le temps caractéristique de la saturation non-linéaire doit être de l'ordre de l'inverse du taux de croissance linéaire,

$$\tau_{\text{nl}} \approx \gamma_k^{-1}. \quad (5.56)$$

La croissance exponentielle est une fonction de temps tellement raide qu'il n'y aura que très peu de saturation avant le tout dernier γ_k^{-1} .

Dépendant des tailles relatives de τ_{ac} et τ_{nl} la saturation se fait par des mécanismes très différents. Etudions d'abord le cas où $\tau_{\text{ac}} \ll \tau_{\text{nl}}$. Cette inégalité est satisfaite par le spectre excité par un faisceau chaud comme on démontre facilement à l'aide de (5.33) et (5.34). L'implication de $\tau_{\text{ac}} \ll \tau_{\text{nl}}$ pour la dynamique est la suivante : comme le champ vu par la particule résonnante change d'une façon aléatoire plusieurs fois pendant la saturation non-linéaire, le mouvement des particules est du type Brownien dans l'espace des vitesses. La densité des particules dans cet espace n'est rien d'autre que la fonction de distribution et elle doit évoluer selon une équation de diffusion,

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (5.57)$$

L'indice 0 indique que l'on parle de la distribution "stationnaire" qui évolue lentement dû à l'interaction des particules avec les ondes. La théorie formelle qui permet de dériver l'éq. (5.57) s'appelle "théorie quasi-linéaire". Le coefficient de diffusion peut être estimé comme tout autre coefficient de diffusion :

$$D \approx \frac{(\text{pas élémentaire})^2}{\text{temps de corrélation}}. \quad (5.58)$$

Ici, le pas élémentaire δv , est l'accélération selon Newton multipliée par τ_{ac} ,

$$\delta v \approx \frac{e}{m} k \phi_{\text{fqm}} \tau_{\text{ac}};$$

on a donc

$$D \approx \frac{(\delta v)^2}{\tau_{\text{ac}}} = \frac{e^2}{m^2} k^2 \phi_{\text{fqm}}^2 \frac{V_f}{\omega_{pe} \Delta v}. \quad (5.59)$$

La saturation est finie et l'instabilité arrêtée quand la diffusion aura aplani le faisceau et

$$\gamma_k \propto \frac{\partial f_0}{\partial v} \approx 0.$$

Pour estimer la valeur du champ à la saturation on pose

$$D\tau_{nl} \approx (\Delta v)^2 \quad (5.60)$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{e^2}{m^2} k^2 \phi_{f_{qm}}^2 \frac{V_f}{\omega_{pe} \Delta v} \approx (\Delta v)^2 \gamma_k. \quad (5.61)$$

L'éq. (5.60) n'est valable que dans le cas où Δv caractérise le faisceau complètement ; en d'autres termes, il faut que $V_f \sim \Delta v$. Moyennant (5.33) et $\omega_{pe}^2 = e^2 n_0 / \epsilon_0 m$ on trouve la densité d'énergie de l'onde à la saturation

$$\epsilon_0 k^2 \phi_{f_{qm}}^2 \approx n_1 m V_f \Delta v. \quad (5.62)$$

On s'attend à une dépendance temporelle de la densité d'énergie selon la Fig. 5.2 : une croissance exponentielle suivie par une saturation monotone vers la densité d'énergie finie, éq. (5.62).

Moyennant la conservation de l'énergie on peut aussi traiter le cas où $V_f \not\sim \Delta v$ en supposant $V_f \gg \Delta v$. La Fig. 5.3 montre la distribution initiale $f_0(0)$ et finale $f_0(\infty)$ dans ce cas.

Les densités d'énergies dans le faisceau avant et après l'instabilité sont

$$u_0 \approx \frac{1}{2} n_1 m V_f^2 \quad (5.63)$$

et

$$u_\infty \approx \int_0^{V_f} \underbrace{f_0(\infty)}_{\approx \frac{n_1}{n_0}/V_f} \frac{m}{2} v^2 dv = \frac{1}{2} n_1 m \left(\frac{1}{3} V_f^2 \right). \quad (5.64)$$

Dans ce cas, la densité d'énergie de l'onde à la saturation est

$$\epsilon_0 k^2 \phi_{f_{qm}}^2 = u_\infty - u_0 \approx \frac{1}{3} n_1 m V_f^2. \quad (5.65)$$

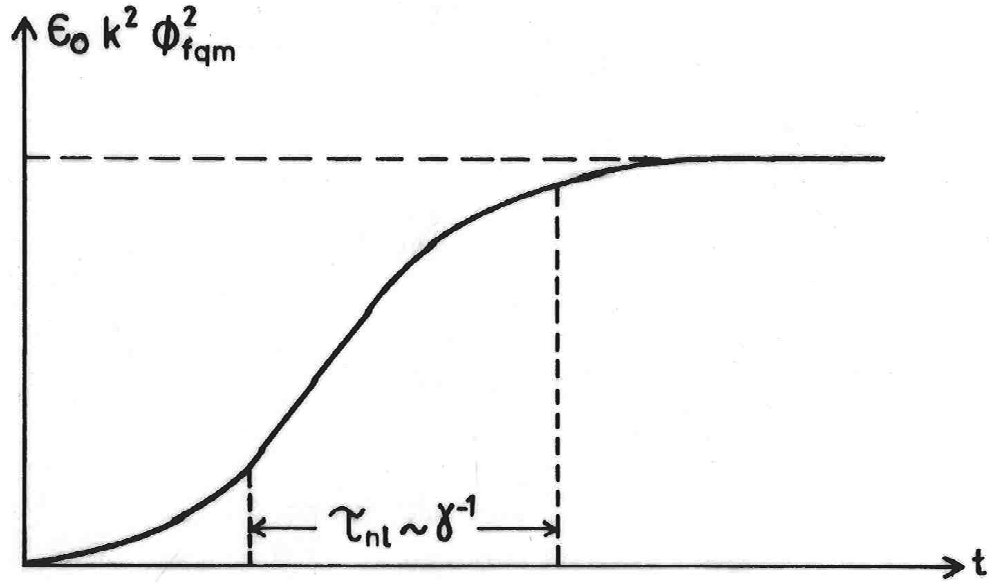


Figure 5.2 Evolution temporelle de la densité d'énergie des ondes dans l'instabilité d'un faisceau chaud

Pour plus de détails concernant la saturation de l'instabilité du faisceau chaud, il faut développer la théorie quasi-linéaire.

On se tourne maintenant vers le faisceau froid, éq. (5.34) ; le spectre excité satisfait $\tau_{ac} \gg \tau_{nl}$. Les effets non-linéaires ne peuvent pas être modélisés par un processus diffusif. La saturation non-linéaire se fait longtemps avant que le champ ait eu le temps de changer aléatoirement même une seule fois. Cela veut dire qu'un électron résonnant ne peut pas détecter la largeur du spectre pendant la saturation. Par conséquent, on peut remplacer le spectre d'ondes instables par une seule onde avec le vecteur d'onde qui maximise le taux de croissance. La formule de Landau, éq. (5.32), ne peut pas être utilisée dans ce cas mais il faut résoudre la relation de dispersion du faisceau froid. Aux **exercices** on avait trouvé pour $kV_f \approx \omega_{pe}$

$$\omega_k + i\gamma_k = \omega_{pe} \left[1 + \left(\frac{n_1}{2n_0} \right)^{1/3} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]. \quad (5.66)$$

La vitesse de phase de l'onde est légèrement plus petite que la vitesse du faisceau. L'instabilité consiste donc en la tendance de l'onde de décélérer le faisceau et de l'amener — au moins en moyenne — à sa vitesse de phase. Ce processus s'arrête au moment où l'onde a atteint une amplitude suffisante pour piéger le faisceau car à partir de là il y aura échange périodique d'énergie entre le faisceau et l'onde. On peut estimer la densité d'énergie de l'onde à la saturation en posant

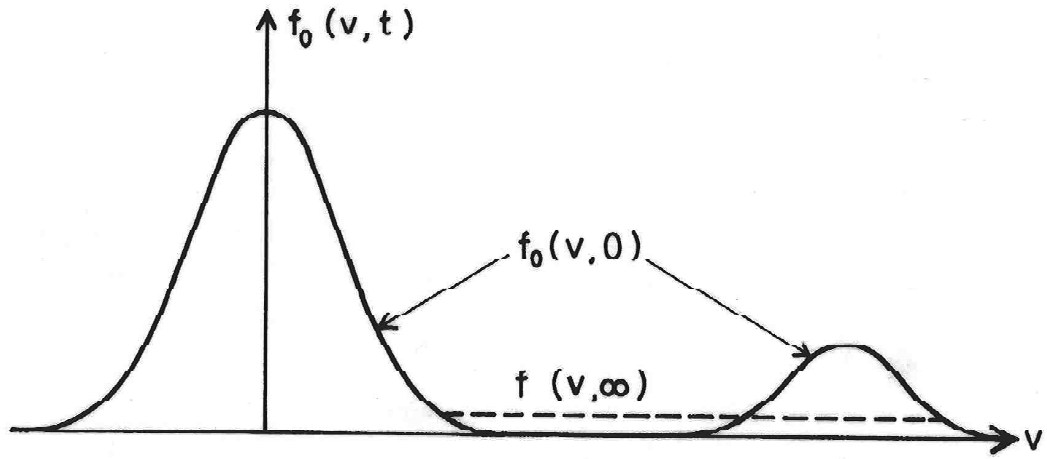


Figure 5.3 Etat initial, $f_0(0)$, et final, $f_0(\infty)$ (traitillé) de la distribution décrivant un faisceau électronique

$$\omega_t \tau_{nl} \approx 1, \quad (5.67)$$

ou

$$\frac{e}{m} k^2 \phi_{f_{qm}} \approx \gamma_k^2 \quad (5.68)$$

respectivement. Avec $k \approx \omega_{pe}/V_f$ et $\gamma_k \approx \omega_{pe}(n_1/n_0)^{1/3}$ il vient

$$\epsilon_0 k^2 \phi_{f_{qm}}^2 \approx n_1 m V_f^2 \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^{1/3}. \quad (5.69)$$

Dans le cas du faisceau froid on s'attend donc à une évolution temporelle comparable à celle de la Fig. 5.4.

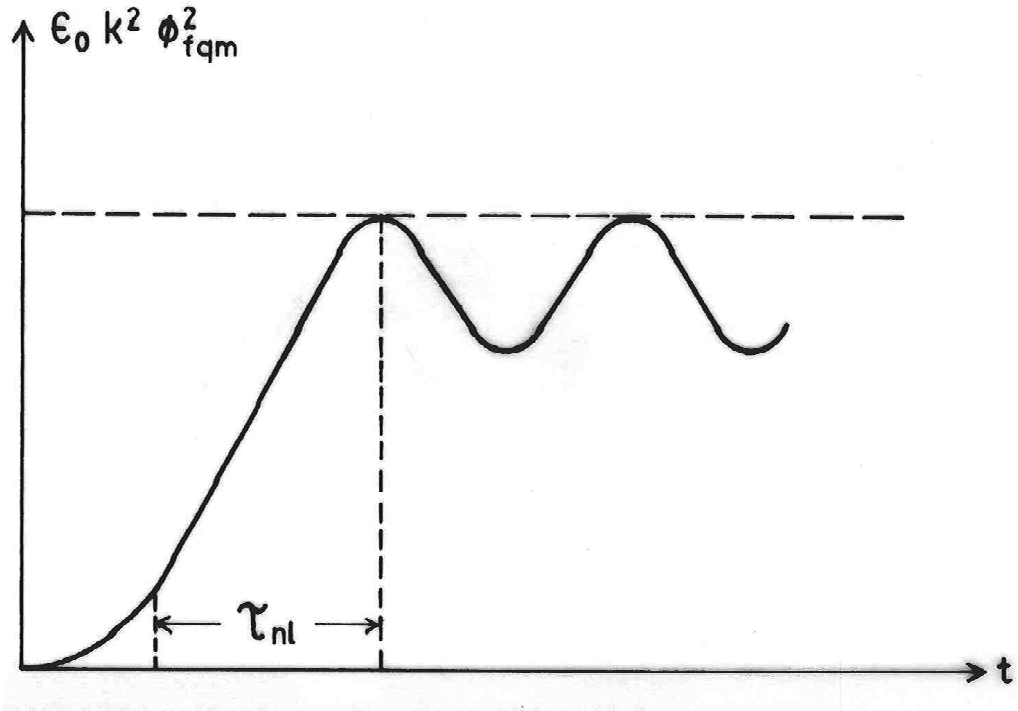


Figure 5.4 Evolution temporelle de la densité d'énergie de l'onde dans l'instabilité d'un faisceau froid

5.4 Interactions entre plusieurs ondes

L'interaction onde-particule que nous venons de discuter devrait être vue dans le contexte plus large d'une théorie de perturbation où le petit paramètre qui sert au développement est donné par le rapport des énergies contenues dans les ondes et les particules,

$$\frac{u_{\text{onde}}}{nT} \ll 1. \quad (5.70)$$

Dans ce qui précède, cette condition a été satisfaite en supposant $|\gamma_k| \ll |\omega_k|$.

Dans une théorie plus complète, on doit tenir compte non seulement de l'interaction onde-particule mais aussi des interactions onde-onde-onde, onde-onde-particule, etc. L'interaction onde-onde-onde, par exemple est caractérisée par la condition de résonance $\omega_3 = \omega_1 \pm \omega_2$ et $k_3 = k_1 \pm k_2$. Quand cette condition est satisfaite, deux ondes créent un battement qui excite une troisième. L'interaction onde-onde-particule est régie par la condition de résonance $\omega_2 \pm \omega_1 = (k_2 \pm k_1)v$. Cette interaction est semblable à l'interaction onde-particule ordinaire, la seule différence étant que la particule interagit avec le battement de deux ondes. On peut, bien sûr, construire des interactions d'ordre plus élevé en incluant plus que trois ondes. En général, tous ces processus agissent simultanément et il est alors pratiquement impossible de procéder analytiquement. Si les interactions les plus simples

(d'ordre bas) ont quand même été étudiées d'une façon approfondie, c'est qu'elles sont assez souvent dominantes, et qu'elles constituent une "physique de base" du non-linéaire.

Comme dans le cas de l'interaction onde-particule le ou les temps de corrélation jouent un rôle important dans les mécanismes d'interaction. La théorie dont fait partie la théorie quasi-linéaire qui est caractérisée par $\tau_{ac} \ll \tau_{nl}$ s'appelle la théorie de la turbulence faible. L'autre extrême, la théorie cohérente, n'a pas de nom bien établi.

Etudions maintenant en détail l'interaction cohérente entre trois ondes(*). La question qui se pose concerne le couplage entre modes qui en théorie linéaire propagent indépendamment l'un de l'autre. Notez d'abord qu'une onde décrite en théorie linéaire par $a_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$ doit être comprise ici comme la partie réelle,

$$\frac{1}{2} \left[a_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) + a_0^* \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \right].$$

C'est important quand on a affaire à des produits d'amplitudes, remarque déjà faite concernant le développement (5.36).

Soient deux ondes planes données en théorie linéaire par $\exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega_1 t)$ et $\exp(i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - i\omega_2 t)$. Tenant compte de la remarque concernant la réalité des champs on voit qu'un terme non-linéaire constitué d'un produit de deux amplitudes se comportera comme $\exp[i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - i(\omega_1 + \omega_2)t]$, $\exp[i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - i(\omega_1 - \omega_2)t]$ plus leurs complexes conjugués. Ces termes agissent comme source aux fréquences et vecteurs d'onde correspondant à la somme et différence des quantités linéaires respectives. Un exemple particulier a été considéré dans les éqs. (5.29) et (5.30). Si les amplitudes ne sont pas trop grandes ces termes de sources sont petits et les amplitudes des perturbations du deuxième ordre restent, sous certaines conditions, petites. Pour des problèmes unidimensionnels la condition était une dispersion suffisante, éq. (5.31). Dans le cas général, il peut y avoir interaction forte même en présence de dispersion quand la somme ou la différence des fréquences et vecteurs d'onde satisfait elle-même une relation de dispersion d'une onde linéaire (pas nécessairement de la même branche d'onde). On est donc amené à chercher des triades résonnantes, c'est-à-dire des groupes de trois ondes ayant des fréquences et vecteurs d'onde satisfaisant

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 \quad (5.71)$$

et

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3. \quad (5.72)$$

(*) La discussion qui suit (paragraphe 5.3 et 5.4) est prise dans le livre très recommandable de R.A. Cairns, *Plasma Physics*, Blackie, Glasgow and London, 1985

Les relations peuvent toujours être écrites sous cette forme, avec un signe plus, en rénumérotant les modes si nécessaire. Si des triades résonnantes existent, les non-linéarités quadratiques vont permettre une interaction forte entre les ondes et très souvent ces interactions domineront celles à des ordres plus élevés.

Dans un plasma il y a une telle variété de modes qu'il n'est pas difficile de trouver des exemples de triades résonnantes. Dans le but d'illustrer les principes généraux, on considère ici simplement un système hypothétique dans lequel l'amplitude d'une onde satisfait l'équation

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \phi - \nabla^2 (\nabla^2 \phi) + \phi^2. \quad (5.73)$$

Par linéarisation on obtient la relation de dispersion

$$\omega^2 = k^2 + k^4, \quad (5.74)$$

montrée dans la Fig. 5.5.

Il est clair que $k_1 < k_2 + k_3$; il est donc possible de choisir les vecteurs $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ et $\mathbf{k}_3$ tels qu'ils satisfont l'éq. (5.72), Fig. 5.6.

Supposons maintenant que les trois ondes correspondent aux solutions

$$\phi_j \exp(i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - i\omega_j t), \quad j = 1, 2, 3$$

si le terme non-linéaire dans (5.73) est négligé. Dans cette approximation les amplitudes ϕ_j sont constantes.

Dans le cas où elles sont modérément grandes seulement on peut considérer une théorie faiblement non-linéaire en supposant que les trois modes gardent leur identité de base mais ne sont plus entièrement indépendants. Qui dit "garder l'identité de base" dit "variation lente" des amplitudes. Elles varient dû à leurs interactions mutuelles mais lentement comparé aux fréquences. Supposant les amplitudes constantes par rapport à x les modes prennent la forme

$$\phi_j(t) \exp(i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - i\omega_j t), \quad j = 1, 2, 3, \quad (5.75)$$

où $\phi_j(t)$ est une fonction qui varie lentement au cours du temps,

$$\left| \frac{1}{\omega_j \phi_j} \frac{d\phi_j}{dt} \right| \ll 1, \quad (5.76)$$

au lieu d'être constante comme en théorie linéaire.

Le ϕ total étant une superposition de ces ondes, le terme en ϕ^2 qui excite ϕ_1 est

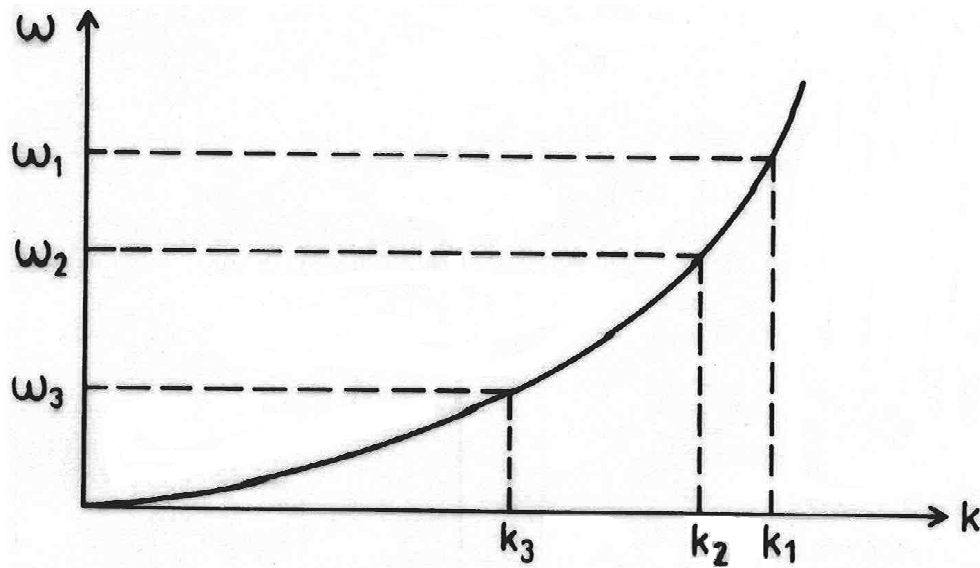


Figure 5.5 Relation de dispersion linéaire obtenue de l'éq. (5.73). Les trois fréquences satisfont l'éq. (5.71)

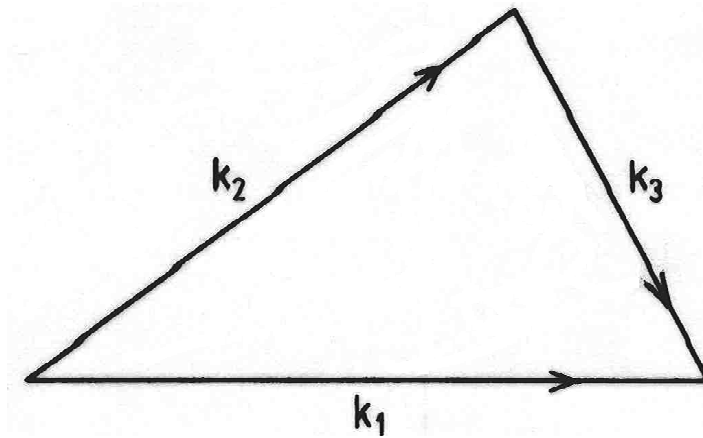


Figure 5.6 La condition de résonance pour les vecteurs d'onde

$$\frac{1}{4}\phi_2\phi_3\exp[i(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{r} - i(\omega_2 + \omega_3)t] + \text{c.c.} = \Re\left[\frac{1}{2}\phi_2\phi_3\exp i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)\right].$$

Moyennant (5.76) on trouve

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\phi_1(t)\exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega_1 t)\right] \approx \left(-\omega_1^2\phi_1 - 2i\omega_1\frac{d\phi_1}{dt}\right)\exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega_1 t),$$

où le terme $d^2\phi_1/dt^2$ a été négligé devant celui contenant la dérivée première. Insérant ce résultat dans (5.73) on a

$$-2i\omega_1 \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{1}{2}\phi_2\phi_3$$

ou

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \frac{i}{4\omega_1}\phi_2\phi_3. \quad (5.77)$$

De façon similaire on dérive

$$\frac{d\phi_2}{dt} = \frac{i}{4\omega_2}\phi_1\phi_3^*, \quad (5.78)$$

$$\frac{d\phi_3}{dt} = \frac{i}{4\omega_3}\phi_1\phi_2^*. \quad (5.79)$$

En définissant $\Phi_j = \omega_j^{1/2}\phi_j$ les équations (5.77), (5.78) et (5.79) peuvent être mises sous la forme plus symétrique,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi_1}{dt} &= i\lambda\Phi_2\Phi_3, \\ \frac{d\Phi_2}{dt} &= i\lambda\Phi_1\Phi_3^*, \\ \frac{d\Phi_3}{dt} &= i\lambda\Phi_1\Phi_2^*, \end{aligned} \right\} \quad (5.80)$$

$$\lambda = \frac{1}{4\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3}}. \quad (5.81)$$

Le calcul dans le cas d'ondes dans un plasma se fait de la même manière ; il est simple en principe mais d'habitude assez long car on part d'un système d'équations et non pas d'une seule équation assez simple. Une rénormalisation des amplitudes permet toujours d'arriver à une forme symétrique des équations, (5.80), où tous les coefficients de couplage sont de valeur absolue égale.

Avec l'aide de (5.71) et (5.80) on montre que

$$\frac{d}{dt} \left[\omega_1|\Phi_1|^2 + \omega_2|\Phi_2|^2 + \omega_3|\Phi_3|^2 \right] = 0. \quad (5.82)$$

Si on calcule les amplitudes Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 qui permettent d'écrire les équations sous la forme (5.80) pour une triade d'ondes de plasma véritables, on remarque

que l'éq. (5.82) peut être interprétée comme l'équation de conservation d'énergie, $\omega_j |\Phi_j|^2$ étant à une constante près, la densité d'énergie de l'onde, éq. (2.60). Nous avons fait l'hypothèse tacite qu'il s'agit ici d'ondes d'énergie positive. Dans le cas contraire (p. ex. pour certaines ondes en présence de faisceaux) il y a lieu de changer le signe correspondant dans l'éq. (5.82).

Une autre conséquence de (5.80) est connues sous le nom de relations de Manley-Rowe :

$$\frac{d}{dt} [|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2] = \frac{d}{dt} [|\Phi_1|^2 + |\Phi_3|^2] = \frac{d}{dt} [|\Phi_2|^2 - |\Phi_3|^2] = 0. \quad (5.83)$$

Explicitement, elles donnent

$$-\frac{d}{dt} |\Phi_1|^2 = \frac{d}{dt} |\Phi_2|^2 = \frac{d}{dt} |\Phi_3|^2. \quad (5.84)$$

Un grand nombre d'études ont été faites concernant le comportement du système (5.80) et de ses généralisations. Une petite partie va être mentionnée dans le paragraphe qui suit. Il est possible de trouver une solution exacte de (5.80) en termes de fonctions elliptiques mais nous nous contentons ici d'en donner une idée qualitative. Supposons qu'au début l'amplitude Φ_1 soit beaucoup plus grande que ses compagnons. Dans ce cas, Φ_2 et Φ_3 vont croître dû à l'énergie fournie par Φ_1 . Des équations (5.82) et (5.84) il est pourtant clair que les solutions sont bornées et que cette croissance doit, après un certain moment, arriver à termes, l'énergie accumulée dans Φ_2 et Φ_3 retournant à Φ_1 . En général, les solutions sont de nature périodique.

Différentes généralisations de (5.80) sont possibles. Par exemple, un amortissement faible des ondes peut être introduit en remplaçant les membres de gauche par $d\Phi_j/dt + \nu_j \Phi_j$, ν_j étant l'amortissement de l'onde j en absence d'effets non-linéaires. Une généralisation importante est l'interaction de paquets d'ondes dans lesquels les amplitudes varient dans l'espace (bien sûr lentement par rapport à k_j !); il en résulte des équations de la forme

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \Phi_1 = i\lambda \Phi_2 \Phi_3 \quad (5.85)$$

où $\mathbf{v}_j$ est la vitesse de groupe de l'onde j . Ces cas plus généraux ne peuvent souvent être résolus qu'avec des moyens numériques.

5.5 Instabilités paramétriques

En termes généraux, une instabilité paramétrique dans un système quelconque consiste en la croissance d'un mode rendu instable par une oscillation de fréquence différente imposée de l'extérieur. L'histoire de ces instabilités a commencé il y a plus d'un siècle. En physique des plasmas la "pompe externe" est d'habitude une onde de grande amplitude excitée par une source extérieure. Des instabilités paramétriques de ce genre ont été étudiées en détail vu l'intérêt qu'elles présentent d'une part pour le sujet de l'interaction laser-plasma (fusion laser) et d'autre part pour celui du chauffage HF (confinement magnétique). Dans les deux cas, l'énergie amenée par une onde électromagnétique peut être donnée à d'autres types d'ondes.

Supposons l'existence de deux ondes qui forment une triade résonnante avec l'onde incidente (la "pompe"). La fréquence de cette dernière étant la plus grande, les amplitudes de deux autres satisfont

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi_2}{dt} + \nu_2 \Phi_2 &= i\lambda \Phi_1 \Phi_3^*, \\ \frac{d\Phi_3}{dt} + \nu_3 \Phi_3 &= i\lambda \Phi_1 \Phi_2^*, \end{aligned} \right\} \quad (5.86)$$

où $\nu_2 > 0$ et $\nu_3 > 0$ sont les taux d'amortissement dont nous tenons compte maintenant. L'amplitude de la pompe Φ_1 est supposée constante et les deux autres petites ; dans cette approximation l'éq. (5.86) a une solution se comportant comme $\exp pt$ avec

$$(p + \nu_2)(p + \nu_3) = \lambda^2 |\Phi_1|^2. \quad (5.87)$$

Il y a instabilité $p > 0$ et croissance des deux ondes décrites par l'éq. (5.86) quand

$$\lambda^2 |\Phi_1|^2 > \nu_2 \nu_3. \quad (5.88)$$

Pour des raisons évidentes, ce processus porte le nom d'instabilité de désintégration. L'éq. (5.88) est un résultat important exhibant une des caractéristiques des instabilités paramétriques : l'instabilité a lieu seulement quand l'intensité de la pompe dépasse un certain seuil qui est proportionnel au produit des taux d'amortissement des ondes générées par la désintégration. L'existence d'un seuil permet souvent d'identifier expérimentalement les instabilités paramétriques.

Dans l'éq. (5.86) on suppose de satisfaire exactement aux conditions de résonance, éqs (5.71) et (5.72). S'il y a une légère différence dans les fréquences (frequency mismatch)

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 \quad (5.89)$$

le système (5.86) doit être modifié et devient

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi_2}{dt} + \nu_2 \Phi_2 &= i\lambda \Phi_1 \Phi_3^* \exp(-i\Delta\omega t), \\ \frac{d\Phi_3}{dt} + \nu_3 \Phi_3 &= i\lambda \Phi_1 \Phi_2^* \exp(-i\Delta\omega t), \end{aligned} \right\} \quad (5.90)$$

Si on pose

$$\tilde{\Phi}_2 = \Phi_2 \exp\left(\frac{i}{2}\Delta\omega t\right), \quad \tilde{\Phi}_3 = \Phi_3 \exp\left(\frac{i}{2}\Delta\omega t\right),$$

il vient

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{\Phi}_2}{dt} + \left(\nu_2 - \frac{i}{2}\Delta\omega\right) \tilde{\Phi}_2 &= i\lambda \Phi_1 \tilde{\Phi}_3^*, \\ \frac{d\tilde{\Phi}_3^*}{dt} + \left(\nu_3 + \frac{i}{2}\Delta\omega\right) \tilde{\Phi}_3^* &= -i\lambda \Phi_1^* \tilde{\Phi}_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.91)$$

En cherchant de nouveau une solution de la forme $\exp pt$ on arrive à la relation de dispersion

$$\left[p + \left(\nu_2 - \frac{i}{2}\Delta\omega \right) \right] \left[p + \left(\nu_3 + \frac{i}{2}\Delta\omega \right) \right] = \lambda^2 |\Phi_1|^2. \quad (5.92)$$

où $p = p_1 + ip_2$. On peut séparer la partie réelle de la partie imaginaire de l'éq. (5.92). Expriment p_2 en terme de p_1 avec la partie imaginaire on trouve que

$$p_2 = \frac{\Delta\omega}{2} \frac{\nu_3 - \nu_2}{\nu_2 + \nu_3}$$

au seuil de l'instabilité (où $p_1 = 0$). La substitution de cette valeur dans la partie réelle de (5.92) fournit la condition pour le seuil :

$$\lambda^2 |\Phi_1|^2 = \nu_2 \nu_3 + \Delta\omega^2 \frac{\nu_2 \nu_3}{(\nu_2 + \nu_3)^2}. \quad (5.93)$$

Le seuil minimal s'obtient évidemment quand les fréquences concordent exactement ($\Delta\omega = 0$). Plus l'amplitude de la pompe est éloignée de ce seuil minimal, plus le "mismatch" $\Delta\omega$ peut être grand avant que l'instabilité soit empêchée.

6.

Waves in non-uniform plasmas**6.1 Introduction**

Waves in a non-uniform plasma is a vast and complex subject which cannot be covered in a few lectures, even if linear physics only is touched. This subject includes the dependence of any wave's wavelength on the various plasma parameters like composition, densities, temperatures, magnetic field or various species' flow velocities, whether described by cold-plasma or kinetic theory. It includes questions of diffraction and reflection and the change of polarisation due to changing plasma parameters. Waves can be absorbed due to uniformities or even converted into another wave branch. Gradients of the various equilibrium parameters can also substantially change the frequency of certain waves leading to completely new ones (the drift waves) and various instabilities like the well-known MHD instabilities and instabilities of the very same drift waves.

In this chapter, we will mainly look at unbounded plasma situations where boundary conditions are either absent or of the type *incoming* and *outgoing* waves. MHD instabilities have been treated in ch.5 and are excluded here. The best source for a complete, mainly linear, overview of the kind of physics treated in the first part of this chapter §§6.2-6.5 is the book of Tom Stix¹ which is the main reference work for the radio-frequency wave heating community. Unfortunately, nothing comparable exists for drift waves which are still an active and very important field of research. The problem with the drift waves is that many of their fusion-relevant

¹ Thomas Howard Stix, *Waves in Plasmas*, American Institute of Physics, 1992.

instabilities are at least co-determined by very subtle kinetic effects in multi-dimensional geometry necessitating the development of heavy forefront computer codes. The development of even the linear theory is far from being terminated. There is a vast literature in research papers available and introductions in various forms can be found in most fusion plasma physics text books. A recent list of literature covering the linear theory can be found in S. Brunner's thesis².

In this chapter, it is merely possible to evoke the basic physical ideas which are the backbone of this passionating subject and briefly present the theoretical tools (approximations !) used to exploit them.

6.2 Cold plasma dispersion relation, resonances and principle cut-offs

The lowest approximation is the dispersion relation, $\Delta(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{r}) = 0$, in which the spatial co-ordinate $\mathbf{r}$ is understood as a parameter. Obviously, such an approach can only be meaningful as long as the resulting wave lengths λ are much smaller then the relevant characteristic equilibrium lengths,

$$L_q = |\nabla q / q|^{-1}, \quad (6.1)$$

where q stands for any equilibrium quantity like density, temperature or magnetic field.

As long as we do not talk about drift waves, the best starting point for an investigation of wave propagation in general is the dispersion relation obtained from the cold plasma model. It is comparatively simple and yet most waves appear in one form or another. More physics will be added later if necessary. We here repeat therefore the main results concerning this dispersion relation following Stix's customary notation.

Under the assumption that the electric field can be written as $\mathbf{E} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$ Maxwell's equations reduce to

$$\Delta \cdot \mathbf{E} \equiv \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (6.2)$$

where $\mathbf{E}$ is to be understood as a complex amplitude. The dielectric tensor has the form

$$\epsilon = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

² Stephan Brunner, *Global approach to the spectral problem of microinstabilities in tokamak plasmas using a gyrokinetic model*, Thèse No 1701 /1997), Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.

where

$$S = (R + L)/2, \quad D = (R - L)/2, \quad (6.4)$$

$$R \equiv 1 + \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}^{-} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega + \Omega_{\alpha})}, \quad (6.5)$$

$$L \equiv 1 + \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}^{+} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega - \Omega_{\alpha})}, \quad (6.6)$$

$$P \equiv 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}. \quad (6.7)$$

Problem 6.1 : Derive eqs.(6.3)-(6.7) from the hot plasma dielectric tensor,(3.80).

If θ denotes the angle between $\mathbf{k}$ and $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$, and if $\mathbf{k}$ lies in the x, z plane, (6.2) takes the explicit form :

$$\Delta \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} S - N^2 \cos^2 \theta & -iD & N^2 \cos \theta \sin \theta \\ iD & S - N^2 & 0 \\ N^2 \cos \theta \sin \theta & 0 & P - N^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \quad (6.8)$$

where

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{k}c}{\omega} \quad (6.9)$$

stands for the refractive index. A non-zero solution $\mathbf{E}$ of (6.8) can only be found under the condition that the determinant of Δ vanishes. This condition is the desired dispersion relation for the cold plasma,

$$aN^4 - bN^2 + c = 0. \quad (6.10)$$

The coefficients are

$$a = S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta, \quad (6.11)$$

$$b = RL \sin^2 \theta + PS(1 + \cos^2 \theta), \quad (6.12)$$

$$c = PRL. \quad (6.13)$$

The solution to (6.10) is

$$N^2 = \frac{b \pm F}{2a}, \quad (6.14)$$

where F^2 may be reduced to the form

$$F^2 = (RL - PS)^2 \sin^4 \theta + 4P^2 D^2 \cos^2 \theta. \quad (6.15)$$

The RF wave community calls the two solutions (6.14) of equation (6.10) the *fast* and the *slow* wave. Another useful form of the dispersion relation is due to Åström and Allis :

$$\operatorname{tg}^2 \theta = -\frac{P}{S} \frac{(N^2 - R)(N^2 - L)}{(N^2 - RL/S)(N^2 - P)}. \quad (6.16)$$

The relations for propagation in parallel and perpendicular direction to the magnetic field are quickly obtained from (6.16).

For $\theta = 0$:

$$P = 0, \quad N^2 = R, \quad N^2 = L. \quad (6.17)$$

For $\theta = \pi/2$:

$$N^2 = \frac{RL}{S}, \quad N^2 = P. \quad (6.18)$$

Note the appearance of the plasma "wave" for $\theta = 0$. It is interesting to investigate, what exactly this branch does for intermediate angles. From the last line of eq.(6.8) its polarisation can be deduced,

$$\frac{E_x}{E_z} = \frac{N^2 \sin^2 \theta - P}{N^2 \sin \theta \cos \theta}. \quad (6.19)$$

We are used to think of the plasma oscillations as a purely electrostatic phenomenon. This is only true for short wave lengths, $N^2 \rightarrow \infty$, where $E_x/E_z = \tan \theta$ and hence $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$. The corresponding dispersion relation is $a = 0$; this is consistent with (6.14) which says that $a = 0$ defines the **resonances** where N^2 goes to infinity and any solution becomes electrostatic.

The fate of the plasma oscillations can easily be followed from parallel to almost perpendicular "propagation" in the frequency range $\omega_{pi} \ll \omega \leq \omega_{pe} \ll |\Omega_e|$. This approximate dispersion relation reads :

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 \cos^2 \theta. \quad (6.20)$$

This branch is called the *magnetised plasma oscillations*.

In conclusion, in a certain parameter range the simple electronic plasma oscillations can be identified. In general, they are not purely electrostatic and are coupled to the electromagnetic branches for which they appear as a **resonance**. The question now is, what the meaning of this **resonance** is. After all, in physics, infinities are always the sign of something essential having been left out. Not that the theory in question were wrong, but it is easier to interpret when the missing piece of physics is identified.

A last remark concerns the parameter combinations where $N^2 = 0$ which are called **principle cutoffs** because negative values of N^2 correspond to complex values for $\mathbf{k}$ and, hence, in stable situations to evanescent waves.

6.3 Propagation, reflection, conversion and absorption in unmagnetised plasma

1. Introduction

The formally most simple case of the problem at hand is that of an unmagnetised plasma with non-uniform plasma density in slab geometry. This case shows many of the important aspects of wave propagation in non-uniform plasma. It is physically relevant for absorption of laser light in laser fusion³ as well as radio-wave reflection and absorption in the ionosphere⁴. From the formal point of view it is also of interest for Alfvén-wave and ion-cyclotron range of frequency heating (AWRF, ICRF heating).

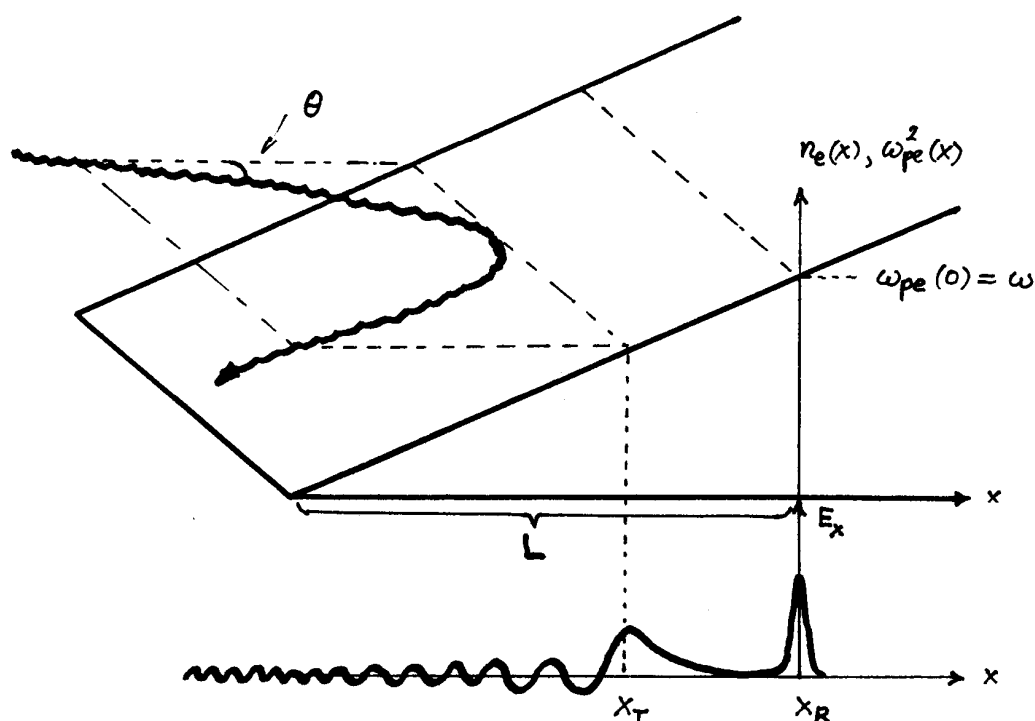


Figure 6.1 A laser beam obliquely impinges on a plasma surface. The density of the plasma increases towards the interior, in the positive direction of x

Let us rapidly introduce the physics we intend to formalise. In the laser case we have a short-wavelength electromagnetic wave incident onto a slab plasma whose density increases with x towards its interior (Fig. 6.1). The characteristic length of the density variation is L_n , eq.(6.1).

³ T. Speziale and P.J. Catto, Phys. Fluids **20**(1977)990 and papers cited therein.

⁴ V.L. Ginzburg, *The propagation of electromagnetic waves in plasmas*, Pergamon, Oxford, 1970.

If the incidence is not perfectly perpendicular to the plasma surface, the wave is reflected at the turning point x_T before it reaches the "resonance point" x_R where the wave's frequency matches with the local plasma frequency $\omega_{pe}(x_R)$. Note that at x_T the electromagnetic wave does **not** encounter a *principle cut-off* where $N^2 = 0$, eq.(6.9), but merely a cut-off of k_x ,

$$c^2 k_x^2(x) = \omega^2 - \omega_{pe}^2(x) - c^2(k_y^2 + k_z^2) = 0 \quad \text{at} \quad x = x_T, \quad (6.21)$$

because k_y and k_z are invariant due to the fact that the plasma is uniform in these two directions. If, however, the angle of incidence is small enough (i.e. x_T near to x_R), some field tunnels through the evanescent region from x_T to x_R where it resonantly excites plasma oscillations. Their amplitude grows in time while their spatial extent shrinks until either collisions (dissipation) or temperature effects (conversion) limit the growth. The energy flow from x_T to x_R is independent of these amplitude-limiting effects as long as the collisions are not too frequent nor the temperature too high. In this situation one says that the incoming "energy-carrier" wave has lost energy by *resonant absorption*.

The resonant point x_R (and x_T as well) can be moved throughout the plasma if the frequency ω is variable. In the framework of a bounded plasma one would talk about the *continuous spectrum* of the plasma oscillation in contrast to the *discrete spectrum* of electromagnetic cavity modes. For any frequency ω in the range $[0, \max \omega_{pe}(x)]$ one can find a highly localised perturbation of the plasma which oscillates at that frequency. In an eigenvalue approach to each eigenfrequency in this range corresponds a singular eigenfunction in the form of a distribution.

Due to the fact that $\lambda \ll L$ the energy-carrier in Fig. 1.1 can be described in the geometrical optics (WKB) approximation. Only in the neighbourhood of x_T and x_R , where WKB breaks down, one needs to solve a differential equation. The situation in Alfvén wave heating is entirely different, Fig. 1.2.

Large scale antennae excite global oscillations of the plasma column. The pertinent wavelength λ in the minor radius direction r is of the order of the inhomogeneity scale length L which is the same as the plasma minor radius r_p . The WKB-method is not applicable. The global modes of the fast magnetosonic wave play the role of the energy-carrier here. The oscillators which store (or dissipate, or convert) the energy are localized shear Alfvén waves in this case. Like the Langmuir waves they have a continuous spectrum as can be seen from their simplest dispersion relation $\omega = k_{\parallel} v_A(r)$, where $v_A^2(r) = \mathbf{B}_0^2(r)/\mu_0 \rho_0(r)$ is the Alfvén velocity (4.57), $\mathbf{B}_0$ the magnetic field, $\rho_0(r)$ the mass density, and $k_{\parallel}$ the wavelength parallel to $\mathbf{B}_0$.

While analytical methods allow one to obtain quite accurate quantitative results in the laser case, not more than qualitative results have been produced analytically in the case of AWH. The main reason is that in AWH all the details of the profiles $B_0(r)$ and $\rho(r)$ enter into the differential equations, whereas in the laser case the profile $n_e(x)$ enters merely into the WKB solution.

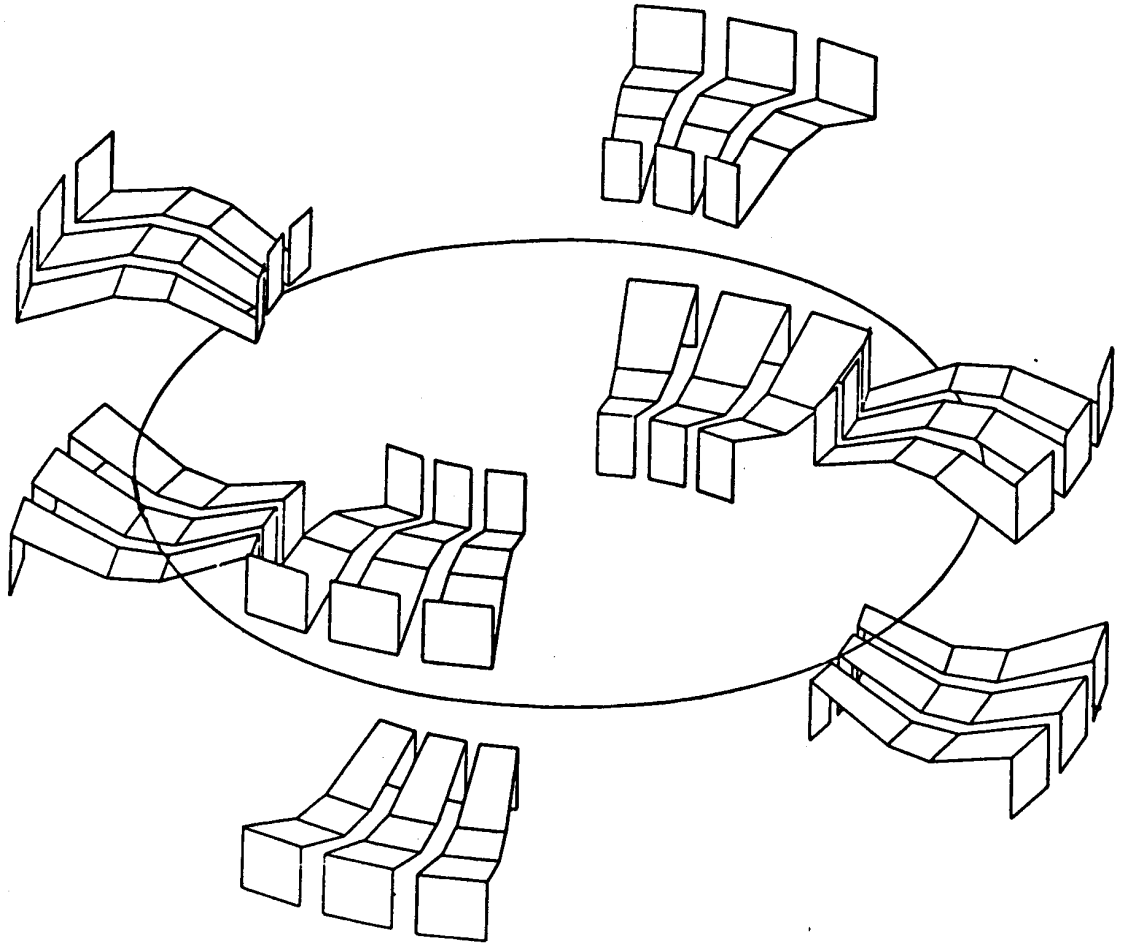


Figure 6.2 Arrangement of antennae in Alfvén wave heating on TCA. Relative size compared to size of plasma is not very different from an ICRF heating system.

The heating in the ion-cyclotron range of frequency resembles strongly AWH since the same energy-carrier, the fast magnetosonic wave, is used. The antennae are of similar size. The frequencies, however, are higher and the radial wavelengths are somewhat shorter. The wave-lengths in present-day devices are, however, still comparable with the minor radius r_p ; the WKB-approach is highly questionable therefore. Another pronounced difference is that the excitation of global modes is usually avoided. It seems that the resonant absorption process at the ion-ion hybrid layer is strong enough to mask any resonance with a global mode of the column.

2. Dispersion relation

To introduce the formal part, let us look first at the dispersion relation, eq.(6.14) in the limit $B_0 \rightarrow 0$:

$$N^2 = \frac{P^2 \pm PO(B_0)}{P}. \quad (6.22)$$

As long as $B_0 \neq 0$ there are two different (electromagnetic) waves with, in general for arbitrary $\mathbf{B}_0$, a resonance at $P = 0$ i.e. at $\omega^2 = \omega_{pe}^2$. Eq.(6.22) can be given the alternative form

$$PN^2 = P^2 \pm PO(B_0), \quad (6.23)$$

from which nothing is lost when the limit $B_0 \rightarrow 0$ is taken. A bit more insight can be gained from taking the limit directly in (6.8) :

$$\begin{pmatrix} P - N^2 \cos^2 \theta & 0 & N^2 \cos \theta \sin \theta \\ 0 & P - N^2 & 0 \\ N^2 \cos \theta \sin \theta & 0 & P - N^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \quad (6.24)$$

The y -component of the electric field is decoupled from the other two components; this is a property which also holds true in a non-uniform slab plasma as will be shown. From (6.24) the dispersion relations for the two electromagnetic polarizations are easily obtained :

$$P - N^2 = 0 \quad \text{and} \quad P(P - N^2) = 0. \quad (6.25)$$

This result is identical with what eq.(6.23) states.

3. The basic equations

In the rest of this section we largely follow Ginzburg's book, see footnote 4. A simplified version exists in German⁵.

Adopting slab geometry, we assume a semi-infinite plasma whose density, $n_e(x)$, increases to the right, Fig.6.3.

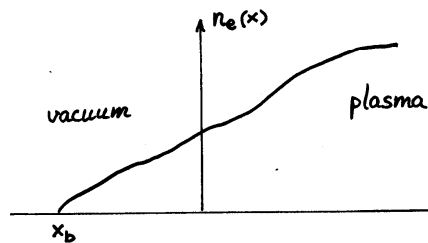


Figure 6.3 Increasing density at the edge of a plasma

⁵ ... and obviously in Russian : L.A. Artsimowitsch und R.S. Sagdejew, *Plasmaphysik für Physiker*, Teubner, Stuttgart, 1983 (das ist überhaupt ein gutes Buch, wenn es noch zu finden ist !)

We assume that a plane electromagnetic wave with frequency ω impinges on the plasma. Since the equilibrium depends merely on x we can represent the wave fields in and outside the plasma by $\sim f(x) \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)]$. The equations for the amplitudes $f(x) = (\mathbf{E}, \mathbf{B})$ are given by Maxwell's equations in the form

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i \frac{\omega}{c^2} \epsilon \mathbf{E}, \quad (6.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}, \quad (6.27)$$

where the dielectric function ϵ has the form

$$\epsilon(x) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2(x)}{\omega^2}, \quad (6.28)$$

and $\omega_{pe}(x) = \sqrt{e^2 n_e(x) / \epsilon_0 m_e}$ is the plasma frequency. We have neglected any influence of the ions other than their neutralising role. Without loss of generality, we can restrict ourselves to the case where $k_y = 0$. If we use the quantity

$$\mathbf{H} \equiv i\omega \mathbf{B} \quad (6.29)$$

instead of $\mathbf{B}$, the eqs. (6.26) and (6.27) take the explicit form

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E_x &= -ik_z H_y, \\ \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E_y &= ik_z H_x - \frac{dH_z}{dx}, \\ \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E_z &= \frac{dH_y}{dx} \end{aligned} \quad (6.30)$$

and

$$\begin{aligned} H_x &= -ik_z E_y, \\ H_y &= ik_z E_x - \frac{dE_z}{dx}, \\ H_z &= \frac{dE_y}{dx}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

The first equation of (6.30) can be used to eliminate E_x in the second equation of (6.31). Similarly H_x in the second equation of (6.30) can be eliminated using the first equation of (6.31). In doing so one obtains two decoupled systems of equations

$$\begin{aligned} \frac{dH_z}{dx} &= - \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - k_z^2 \right) E_y, \\ \frac{dE_y}{dx} &= H_z \end{aligned} \quad (6.32)$$

and

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\frac{dE_z}{dx} &= -\left(\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon - k_z^2\right)H_y, \\ \frac{dH_y}{dx} &= \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon E_z.\end{aligned}\tag{6.33}$$

The fact that (6.32) and (6.33) do not have common field components allows the definition of two independent polarisations. Traditionally, they are called s- and p-polarisation :

$$\text{s - polarisation} \quad H_z \neq 0, E_y \neq 0, (E_z = H_y = 0) \rightarrow E_x = 0, \tag{6.34}$$

$$\text{p - polarisation} \quad E_z \neq 0, H_y \neq 0, (H_z = E_y = 0) \rightarrow H_x = 0. \tag{6.35}$$

The decoupling of these two polarisations has already been remarked in the uniform plasma, eq.(6.24). The waves corresponding to the two polarizations behave quite differently. In the s-polarisation, the electric field remains transverse to the direction of wave propagation all along the wave path. This wave is therefore a pure electromagnetic wave. Formally,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{dE_x}{dx} + ik_z E_z = 0$$

as can be seen from (6.34). In the p-polarisation the components E_x and E_z are different from zero, and therefore, in general, $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$. The wave has an electrostatic component and can couple to the Langmuir oscillations. There is another distinct formal difference between the two polarisations : the equations (6.32) are regular whereas the system (6.33) has a singular point at $\epsilon(x) = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2 = 0$ i.e. at the point where the driving frequency ω equals the local plasma frequency. The case of the p-polarisation has much in common with the Alfvén wave heating problem. The equations (6.33) have the same mathematical structure as the equations pertinent to Alfvén wave heating in slab geometry⁶.

4. S-polarization

Let us start with the s-polarisation as a first and good introduction into the analytical theory of wave propagation in weakly inhomogeneous media. Eliminating H_z from eqs.(6.32) results in a second order differential equation,

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(x) - k_z^2\right) E_y = 0. \tag{6.36}$$

In a sufficient distance from the turning point x_T , where $(\omega^2/c^2)\epsilon(x_T) = k_z^2$, this equation can be solved in the approximation of geometrical optics (WKB), i.e.

$$E_z = \frac{\text{const}}{\sqrt{k_x}} e^{i\left[\int^x k_x(x')dx' + k_z z - \omega t\right]}, \tag{6.37}$$

⁶ A. Hasegawa and L. Chen, Phys. Rev. Lett. **23**(1974)1399

where

$$k_x^2(x) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(x) - k_z^2. \quad (6.38)$$

The eq.(6.37) holds under the condition that $|dk_x/dx| \ll |k_x^2|$ and $|d^2k_x/dx^2| \ll |k_x^3|$, that is, away from the turning point x_T and for sufficiently slowly varying $\epsilon(x)$. In the neighbourhood of the turning point one needs an exact solution of eq.(6.36).

Let us assume that the electron density $n_e(x)$ varies linearly in the neighbourhood of the turning point. In order to have a unified notation for the s- and p-polarisations, let us also choose the co-ordinate system in such away that $n_e(x) = (1 + x/L_n)n_0$ with $\omega_{pe0}^2 \equiv \omega_{pe}^2(x=0) = e^2 n_e(x=0)/m_e \epsilon_0 = \omega^2$; in this way the resonance point lies in the origin, as in Fig.6.1. Using this assumption we can write

$$\epsilon(x) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2(x)}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe0}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{x}{L_n}\right) = -\frac{x}{L_n} \quad (6.39)$$

and hence from (6.38)

$$k_x^2 = -k_0^2 \frac{x}{L_n} - k_z^2. \quad (6.40)$$

Here $k_0 = \omega/c$ denotes the vacuum wavenumber, i.e. the wavenumber of the *incoming* wave. The turning point is situated at $x_T = -L_n k_z^2/k_0^2 = -L_n \sin^2 \theta$ where θ denotes the angle of incidence at the plasma boundary, see Fig.6.4.

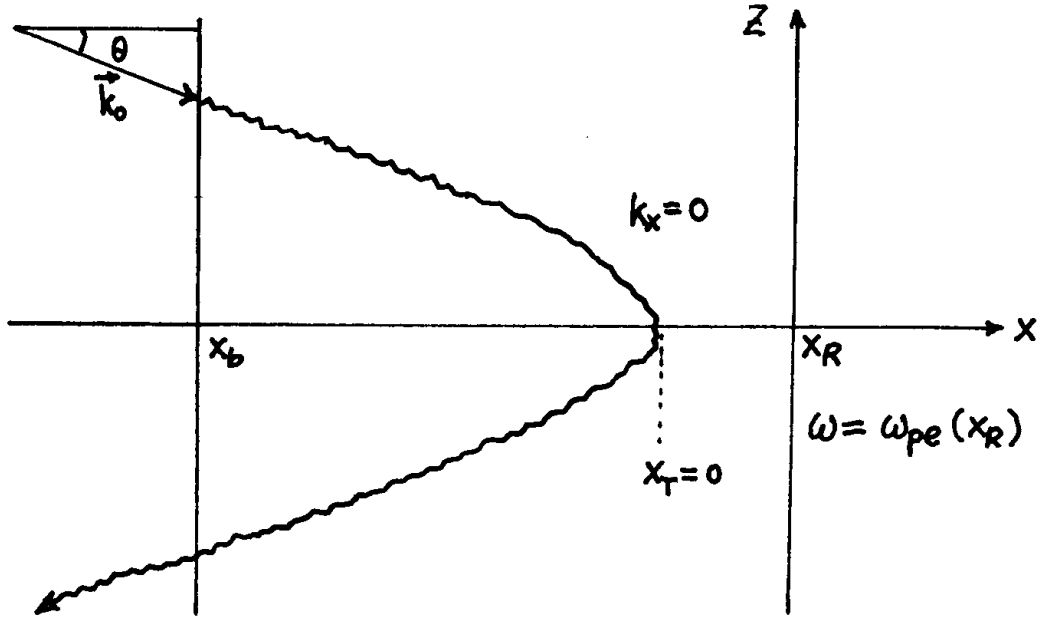


Figure 6.4 Electromagnetic wave obliquely incident on a plane plasma slab.

The wave equation (6.36) assumes the simplest form under the variable transformation

$$\xi = \left(\frac{k_0^2}{L_n} \right)^{\frac{1}{3}} (x + L_n \sin^2 \theta), \quad (6.41)$$

namely

$$\frac{d^2 E_y}{d\xi^2} - \xi E_y = 0. \quad (6.42)$$

This is an Airy equation. Note that the turning point in these co-ordinates lies at $\xi = 0$ and that the physically relevant characteristic length in the neighbourhood of the turning point is $(L_n/k_0^2)^{1/3}$.

The two linearly independent solutions are $\text{Ai}(\xi)$ and $\text{Bi}(\xi)$, (see Abramowitz and Stegun⁷). Both functions are bounded and oscillatory for $\xi < 0$, and monotonic for $\xi > 0$. The function $\text{Bi}(\xi)$, however, diverges for $\xi \rightarrow \infty$ as

$$\sim \xi^{-\frac{1}{4}} \exp \left(\frac{2}{3} \xi^{\frac{3}{2}} \right)$$

and must therefore be excluded as a physical solution. The physical solution is given by $\text{Ai}(\xi)$ only, Fig.6.5.

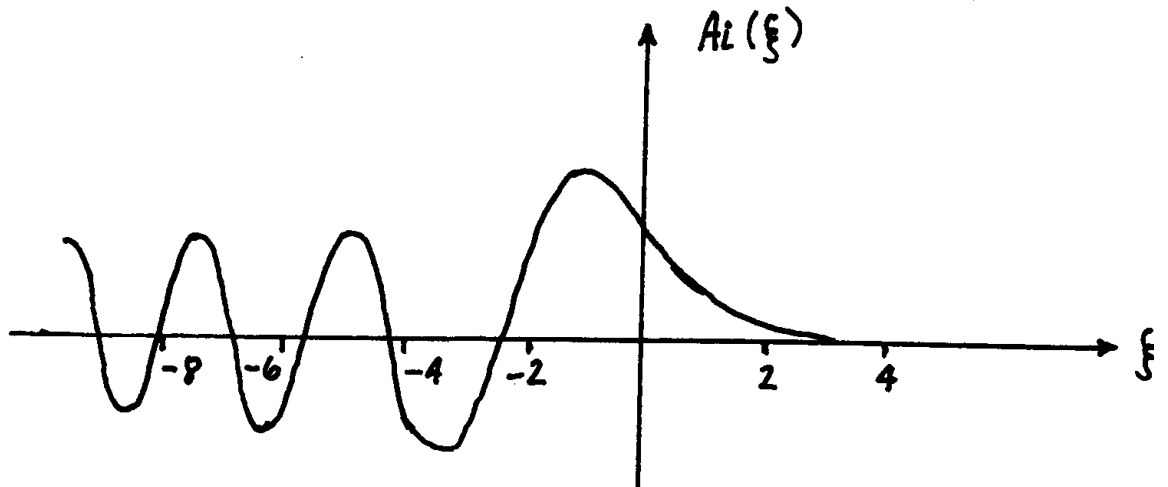


Figure 6.5 The bounded Airy function, $\text{Ai}(\xi)$, describes the E_y near the turning point.

Far away from the turning point, $\xi = 0$, the WKB solution is a good approximation. For large-enough ξ we expect that $\text{Ai}(\xi)$ has the form of the WKB solution, eq.(6.37), evaluated with the linear density profile. That this is indeed so, can be seen from the asymptotic expansion of $\text{Ai}(\xi)$ and the explicit expression for $\int k_x dx$ using the linear density profile

⁷ M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1964, 1970.

For $|\xi| \rightarrow \infty$ we have⁷

$$\begin{aligned} \xi > 0 : \quad \text{Ai}(\xi) &\sim \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{2}{3} \xi^{\frac{3}{2}}\right), \\ \xi < 0 : \quad \text{Ai}(\xi) &\sim \pi^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{4}} \sin\left[\frac{2}{3}(-\xi)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right] \end{aligned} \quad (6.43)$$

Combining eq. (6.39) with (6.41) yields

$$k_x^2 = - \left(\frac{k_0^2}{L_n} \right)^{\frac{2}{3}} \xi \quad (6.44)$$

and, using again eq.(6.41),

$$\int^x k_x(x') dx' = \int^\xi \sqrt{-\xi'} d\xi' = -\frac{2}{3}(-\xi)^{\frac{3}{2}}. \quad (6.45)$$

The identification with the WKB solution is now possible. We see that $\xi^{-\frac{1}{4}}$ in eq.(6.43) is the same as $k_x^{-1/2}$ in (6.37) and also that the same exponential dependence is present.

One now can perform the so-called matching procedure where the Airy solution is matched to the **sum** of an in-coming WKB wave of given amplitude, e.g.

$$E_z^{\text{in}} = \frac{1}{(-\xi)^{\frac{1}{4}}} \exp\left[-i\frac{3}{2}(-\xi)^{\frac{3}{2}}\right] \quad (6.46)$$

and an out-going wave with an amplitude R which is to be determined

$$E_z^{\text{out}} = \frac{R}{(-\xi)^{\frac{1}{4}}} \exp\left[i\frac{3}{2}(-\xi)^{\frac{3}{2}}\right]. \quad (6.47)$$

In the present s-polarisation, the reflection coefficient R is quite easy to determine. One finds $R = -i$, or $|R| = 1$, which corresponds total reflection. This result was to be expected from the fact that in the s-polarisation the wave is purely electromagnetic and does not interact with any other wave nor does it propagate further into the plasma.

5. P-polarization

Let us now try to get an understanding of the coupling between the electromagnetic wave and the Langmuir oscillations. From eq.(6.33)

$$\frac{d^2 H_y}{dx^2} - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \frac{d H_y}{dx} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - k_z^2 \right) H_y = 0. \quad (6.48)$$

We remark that if the inhomogeneity is weak, i.e. if $\partial\epsilon/\partial x$ is small in some sense and negligible, eq.(6.48) is identical with eq.(6.36) for E_y . For a linear density profile the solutions of eq.(6.48) will be Airy-function-like somewhere between the plasma edge and the turning point.

Eq.(6.48) is more difficult to solve than Airy's equation. We therefore refrain from seeking an analytic solution but discuss it qualitatively along the lines proposed by Artsimovich and Sagdeev⁵. From Airy's equation we know that the characteristic length in the neighbourhood of the turning point is $\sim (L_n/k_0^2)^{1/3}$, see eq.(6.41). Hence the first term in eq.(6.48) has the characteristic size $(k_0^2/L_n)^{2/3}H_y$, whereas the second term is, using (6.39),

$$\frac{1}{x} \frac{dH_y}{dx} \sim \frac{1}{L_n \sin^2 \theta} \left(\frac{k_0^2}{L_n} \right)^{\frac{1}{3}} H_y.$$

This second term is negligible compared to the first one in the neighbourhood of the turning point if $L_n \sin^2 \theta \gg (L_n/k_0^2)^{1/3}$, i.e. if the distance $L_n \sin^2 \theta$ between the turning point and the resonance point ($\epsilon = 0$, $\omega = \omega_{pe0}$, $x = 0$) is larger than the wavelength near the turning point. The latter is of the order 2 to 4 times $(L_n/k_0^2)^{1/3}$, see Fig 6.5 and eq.(6.41). In this case the field decays exponentially towards the resonance and the excitation at the resonance point is exponentially small. Conversely, if $L_n \sin^2 \theta \sim (L_n/k_0^2)^{1/3}$ the field does not decay substantially before reaching the resonance and the resonance has to be taken into account.

The discussion of the resonance is facilitated by the fact that the field component H_y does not diverge at $\epsilon = 0$ as one can guess from the pertinent 1. order equations (6.33). Using (6.39) in (6.48) yields

$$\frac{d^2 H_y}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dH_y}{dx} - \left(\frac{\omega^2}{c^2} \frac{x}{L_n} + k_z^2 \right) H_y = 0, \quad (6.49)$$

or in dimensionless notation,

$$\frac{d^2 h_y}{d\zeta^2} - \frac{1}{\zeta} \frac{dh_y}{d\zeta} - (1 + \kappa\zeta) h_y = 0, \quad (6.50)$$

with $\zeta = k_z x$, $\kappa = \omega^2/(c^2 k_z^2 L_n)$ and $H_y(x) = h_y(k_z x)$.

Expanding⁸ the solutions around the singular point $\zeta = 0$ one finds a regular, w_1 , and a singular solution, w_2 ,

$$\begin{aligned} w_1 &= \zeta^2 + \frac{1}{8}\zeta^4 + \dots, \\ w_2 &= w_1 \ln \zeta + 2 + \frac{2}{3}\kappa\zeta^3 - \frac{3}{32}\zeta^4 \dots \end{aligned} \quad (6.51)$$

⁸ E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, reprinted 1973 from Forth Edition 1927.

The general solution of the differential equation (6.50), $c_1 w_1(\zeta) + c_2 w_2(\zeta)$, contains as usual two free constants, c_1 and c_2 . The solution of eq.(6.49) therefore is

$$H_y(x) = w_1(k_z x)(c_1 + c_2 \ln(k_z x)) + c_2 \bar{w}_1(k_z x), \quad (6.52)$$

where

$$\bar{w}_1(\zeta) = 2 + \frac{2}{3}\kappa\zeta^3 - \frac{3}{32}\zeta^4 \dots \quad (6.53)$$

We conclude that indeed H_y is finite at $x = 0$ and even with $dH_y/dx = 0$. The value of $H_y(0)$ or rather the ratio of $H_y(0)$ to the incoming wave amplitude at the plasma boundary H_y^{in} can only be obtained from the global solution of (6.48). The result obtained from an approximate solution of (6.49) is given by Ginzburg⁴. More recent results can be found in Speziale and Catto³. The essence of the results is that $H_y(0)/H_y^{\text{in}}$ has a maximum at small angles of incidence, specifically at $(k_0 L_n)^{1/3} \sin \theta \approx 1$ with a height of $\approx 1/\sqrt{2\pi k_0 L_n \sin^2 \theta}$, where $\sin \theta = k_z/k_0$ (Fig.6.4).

We now are prepared to discuss the "excitation of the Langmuir oscillator" near the resonance point. First, we deduce from (6.30) the behaviour of the electric field near the singularity knowing the behaviour of H_y from (6.52) :

$$E_x \approx iL_n \sin \theta \frac{H_y(0)}{k_0 x} = -L_n \sin \theta \frac{cB_y(0)}{x}, \quad (6.54)$$

$$E_z \approx -L_n \sin^2 \theta H_y(0) \ln x = -ik_0 L_n \sin^2 \theta cB_y(0) \ln k_z x. \quad (6.55)$$

In these two equations the expressions on the right side of the equal signs have been obtained using eq.(6.29) and $k_0 = \omega/c$. Note that E_x is the dominant component at the singularity, it diverges there as $1/x$.

This singularity disappears if more physics such as collisions or temperature effects (Langmuir **waves** instead of mere oscillations) is introduced or, if an initial value problem is solved instead of a driven steady-state problem. Let us first consider collisions. With collisions the dielectric function assumes the form

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + i\nu)}, \quad (6.56)$$

where $\nu \ll \omega_{pe}$ stands for the electron-ion collision frequency. In the neighbourhood of the resonance the dielectric function becomes $\epsilon \approx -x/L_n + i\nu/\omega$ and hence we have instead of (6.54)

$$E_x \approx -\frac{\sin \theta}{x/L_n - i\nu/\omega} cB_y(0), \quad (6.57)$$

which is finite everywhere in $x \in \mathbf{R}$.

Noting that for $\nu \ll \omega_{pe}$ the dispersion relation $\epsilon = 0$ produces $\omega = \pm\omega_{pe} - i\nu/2$ and that the field suffers hence from collisional damping with a rate of $\nu/2$ we can calculate the total time averaged $\langle \dots \rangle$ collisional power loss per area a ,

$$P/a = 2 \left\langle -\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\epsilon_0}{4} |\mathbf{E}|^2 dx \right\rangle \approx \frac{\nu}{2} \int \frac{\epsilon_0}{2} |E_x|^2 dx. \quad (6.58)$$

The explicit factor 2 in front of $\langle \dots \rangle$ stems from the fact that the energy density in the Langmuir oscillations is given by equal amounts of electrostatic and particle sloshing energy. Note that $\frac{\partial}{\partial t}$ produces $\nu/2$ and that $\langle (\Re \mathbf{E})^2 \rangle = |\mathbf{E}|^2/2$. On using (6.57) one obtains

$$P/a = \frac{\pi}{2} L_n \omega_{pe0} \sin^2 \theta \frac{|B_y(0)|^2}{2\mu_0} \int \frac{\nu L_n / \omega_{pe0}}{x^2 + (\nu L_n / \omega_{pe0})^2} \frac{dx}{\pi}. \quad (6.59)$$

Here we have the most important result in connection with resonant absorption. Since the integrand is a representation of the δ -function, we see that the absorbed power does not depend on the strength of the collisions (at least as long as they are not too frequent to invalidate our local investigation around the resonance point). All they determine is the height and the width of the resonant layer. If this layer becomes too broad the local approximation would break down. In mathematically formal papers on resonant absorption collisions are even not mentioned. It is sufficient to use the argument of causality which prescribes the manner in which the poles have to be treated.

In an initial-value approach, where causality is automatically satisfied a problem never arises (Laplace transform approach). Had we tackled the present problem via a solution of the pertinent equations of motion in time we would have found that the field amplitude at the resonance grows linearly in time whereas the width of the resonance decreases as $1/t$. The energy content in the resonance layer therefore would grow linearly in time. This process of energy accumulation proceeds until the collisional damping balances the energy flow into the resonant region. The quantitative value of the energy flow into the region does not depend on the presence of the collisions at all. Without collisions one could name the (linear) phenomenon "resonant accumulation" of energy instead of resonant absorption.

To complete this introductory chapter on absorption and conversion let us consider the effect of finite temperature following footnote 5. The primary effect of finite temperature is to introduce spatial dispersion into the dielectric function,

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} (1 + 3k^2 \lambda_d^2). \quad (6.60)$$

This result is obtained for a plane wave $\sim \exp(ikx)$ in a homogeneous medium. In the general case of an inhomogeneous medium k has to be replaced by d/dx with the result that the first equation of (6.30) is now a differential equation and

not simply an algebraic one like (6.54). Using (6.29) and the fact that $x/L_n \ll 1$ and $k^2 \lambda_d^2 \ll 1$ we obtain approximately

$$3\lambda_d^2 \frac{d^2 E_x}{dx^2} - \frac{x}{L_n} E_x = -cB_y(0) \sin \theta. \quad (6.61)$$

For vanishing temperature, i.e. $\lambda_d \rightarrow 0$, eq.(6.61) reduces to (6.54) as expected. Eq.(6.61) has the form of an inhomogeneous Airy equation. This time it describes Langmuir waves generated in the resonant region and propagating to the left towards the plasma boundary. Near the resonance their characteristic length Δx for the change of the amplitude is $(L_n \lambda_d^2)^{1/3}$. The field reaches a maximum height of approximately $\lambda_d^2 E_{\max}/\Delta x^2 \approx cB_y(0) \sin \theta$ or

$$E_{\max} \approx cB_y(0) \sin \theta \left(\frac{L_n}{\lambda_d} \right)^{2/3}, \quad (6.62)$$

respectively. The energy flux, S , away from the resonant layer can be estimated from $S = v_g(\epsilon_0/4)|E_x|^2$, where the group velocity $v_g = 3k\lambda_d^2\omega_{pe}$ and $k \sim 1/\Delta x$. Ignoring a numerical factor of the order of 1.5 we obtain

$$S = \frac{3}{2} L_n \omega_{pe0} \sin^2 \theta \frac{|B_y(0)|^2}{2\mu_0}, \quad (6.63)$$

a quantity which has the same order of magnitude as the power dissipated by collisions, eq.(6.59). In a real plasma it will be a question of parameters which phenomenon, dissipation and subsequent heat transport or dispersion, takes care of the evacuation of the energy flowing into the resonant layer.

6. Remarks on mathematics, numerics and Alfvén wave heating

The theory presented in this section is not only directly relevant to laser fusion and the propagation of electromagnetic waves in the ionosphere but also to Alfvén wave heating, the once-upon-time *cheval de bataille* of the CRPP on its first tokamak TCA (*tokamak à chauffage Alfvén*). As mentioned in the introduction to this section, §6.3, the two players in Alfvén wave heating are the fast magnetosonic wave, which carries the energy into the resonant layer, and the (slow, shear, torsional) Alfvén wave which resonantly absorbs it. The Alfvén wave is localized in direction perpendicular to the static magnetic field if the field strength and/or the plasma density varies in this direction. As in the Langmuir wave case it is a question of the plasma model used whether one finds singular oscillations (singular perpendicular to the static magnetic field) or waves which slowly propagate with short wavelengths perpendicular to the field.

The well-known Alfvén wave dispersion relation $\omega = k_{\parallel} v_A(r)$ is obtained in the ideal MHD plasma model in simple configurations. Any other plasma model introduces perpendicular dispersion, in particular resistivity, electron dynamics

(inertia, thermal velocity), "finite frequency" (meaning finite ω/Ω_i), finite ion Larmor radii. In ideal MHD some perpendicular dispersion can appear due to magnetic field curvature (global Alfvén eigenmodes in a current-carrying cylinder, various types of global eigenmodes in toroidal configurations like TAE's etc).

In order to see just how close the resemblance is between the Alfvén and Langmuir wave cases, imagine again a plasma slab uniformly extending in the y - and z -directions and with parameters depending on x . Let the plasma be immersed in a static magnetic field, $\mathbf{B}_0 = B_0(x)\mathbf{e}_z$ along z . As in section 6.3 any wave motion in this new problem can be described by the Ansatz $\sim f(x) \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)]$. Using ideal MHD A. Hasegawa and L. Chen⁹ have derived the pertinent wave equation which, in the low- β limit, reads

$$\frac{d}{dx} \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A} - k_y^2} \frac{dE_y}{dx} + \mathcal{A}E_y = 0, \quad (6.64)$$

where $\mathcal{A}(x) = \omega^2/v_A^2(x) - k_z^2$. Within this course, we will be able to obtain this same equation in the low frequency limit of the cold plasma wave equation relevant to the heating in the ion cyclotron range of frequency (ICRF).

Equation (6.64) has exactly the same mathematical form as the p-polarization equation, which is obtained from (6.33) for E_z instead of (6.48) for H_y :

$$\frac{d}{dx} \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A} - k_z^2} \frac{dE_z}{dx} + \mathcal{A}E_z = 0, \quad (6.65)$$

where, this time, $\mathcal{A}(x) = (\omega^2 - \omega_{pe}^2(x))/c^2$.

It is interesting to note that the most important sources of the original works on Alfvén wave heating by Grossmann and Tataronis¹⁰ were papers by Barston¹¹ and Sedláček¹². Barston had discussed with a considerable amount of mathematical rigor the eq.(6.65). He neglected the contribution due to the incoming electromagnetic wave by approximating the denominator by $-k_z^2$ and solved the problem as a normal mode or eigenvalue problem which yields a continuous spectrum and singular eigenfunctions. Sedlacek then tackled it as an initial value problem and showed the equivalence of the two approaches. The complexity of the mathematics especially in Sedlacek's paper demonstrates the need for numerical solutions in the case where WKB is not applicable. Numerical solutions can easily be obtained and provide, after all, at least as much physical insight as laborious analytical treatments.

⁹ A. Hasegawa and L. Chen, Phys.Rev Lett. **23** (1974) 454 ; Phys. Fluids **17** (1974) 1399.

¹⁰ J. Tataronis and W. Grossmann, Z. Physik **261** (1973) 203 and 217.

¹¹ E. M. Barston, Annals Phys. **29** (1964) 282.

¹² Z. Sedláček, J. Plasma Phys. **5** (1971) 239, *ibid.* **6** (1971) 187 and Czech. J. Phys. **B23** (1973) 892.

By the way, Hasegawa and Chen⁹ were able to cope analytically with both the energy carrier wave and the absorbing wave in the case of a linear profile of $\mathcal{A}(x)$. The absorbing wave in this case is the so-called kinetic Alfvén wave, eq.(3.129)

6.4 Waves in the ion cyclotron range of frequency (ICRF)

1. ICRF versus ICRH

By ion-cyclotron range of frequency (ICRF) heating one denotes all the heating methods using frequencies in the range from the ion cyclotron frequency to a multiple of it. Typical frequencies in use for ICRF are tens of MHz (20 - 60). The old designation ICRH (ion-cyclotron resonance heating) should be avoided because it gives the impression of the ion-cyclotron resonance playing a major role in the method. This is true for some scenarios but not for others as we shall see. It is, in fact, not that easy to exploit the cyclotron resonances for heating the plasma in a toroidal device as one might naively assume.

This naive assumption has its origin in the very **special case** of wave propagation **along** a confining magnetic field described by (6.17) or (3.89). The two electromagnetic modes described by $N^2 = R$ and $N^2 = L$ are circularly polarized in the right and left handed sense, respectively. This means that they turn in the sense of the electrons (R) and the ions (L), respectively. If the waves propagate with frequencies $\omega = \omega_R < |\Omega_e|$ and $\omega = \omega_L < \Omega_i$ along a weakening magnetic field, $\mathbf{B}_0 = B_0(z)\mathbf{e}_z$, they run into a resonance where $|\Omega_e(z)| \rightarrow \omega_R$ for the R -wave and $\Omega_i(z) \rightarrow \omega_L$ for the L -wave, respectively.

Explicitly, for the left-turning wave and $\omega = O(\Omega_i)$, one obtains from (6.17) and (6.6) :

$$N^2 = N_{\parallel}^2 \approx \frac{\omega_{pe}^2}{|\Omega_e(z)|(\Omega_i(z) - \omega)}. \quad (6.66)$$

Here $|\Omega_e| \sim \omega_{pe}$ has been assumed and terms of order $O(m_e/m_i)$ have been neglected. The wave is propagatory where $N^2 > 0$, or $\Omega_i(z) > \omega$, respectively. If $dB_0/dz < 0$ and $\Omega_i(z_R) = \omega$ it can propagate from $z < z_R$ towards the resonance at $z = z_R$ where it is absorbed by ion-cyclotron damping, which can be obtained from (3.88). Tom Stix calls this a *magnetic beach*.

While this special case can describe cyclotron resonance heating of a mirror machine, it has nothing to do with cyclotron range of frequency heating of a toroidal device where the energy carrying wave has to enter the plasma **across** the magnetic field. For this situation it can be shown that a) there is no cold-plasma resonance at the cyclotron frequencies and b) moreover, at the points where $\omega = \Omega_i$ the wave's polarization turns in the electron sense and vice-versa! From a cold plasma model, one should therefore conclude that cyclotron resonance heating does not work. This, of course, is not true but the physics is more subtle than that of the magnetic beach.

Many aspects of ICRF heating of a tokamak can be studied reasonably well in slab geometry, where the two ignorable directions are vertical and toroidal.

First of all, most of the experimental arrangements are such that energy carrying waves are propagating more or less in the equatorial plane of the torus. Moreover, many dispersive and dissipative effects are critically determined by the size of the magnetic field, e.g. the lines where the wave frequency matches a particular cyclotron or cyclotron harmonic frequency are essentially vertical in the poloidal plane. This is due to the fact that the magnetic field is dominated by the toroidal vacuum magnetic field behaving like $B_\phi \sim 1/r$ where r is the distance from the major axis.

Throughout this section we assume therefore a slab geometry with the x -axis pointing in the direction of decreasing magnetic field (same direction as r). In this geometry the background quantities depend on x only, namely the magnetic field, $B_0(x)$, the density, $n_0(x)$ and the temperatures, $T_s(x)$. The direction y is synonymous with vertical, and z is the direction of the magnetic field (sometimes designated by the index $\parallel$). Vectors perpendicular to the magnetic field take the index $\perp$; this will sometimes be synonymous with x .

2. The cold dispersion relation and its consequences

The plasma is inhomogeneous but we assume (at least partial) applicability of the WKB method. This is equivalent to assuming large equilibrium scale lengths, L , defined e.g. by the density gradients

$$\left| L \frac{dn_0}{dx} \right| \sim n_0. \quad (6.67)$$

The scale length is large compared to the wavelengths in question,

$$Lk_x \gg 1. \quad (6.68)$$

To derive the dispersion relation we assume wave fields of the form

$$\mathbf{E}_1 \sim \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)] \quad (6.69)$$

and imagine that k_z and ω are imposed outside the plasma by an antenna. For simplicity we first assume $k_y = 0$. This is not essential and can be changed at any time if appropriate.

The question now is whether an antenna imposing k_z and ω is able to excite a wave propagating into the plasma. This question can be answered from the dispersion relation for $k_x(x)$ which has a form similar to that for N^2 presented in section 6.2, eq.(6.10),

$$\boxed{SN_x^4 - bN_x^2 + c = 0} \quad (6.70)$$

where this time

$$b = (S + P)(S - N_\parallel^2) - D^2, \quad (6.71)$$

$$c = P \left[(S - N_{\parallel}^2)^2 - D^2 \right], \quad (6.72)$$

$$N_x^2 = k_x^2 c^2 / \omega^2 \quad \text{and} \quad N_{\parallel}^2 = k_{\parallel}^2 c^2 / \omega^2. \quad (6.73)$$

The two expressions, eqs. (6.71) and (6.72) can be much simplified specializing them to low frequency, $\omega \sim \Omega_i \ll |\Omega_e|$ and assuming $|\Omega_e| \sim \omega_{pe}$, which is typical of tokamak plasmas. Note that under these conditions R and L , eqs.(6.5) and (6.6) become

$$\left. \begin{matrix} R \\ L \end{matrix} \right\} = 1 \mp \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \Omega_e} - \sum_i \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega \pm \Omega_i)} \approx \sum_i \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i(\Omega_i \pm \omega)}. \quad (6.74)$$

The trick here was to note that the sum $\sum_i$ over all the ion species i ,

$$\sum_i \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i} = \frac{1}{\epsilon_0 B_0} \sum_i e z_i n_i = -\frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e}, \quad (6.75)$$

and that

$$\frac{\omega_{pe}^2}{|\Omega_e| \omega} \sim \frac{\omega_{pe}}{\Omega_i} \sim \frac{\omega_{pe}}{\Omega_e} \frac{\Omega_e}{\Omega_i} \gg 1.$$

With the help of eqs. (6.4) and (6.74) we find

$$S = \sum_i \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2 - \omega^2} \quad (6.76)$$

and

$$D = - \sum_i \frac{\omega}{\Omega_i} \frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2 - \omega^2}. \quad (6.77)$$

As the general dispersion relation (for N^2), eq.(6.10), the new *perpendicular* dispersion relation (for N_x^2), eq.(6.70), can have zero, one or two propagatory solutions, $N_x^2 > 0$.

3. Discussion of the perpendicular dispersion relation for ICRF

First of all, one remarks that near a cyclotron resonance, $\omega \rightarrow \Omega_i$, all coefficients of the relation, eq.(6.70), behave in the same way : S , b and $c \propto 1/(\omega^2 - \Omega_i^2)$. This has the consequence that N_x is finite there ; there is no wave resonance at the cyclotron frequency. Only in purely parallel propagation (e.g. Alfvén waves) or in a hot plasma can the cyclotron frequency play an important role. The physical reason for the non-existence of this resonance can be found from the original equation for the unknown electric field eq.(6.8). Indeed, noting that $-D$ behaves like S when $\omega \rightarrow \Omega_i$, we find from the second line of eq.(6.8) that the polarization of the field tends towards the circularly right-handed one ($E_x = -iE_y$). This means that the

field turns in the electron direction at this place and therefore does not resonate with the ions.

This apparently bad situation (for heating) is saved by the perpendicular resonance which we have already encountered when we were talking about Alfvén wave heating in § 6 of section 6.3. The only difference between here and there is that here frequencies up to the order of Ω_i are considered and not only $\omega \ll \Omega_i$.

As for Alfvén waves, for $\omega \sim \Omega_i$, the component P dominates largely the dielectric tensor, eq.(6.3). In the center of a tokamak where $\omega_{pe} \sim \Omega_e$ we have

$$P \sim \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \sim \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_i^2} \sim \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^2,$$

whereas

$$S \sim D \sim \frac{m_i}{m_e}.$$

An approximate dispersion relation can therefore be obtained from eq.(6.70) by equating the term multiplying P to zero, giving

$$N_x^2 \approx \frac{c}{b} \approx \frac{(S - N_z^2)^2 - D^2}{S - N_z^2}. \quad (6.78)$$

The terms in the nominator proportional to $(m_i/m_e)^2$ (contained in S^2 and D^2) cancel so that N_x is not proportional to the mass ratio and in this sense small.

Eq.(6.78) is the ICRF dispersion relation for the fast magnetosonic wave. It clearly has a resonance in this approximation which, by the way, is equivalent to assuming zero electron mass. The resonance,

$$S - N_z^2 = 0, \quad (6.79)$$

is the Alfvén wave resonance mentioned. Expliciting eq.(6.79) for a single-ion species plasma one finds that the Alfvén resonant frequencies are always smaller than the cyclotron frequency. In the ICRF, therefore, this resonance appears, if at all, near the inner (HFS) plasma edge.

In a multi-ion species plasma, on the other hand, eq.(6.79) determines additional resonances which, however, are practically identical with the so-called ion-ion-hybrid resonances ($S=0$, see eq.(6.18)) because the influence of N_z^2 is negligible for those frequencies. This case will be discussed in §6. The ion-ion hybrid resonances are an analogon of the lower-hybrid resonance with two different ion species creating a resonance instead of electrons and ions.

A short cut to the second solution of the dispersion relation, eq.(6.70), is to search a "large" value for N_x (before we had a value of order unity). This solution is strongly evanescent,

$$N_x^2 \approx \frac{b}{S} \approx \frac{P(S - N_z^2)}{S} \approx P \approx -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2},$$

and we conclude that in the ICRF the fast magnetosonic wave is the only cold-plasma wave that propagates. It is this wave which is used to couple energy from the antenna into the plasma. Typical wavelengths of this wave are of the order of several centimeters at IC frequencies in tokamaks.

4. Resonant absorption differential equations for ICRF

As we have just shown, it is quite legitimate in this frequency range to assume that P dominates the dispersion relation. Under this condition it is straightforward to include k_y in the considerations. We therefore start again from eqs.(6.2) and (6.3) retaining $k_y \neq 0$ and obtain

$$\Delta \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} S - N_y^2 - N_z^2 & -iD + N_x N_y & N_x N_z \\ iD + N_x N_y & S - N_x^2 - N_y^2 & N_y N_z \\ N_x N_z & N_y N_z & P - N_x^2 - N_y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (6.80)$$

Arguing as in the former paragraph ($\omega \sim \Omega_i$ entails $P \rightarrow \infty$ and $E_z \rightarrow 0$), we find that eq.(6.80) can be reduced to

$$\begin{pmatrix} S - N_y^2 - N_z^2 & -iD + N_x N_y \\ iD + N_x N_y & S - N_x^2 - N_y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0. \quad (6.81)$$

If we now specify D and S as weak functions of x , eq.(6.81) leads to the local dispersion relation for $k_x(x)$. If, however, $D(x)$ and $S(x)$ are general function of x , we have to go back to the original system of differential equations, eqs.(6.2) and (6.3), and retain the spatial derivatives in the x -direction; those in the y and z direction we still replace by ik_y and ik_z . Using again the argument that $E_z \rightarrow 0$ we obtain

$$\begin{pmatrix} S - N_y^2 - N_z^2 & -iD + \hat{N}_x N_y \\ iD + \hat{N}_x N_y & S - \hat{N}_x^2 - N_y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0, \quad (6.82)$$

where N_x has becomes the differential operator $\hat{N}_x = -i\frac{c}{\omega}\frac{d}{dx}$. With the definitions

$$\partial_x \equiv \frac{c}{\omega}\frac{d}{dx}, \quad \tilde{E}_x \equiv -iE_x, \quad \mathcal{A} \equiv S - N_z^2 \quad (6.83)$$

a more transparent notation for $\hat{N}_x = -i\partial_x$ is introduced and the system (6.82) takes the form

$$(\mathcal{A} - N_y^2)\tilde{E}_x - (D + N_y\partial_x)E_y = 0, \quad (6.84)$$

$$-(D - N_y\partial_x)\tilde{E}_x + (\mathcal{A} + \partial_x^2)E_y = 0. \quad (6.85)$$

Eq.(6.84) offers the possibility to eliminate

$$\tilde{E}_x = (\mathcal{A} - N_y^2)^{-1}(D + N_y\partial_x)E_y \quad (6.86)$$

from eq.(6.85) with the intermediate result,

$$\left(\mathcal{A} - \frac{D^2}{\mathcal{A} - N_y^2}\right) E_y - \frac{DN_y}{\mathcal{A} - N_y^2} \partial_x E_y + \partial_x \frac{DN_y}{\mathcal{A} - N_y^2} E_y + \partial_x \frac{N_y^2}{\mathcal{A} - N_y^2} \partial_x E_y + \partial_x^2 E_y = 0.$$

Noting that the last but one term can be rewritten as

$$\partial_x \frac{N_y^2 - \mathcal{A} + \mathcal{A}}{\mathcal{A} - N_y^2} \partial_x E_y = -\partial_x^2 E_y + \partial_x \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A} - N_y^2} \partial_x E_y$$

we obtain the following second order differential equation :

$$\left(\mathcal{A} - \frac{D^2}{\mathcal{A} - N_y^2}\right) E_y - \frac{DN_y}{\mathcal{A} - N_y^2} \partial_x E_y + \partial_x \underbrace{\left(\frac{DN_y + \mathcal{A} \partial_x}{\mathcal{A} - N_y^2} E_y\right)}_{\equiv \psi} = 0. \quad (6.87)$$

From just looking at eq.(6.87) the role of the denominator $\mathcal{A} - N_y^2$ is not easy to guess. Will it give rise to a singularity of the solution or not ? Looking at the WKB result, eq.(6.78), we expect that $\mathcal{A} - N_y^2$ does not give rise to a singularity. The introduction of the quantity ψ can be used to write this equation in yet another form of a system of two equations of first order which provides the definite answer to this question.

The definition of ψ is in fact the first equation of this new system,

$$\partial_x E_y + \frac{DN_y}{\mathcal{A}} E_y = \frac{\mathcal{A} - N_y^2}{\mathcal{A}} \psi, \quad (6.88)$$

and the second equation can be produced from eq.(6.87) by eliminating $\partial_x E_y$ from the term in the middle with the help of eq.(6.88). The result is

$$\partial_x \psi - \frac{DN_y}{\mathcal{A}} \psi = \frac{D^2 - \mathcal{A}^2}{\mathcal{A}} E_y. \quad (6.89)$$

From these two equations it is clear that $\mathcal{A} = 0$ determines the only singularities in the low frequency approximation ($\omega \sim \Omega_i$), exactly as in the WKB case, eq.(6.78). We also remark that in the Alfvén wave range of frequency where $\omega/\Omega_i \rightarrow 0$ and hence the quantity $D \rightarrow 0$, eq.(6.77), it is straightforward to derive eq.(6.65) as promised :

$$\partial_x \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A} - N_y^2} \partial_x E_y + \mathcal{A} E_y = 0.$$

The only difference between this equation and eq.(6.65) are factors of c/ω in front of the various dimensionless quantities here. In the present notation eq.(6.65) reads

$$\frac{\omega}{c} \partial_x \frac{\frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{A}}{\frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{A} - \frac{\omega^2}{c^2} N_y^2} \frac{\omega}{c} \partial_x E_y + \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{A} E_y = 0,$$

with the correspondence

$$\frac{\omega}{c} \partial_x \rightarrow \frac{d}{dx}, \quad \frac{\omega^2}{c^2} N_y^2 \rightarrow k_y^2, \quad \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}.$$

It is interesting to note that the (finite β) ideal MHD equations in a slab or a cylinder can also be written as a system of two first order differential equations with the Alfvén dispersion relation as the singularity¹³, exactly like eqs.(6.88) and (6.89).

To look for solutions of the equations (6.88) and (6.89) we now could turn to the computer and try to solve them. When treating the p-polarization of the unmagnetized problem, section 6.3, § 5, we have learned how to treat a resonance : we can just introduce some small ad-hoc collisional damping by replacing ω by $\omega + i\nu$, see eq.(6.56). This is equivalent to imposing causality. On the computer we then have just to solve two first order differential equations for the two **complex** unknowns, E_y and ψ . A Runge-Kutta shooting code is enough for a **resonance absorption** problem as we have it here. This is **not** true when wave conversion is considered.

The wave-heating community has, however, been able to gain understanding with some further analytical treatment of the problem. In particular, the equations are scaled and analytically studied in the neighbourhood of cut-offs and resonances as we have done for the p-polarization. The treatment presented here has been published by Karney and co-workers¹⁴

Defining a scale length L and a new coordinate ξ ,

$$L = \left(\frac{\omega^2}{c^2} \frac{d\mathcal{A}}{dx} \right)^{-\frac{1}{3}}, \quad \xi = \frac{x - x_0}{L} \text{ with } \mathcal{A}(x_0) = 0,$$

they retain, for small ξ , only the leading-order terms in the expansions of $\mathcal{A}$ and D in the eqs.(6.88) and (6.89). Thus,

$$\frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{A} \approx \frac{\omega^2}{c^2} \frac{d\mathcal{A}}{dx} (x - x_0) = \frac{\xi}{L^2}.$$

With the additional abbreviations,

$$\sigma = -L^2 \frac{\omega^2}{c^2} D, \quad \Psi = \frac{\omega}{c} L \psi, \quad E = E_y \quad \text{and} \quad M = L k_y,$$

the eqs.(6.88) and (6.89) become,

$$\frac{dE}{d\xi} - \frac{\sigma M}{\xi} E = \frac{\xi - M^2}{\xi} \Psi, \tag{6.90}$$

¹³ K Appert, R Gruber and J Václavík, Phys. Fluids **17**(1974)1471.

¹⁴ C F F Karney, F W Perkins and Y C Sun, Phys Rev Lett **42** (1979)1621.

$$\frac{d\Psi}{d\xi} + \frac{\sigma M}{\xi} \Psi = \frac{\sigma^2 - \xi^2}{\xi} E. \quad (6.91)$$

Note that in single ion species plasmas $\sigma \approx k_z^2 L^2 (\omega/\Omega_i)$ in the vicinity of the resonance.

Eliminating Ψ from eq.(6.91) by using eq.(6.90) we obtain after a little algebra

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{\xi}{\xi - M^2} \frac{dE}{d\xi} \right] + \left[\frac{\sigma M}{(\xi - M^2)^2} + \xi - \frac{\sigma^2}{\xi - M^2} \right] E = 0. \quad (6.92)$$

We could now solve this equation by expansion or numerically. Let us be modest and look just at the special case $M = 0$, i.e. $k_y=0$, which for ICRF is quite acceptable. The resulting equation is

$$\frac{d^2 E}{d\xi^2} + \left[\xi - \frac{\sigma^2}{\xi} \right] E = 0. \quad (6.93)$$

For a propagatory solution, the bracket needs to be positive. Thus, the wave propagates if $-|\sigma| < \xi < 0$ or $|\sigma| < \xi$. Note that $\xi = 0$ is the resonance and $\xi = \pm|\sigma|$ are cut-offs. Thus, a right-running wave can reach the resonance directly and be absorbed there (like in the magnetic beach case). In contrast, a left running wave reaches first a cut-off and has to tunnel through the evanescent region before it can get to the resonance like the electromagnetic wave in the laser case.

Even simpler to discuss than eq.(6.93) is the Budden equation,

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + k_0^2 \left(1 - \frac{L}{x} \right) E = 0, \quad (6.94)$$

ubiquitous in ICRF literature. This equation has only one cut-off. The quantities L and k_0 denote the inhomogeneity scale length and the wavevector of the incident wave at $x = \pm\infty$, respectively. Far from the resonance ($x = 0$) and the cutoff ($x = L$) a WKB-ansatz can be justified and one finds the local wavevector to be

$$k_x^2(x) = (1 - L/x)k_0^2. \quad (6.95)$$

The wave is therefore propagatory for $x < 0$ and for $x > L$ and evanescent in between. A wave which is propagating from $-\infty$ towards the center ($x = 0$) will first encounter the resonance. In the ICRF this happens when the wave is incident from the "high field side" (HFS), meaning that, in a tokamak, it propagates in the outward direction of the major radius. An exact solution of Budden's equation (solution of the singular differential equation) shows that the wave incident from the HFS is completely absorbed at the resonance if the cutoff is sufficiently far from it. The relevant parameter is $k_0 L$. If this parameter is not large a part of the wave can tunnel through the region where the wave is evanescent. Likewise, a wave incident from the "low field side" (LFS, here $x > L$) first encounters

the cutoff where it is partly reflected, partly transmitted and partly absorbed at the resonance. Formally, one obtains for the coefficients for reflection (R^2) and transmission (T^2) :

	reflection	transmission	absorption
HFS :	$R^2 = 0$	$T^2 = \exp(-\pi L k_0)$	$1 - R^2 - T^2$
LFS :	$R^2 = (1 - \exp(-\pi L k_0))^2$	$T^2 = \exp(-\pi L k_0)$	$1 - R^2 - T^2$

(6.96)

The absorption coefficient follows from reflection and transmission, the maximum for HFS incidence being 1 and for LFS 0.25, respectively.

5. Heating with the fast wave

What are the possibilities for heating offered by the fast wave? The most naive idea of ion-cyclotron resonance heating is unrealizable because the polarization of the wave prevents the ions from interacting at their gyration frequency. From a kinetic calculation one, moreover, learns that the temperature corrections are very small, namely $\sim (k_{\perp} \rho_{Li})^4$, and cannot improve this bad situation.

The situation is much better at the second harmonic (ICRF parlance : $\omega = 2\Omega_i$!) where no polarization problem exists and the temperature corrections to the cold plasma theory are of order $(k_{\perp} \rho_{Li})^2$. Using a wave at the second harmonic frequency of an ion species increases its perpendicular energy (gyration velocity). For the relaxation towards the parallel energy or to other species slow collisional processes have to be invoked.

An alternative to the second harmonic heating is offered by the resonance, eq.(6.79), when a multispecies plasma is considered. Here, very different scenarios of ion and/or electron heating are possible depending on the concentrations of the different species.

The energy carrying wave being a fast magnetosonic wave it can be excited by an antenna exerting magnetic forces on the plasma surface. The best coupling is obtained with poloidal antenna currents because their (poloidal) image on the plasma surface is approximately perpendicular to the background magnetic field, giving the largest $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ -forces. A typical antenna for ICRF consists of a metal conductor situated parallel to and close to the wall of the tokamak (see Cairns, p.62).

6. ICRF heating scenarios

This is a very short account of the subject. A more complete but still quite short overview is given in John Wesson's book¹⁵.

¹⁵ John Wesson, *Tokamaks*, Clarendon Press - Oxford, 3rd edition, 2004, section 5.8.

Mode conversion heating

The resonance condition, eq.(6.79), for a two species plasma reads

$$S = \frac{\omega_{p1}^2}{\Omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\omega_{p2}^2}{\Omega_2^2 - \omega^2} = N_z^2 = \frac{k_z^2 c^2}{\omega^2}, \quad (6.97)$$

where the indices 1 and 2 denote the two ion species. This equation has two solutions for positive ω , as can easily be seen from a graphical representation of S and N_z^2 . Assuming $\Omega_1 < \Omega_2$ the first solution is situated between 0 and Ω_1 and corresponds to the Alfvén wave resonance whereas the second one lies between the cyclotron frequencies and is practically identical with the ion-ion-hybrid resonance defined by $S = 0$.

In the mode conversion scenario, the ion-ion-hybrid frequency lies well in between the cyclotron frequencies (not near either one of them!); for this to be true the concentrations should not be too different but rather be of the same order, i.e. $\omega_{p1} \sim \omega_{p2}$. Under these circumstances there is no cyclotron absorption and the heating relies on the resonant absorption process as described by Budden, eq.(6.94). The kinetic picture is mode conversion into an ion Bernstein wave which is absorbed by electron Landau damping. There is no direct ion heating in this scenario.

In a one-dimensional picture, pure mode conversion is problematic in the sense that the resonance is accessible only from the high field side, eq.(6.94). Experimentally, it is, however, difficult to mount antennae on the inner wall. Mounted on the outer wall they excite standing waves between the cutoff and the plasma outer edge. In numerical calculations one indeed finds cavity resonances which make the antenna load strongly depend on plasma parameters. As in experiments the plasma parameters evolve with time, the antenna load goes through a multitude of maxima and minima, a feature not very much appreciated by the experimenters.

Minority heating

This scenario also relies again on the presence of a second ion species in the plasma. As above, the equation (6.97) determines the resonances. The difference between mode conversion heating and minority heating simply is that one of the species, say Ω_2 , is present in a small concentration only, $\omega_{p1} \gg \omega_{p2}$. As a consequence the ion-ion-hybrid resonance is situated close to the cyclotron resonance of the minority species. As the wave field is essentially determined by the majority species, the polarization is such that strong wave particle-interaction is possible resulting in damping of the wave and heating of the minority species.

The ratio between mode conversion at the ion-ion-hybrid resonance and cyclotron absorption by the minority ions is dominantly determined by the minority concentration. With decreasing minority concentration, the conversion rate and the electron heating via the ion Bernstein wave decrease, while the minority tail temperature increases. As high energy tail ions collide preferentially with electrons,

the electron temperature increases too, this time due to collisional drag. Common minority species are H and ^3He . In recent TFTR supershot plasmas ^3He minority heating has in fact been used to increase the core electron temperature ; this effect is expected to increase the alpha-particle slowing-down time and hence enhance the central alpha-particle pressure. Up to 7.4 MW have been injected into NBI heated plasmas having electron temperatures of the order of 8 keV. With ICRF it was possible to increase this temperature by 3-4 KeV. Even higher powers have been used in JET.

Second harmonic heating

Kinetic theory is indispensable for gaining an understanding of the second harmonic heating. Here, we restrict ourselves to note that the hot plasma theory leads again to a mode-conversion situation combined with strong damping which usually largely dominates. The mode conversion process creates again an ion Bernstein wave.

6. Conclusion

Minority and second harmonic heating have been used with excellent success on a considerable number of tokamaks. The method is very flexible because of its dependence on the concentration and the charge-to-mass ratio of the minorities. Depending on the parameter choice, the ions or the electrons can be heated, and the region of maximum absorption can be placed at will. An additional advantage not discussed in this lecture is the ready availability of microwave sources in the required frequency range. On the negative side one should mention the antennae which are not easily accepted in a reactor design ; waveguides would be preferable.

Appendices

A1.

Les transformations intégrales

A1.1 Définition de la transformée de Fourier

Cet appendice ne sert qu'à fixer la notation et non pas à introduire la théorie des transformations intégrale.

On utilisera la définition suivante pour la transformée de Fourier d'une quantité $A(\mathbf{r}, t)$:

$$\hat{A}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt A(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t}. \quad (\text{A1.1})$$

La transformation inverse est alors

$$A(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{A}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \quad (\text{A1.2})$$

comme on peut vérifier en réinjectant (A1.1) dans (A1.2). Pour alléger la notation on le montre ici pour une dimension seulement :

$$\begin{aligned}
A(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \hat{A}(k) \\
&\stackrel{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx' A(x') e^{-ikx'} \\
&\stackrel{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx' A(x') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')}.
\end{aligned}$$

Pour que cette dernière expression soit égale à $A(x)$ il faut que

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \quad (\text{A1.3})$$

ait la propriété de la fonction $\delta(x)$. Voyons :

$$\begin{aligned}
I(x) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{e^{ixM} - e^{-ixM}}{2\pi ix} \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{2i \sin xM}{2\pi ix} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin xM}{x}.
\end{aligned}$$

Voilà, ceci est la fonction $\delta(x)$!

$$\delta(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin xM}{x}. \quad (\text{A1.4})$$

Et pour ceux qui ne croient pas que $\int dx \sin x/x = \pi$ on considère l'intégrale

$$\int \frac{e^{iz}}{z} dz$$

le long du parcours défini dans la Fig.A1.1.

Ce parcours n'inclut pas de singularités et l'intégrale est en conséquence égale à zéro :

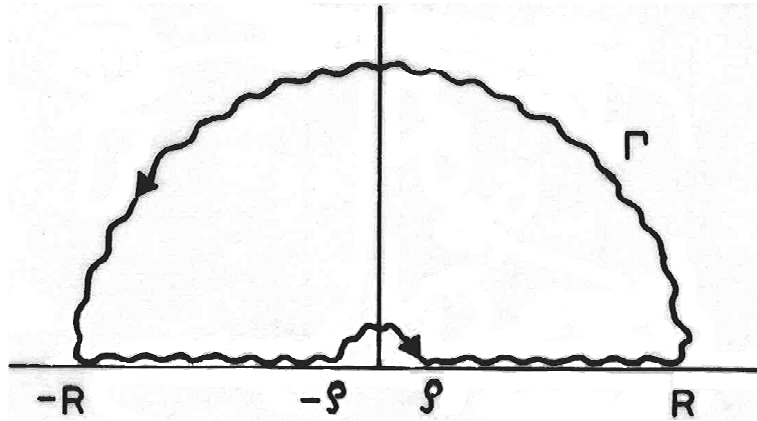


Figure A1.1 Parcours d'intégration pour $\int z^{-1} \exp(iz) dz$.

$$0 = \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\rho}^R \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

On montre que l'intégrale le long de Γ se comporte comme $\sim R^{-1}$ et est donc nulle. Celle le long de γ est la moitié d'un résidu et vaut $-i\pi$; alors

$$\int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\rho}^R \frac{e^{iz}}{z} dz = i\pi.$$

En prenant la partie imaginaire de ceci et en laissant tendre ρ vers zéro, on trouve le résultat recherché.

Les détails du calcul peuvent être trouvés dans *D. S. Mitrinović, "Calculus of Residues", TUTORIAL TEXT No.4, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1966.*

Remarques :

- (i) La plupart du temps on omet les chapeaux désignant les transformées. Les arguments $\mathbf{r}$ et t , ou $\mathbf{k}$ et ω respectivement, indiquent assez clairement de quoi on parle.
- (ii) Les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt$$

peuvent être interprétées comme

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} dx \quad \text{et} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt.$$

Dans ce cas les intégrales

$$\int dk \hat{f}(k) \quad \text{et} \quad \int d\omega \hat{f}(\omega)$$

sont en fait les expressions limites des sommes discrètes

$$\frac{2\pi}{L} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(k_j) \quad \text{et} \quad \frac{2\pi}{T} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(\omega_j)$$

où $k_j = j(2\pi/L)$ et $\omega_j = j(2\pi/T)$.

A1.2 La transformée des dérivées

Pour la transformée de $\frac{\partial A}{\partial x}$ on trouve

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial A}{\partial x}}(k) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} dx \frac{\partial A}{\partial x} e^{-ikx} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[\frac{\partial}{\partial x} A e^{-ikx} - A \frac{\partial}{\partial x} e^{-ikx} \right] \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} A e^{-ikx} \Big|_{-L/2}^{L/2} + ik \hat{A}(k) \end{aligned}$$

et le terme de bord tombe avec l'adoption de conditions aux limites périodiques :

$$\widehat{\frac{\partial A}{\partial x}}(k) = ik \hat{A}(k). \quad (\text{A1.5})$$

Ceci ne pose pas de problèmes non plus pour la dérivée temporelle

$$\widehat{\frac{\partial A}{\partial t}}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} A e^{i\omega t} \Big|_{-T/2}^{T/2} - i\omega \hat{A}(\omega),$$

si $A(t)$ peut être représentée par une fonction périodique sur $T \rightarrow \infty$:

$$\widehat{\frac{\partial A}{\partial t}}(\omega) = -i\omega \hat{A}(\omega). \quad (\text{A1.6})$$

Cela n'est pas évident pour des instabilités, où $A(t)$ peut croître exponentiellement (au moins au régime linéaire). Dans ce cas on préfère utiliser la transformée de Laplace.

A1.3 La transformée de Laplace

Laplace est la méthode qui permet la résolution de problèmes à valeurs initiales. D'habitude on prend les fonctions à transformer nulles pour des temps antérieurs à zéro. Il est commode d'utiliser le même formalisme que celui utilisé pour Fourier :

$$\hat{A}(\omega) = \int_0^{\infty} A(t) e^{i\omega t} dt.$$

Quand on fait Laplace on s'assure que $\hat{A}(\omega)$ existe en donnant à ω une partie imaginaire assez grande. Si $A(t) \sim \exp(\gamma t)$ on doit demander que $\Im(\omega) > \gamma$. On définit donc toujours

$$\hat{A}(\omega) = \int_0^{\infty} A(t) e^{i\omega t} dt, \quad \Im(\omega) > c. \quad (\text{A1.7})$$

Il est **très important** de ne pas oublier ce point-ci : Si la partie imaginaire de ω est assez grande, la transformation de Laplace ne pose de problèmes que pour des fonctions spécialement méchantes comme p.ex. $\exp(t^2)$ que l'on ne va rencontrer nulle part. Voilà la raison de l'analyticité (c'est-à-dire de la "gentillesse") des transformées dans le plan supérieur de ω .

L'inverse de (A1.7) s'obtient par

$$A(t) = \int_{-\infty+iC}^{\infty+iC} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{A}(\omega) e^{-i\omega t} = \int_{\Gamma} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{A}(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (\text{A1.8})$$

où le parcours Γ est tel que $\Im(\omega) = C > c$. On vérifie de nouveau que tout est en ordre en réinjectant (A1.7) dans (A1.8) :

$$\begin{aligned}
A(t) &= \int_{\Gamma} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} A(t') e^{i\omega t'} dt' \\
&= \int_0^{\infty} A(t') dt' \int_{\Gamma} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(t'-t)} = A(t)
\end{aligned}$$

Pour le dernier pas on a eu de nouveau besoin de (A1.4) ou plutôt de la variante

$$\delta(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin tM}{t} e^{-\Im(\omega)t},$$

ce qui montre, pour ce cas-ci, l'indépendance du résultat de la partie imaginaire de ω .

Lors du calcul de la transformation de Laplace de $\partial A / \partial t$ le terme de bord inférieur ne tombe pas ; c'est justement lui qui permet l'introduction des valeurs initiales :

$$\widehat{\frac{\partial A}{\partial t}}(\omega) = -A(t=0) - i\omega \hat{A}(\omega). \quad (\text{A1.9})$$

Très souvent on ne se préoccupe pas d'écrire ces termes initiales. Dans ce cas les transformées de Fourier et de Laplace sont formellement identiques.

A2.

Ecrantage d'une charge immobile

A2.1 Formulation du problème

Soit un plasma d'électrons avec un fond ionique. On s'intéresse à sa réaction à l'immersion d'une charge Q .

Le modèle le plus simple que l'on peut utiliser pour obtenir une réponse est le modèle fluide. On doit exiger que dans l'état stationnaire les forces sur le fluide s'annule :

$$0 = -en\mathbf{E} - \nabla p. \quad (\text{A2.1})$$

Ici n est la densité et p la pression du gaz électronique. Sans la perturbation due à la charge Q on a $\mathbf{E} = 0$, $n = n_0 = \text{const}$ et $p = p_0 = \text{const}$. Avec la perturbation on a par contre $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $n = n_0 + n_1(\mathbf{r})$ et $p = p_0 + p_1(\mathbf{r})$.

Du point de vue thermodynamique le plasma se comporte comme un gaz idéal, $p = nT$. Comme on cherche un état stationnaire, $T = T_0 = \text{const}$, il suit que

$$\nabla p_1 = T_0 \nabla n_1. \quad (\text{A2.2})$$

Si Q est suffisamment petite, la perturbation qui en résulte est aussi petite :

$$Q \sim E \sim n_1 : \quad \text{petits.}$$

On linéarise (A2.1) moyennant (A2.2) :

$$0 = -en_0\mathbf{E} - T_0\nabla n_1. \quad (\text{A2.3})$$

La charge Q est située à l'origine $\mathbf{r} = 0$. Elle donne lieu à une densité de charge, $\rho_Q(\mathbf{r})$, définie par

$$\rho_Q(\mathbf{r}) = Q\delta(x)\delta(y)\delta(z) = Q\delta^{(3)}(\mathbf{r}). \quad (\text{A2.4})$$

Pour déterminer $\mathbf{E}$ et n_1 il nous faut encore les équations de Maxwell. Pour ce cas électrostatique elles se résument à l'équation de Poisson

$$\Delta\phi = -\rho/\epsilon_0 \quad (\text{A2.5})$$

que l'on obtient moyennant l'ansatz

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (\text{A2.6})$$

La densité de charge totale est donnée par

$$\rho = -e(n_0 + n_1) + en_0 + \rho_Q. \quad (\text{A2.7})$$

Le premier terme est dû aux électrons, le deuxième aux ions immobiles et le troisième aux perturbations externes (A2.4). Le problème différentiel à résoudre s'obtient de (A2.3), (A2.6) et (A2.7),

$$\begin{aligned} en_0\nabla\phi &= T_0\nabla n_1, \\ \epsilon_0\Delta\phi &= en_1 - \rho_Q, \end{aligned} \quad (\text{A2.8})$$

ou avec (1.10)

$$\Delta\phi = \frac{1}{\lambda_d^2}\phi - \frac{1}{\epsilon_0}\rho_Q. \quad (\text{A2.9})$$

La solution de (A2.9) satisfaisant la condition aux limites $\phi(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = 0$ est

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_d}. \quad (\text{A2.10})$$

Il est instructif (bon entraînement) de dériver cette solution par la méthode des transformations de Fourier.

A2.2 Solution du problème par la méthode Fourier

La transformée de (A2.9) est

$$-k^2 \hat{\phi} = \frac{1}{\lambda_d^2} \hat{\phi} - \frac{Q}{\epsilon_0}$$

ou

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{\lambda_d^2}{1 + \lambda_d^2 k^2} \quad (\text{A2.11})$$

Maintenant, il n'y a qu'à "inverser" (A2.11) pour obtenir $\phi(\mathbf{r})$:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{\lambda_d^2}{1 + \lambda_d^2 k^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{A2.12})$$

Pour l'intégration de (A2.12) on a avantage à choisir des coordonnées sphériques avec l'axe le long de $\mathbf{r}$, Fig. A2.1.

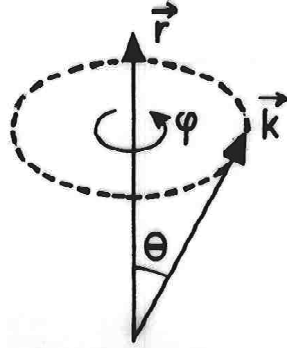


Figure A2.1 Système de coordonnées pour l'intégration dans l'éq. (A2.12)

On a $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta$, $d^3 k = (k d\theta)(k \sin \theta d\varphi) dk$ et

$$\begin{aligned} \int d^3 k &= \int_0^\infty k^2 dk \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^\infty k^2 dk \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos \theta). \end{aligned}$$

Comme rien dans (A2.12) dépend de φ , l'intégrale sur φ donne 2π . On trouve

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty k^2 dk \int_{-1}^1 dx \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{\lambda_d^2}{1 + \lambda_d^2 k^2} e^{ikrx}, \quad (\text{A2.13})$$

où on a posé $x = \cos\theta$. En intégrant sur x on obtient

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{\lambda_d^2}{(2\pi)^2 i r} \int_0^\infty k dk \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{1 + \lambda_d^2 k^2}. \quad (\text{A2.14})$$

Ici, on peut bien sûr remplacer le numérateur par $2i \sin kr$ et chercher ensuite le résultat dans les tables numériques. Comme il nous faut de l'entraînement dans l'utilisation du théorème des résidus, on continue par nos propres moyens :

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{\lambda_d^2}{(2\pi)^2 r} 2\Im \int_0^\infty k dk \frac{e^{ikr}}{1 + \lambda_d^2 k^2}.$$

Puisqu'on s'intéresse seulement à la partie imaginaire $\Im$, l'intégrand est pair ; on peut donc étendre l'intégrale à $-\infty$ en y prenant la moitié.

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{(2\pi)^2 \epsilon_0 r} \Im \int_{-\infty}^\infty k dk \frac{e^{ikr}}{(k + i/\lambda_d)(k - i/\lambda_d)} \quad (\text{A2.15})$$

On constate que l'intégrand a des pôles simples à $k = \pm i/\lambda_d$, Fig. A2.2, dans le plan complexe de k .

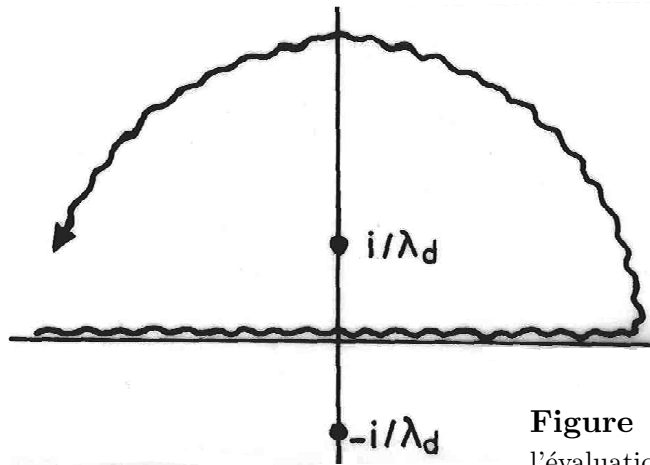


Figure A2.2 Parcours d'intégration pour l'évaluation de l'éq. (A2.15).

Le chemin d'intégration de $-\infty$ à $+\infty$ peut être fermé par en-haut, parce que la contribution de l'intégrale "par en-haut" est nulle due au facteur $\exp(ikr)$. Notez bien que celle "par en-bas" diverge par la présence du même facteur.

Remarque 1 :

S'il est possible de fermer une intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ des deux côtés, les deux manières produisent le même résultat. S'il n'est pas possible de fermer une telle intégrale ni d'un côté ni de l'autre, il n'est pas possible d'utiliser le théorème des résidus. Cela ne signifie pas que l'intégrale n'existe pas ! Un exemple trivial où la fermeture est impossible est l'équation (A2.14).

Remarque 2 :

Souvenez-vous du développement d'une fonction singulière (en un point z_0) en série de Laurent

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \quad (\text{A2.16})$$

Une intégrale autour de z_0 , c'est-à-dire une intégrale pour φ allant de 0 à 2π avec $z - z_0 = r \exp(i\varphi)$ et $r \rightarrow 0$ donne

$$\oint_{\odot_{z_0}} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}. \quad (\text{A2.17})$$

En utilisant le théorème des résidus et (A2.17) pour l'évaluation de (A2.15) on trouve (A2.10) :

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{Q}{(2\pi)^2 \epsilon_0 r} \Im \left[2\pi i \operatorname{R}_{k=i/\lambda_d} \frac{k e^{ikr}}{(k + i/\lambda_d)(k - i/\lambda_d)} \right] \\ &= \frac{Q}{(2\pi)^2 \epsilon_0 r} \Im \left[2\pi i \frac{(i/\lambda_d) \exp[i(i/\lambda_d)r]}{2(i/\lambda_d)} \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_d} \end{aligned}$$

Un livre classique sur l'analyse est "A course of Modern Analysis" by E.T. Whittaker and G.N. Watson, Cambridge University Press.

A3.

Les collisions coulombiennes

A3.1 La relaxation par collisions

Un champ électrique DC appliqué à un plasma accélère les électrons par rapport aux ions. Le courant ainsi créé est limité dans sa croissance, soit par les collisions entre les électrons et les ions, soit par des instabilités et la turbulence qui en découle. La friction entre les électrons et les ions est ce qu'on appelle la résistivité. Notez que les collisions entre électrons ne contribuent pas à la résistivité, parce qu'elles ne modifient pas l'impulsion totale des électrons (le courant !). Par contre, elles dominent la relaxation vers l'équilibre maxwellien d'une distribution électronique quelconque. La résistivité due à la turbulence est appelée "anormale". Ici, on s'intéresse à la résistivité "classique", "normale", ou "de Spitzer".

Examinons le mouvement d'un électron "test" dans un plasma constitué d'électrons et d'ions immobiles de charge ze . L'électron est défléchi de son parcours rectiligne par l'interaction qu'il subit avec les autres particules, et en particulier avec les ions puisqu'eux seuls contribuent à la résistivité. Dans un plasma chaud, l'énergie cinétique des électrons est beaucoup plus grande que leur énergie potentielle [le paramètre de plasma, $g_p \ll 1$, voir éq.(1.11)], et conséquemment leur parcours est pratiquement rectiligne. Ils interagissent d'une façon stochastique avec un très grand nombre d'ions sur leur parcours. Estimation : si l'électron a une vitesse $v = v_{the}$ il traverse une sphère de Debye dans le temps $2\lambda_d/v_{the} = 2/\omega_{pe}$. Dans ce temps qui est très court par rapport à la plupart des phénomènes plasmatiques, il aura déjà "vu" un grand nombre d'ions ($g_p^{-1} = n\lambda^3 \gg 1$). L'interaction avec un ion individuel est donc très, très faible. La déviation du parcours rectiligne

se fait alors par un très grand nombre de toutes petites corrections. A l'opposé de cela, dans un gaz idéal neutre du type "sphères dures", les corrections au parcours rectiligne sont très rares mais violentes (collisions habituelles).

Comme ici on ne tient compte que de l'interaction électron-ion, on peut exploiter le fait que $m_i \gg m_e$. En effet, en première approximation, c'est seulement la direction de l'électron qui change et non pas son énergie. Estimation : un électron de vitesse v fait une collision frontale avec un ion de vitesse zéro. A cause de la grande masse de l'ion, l'électron est essentiellement réfléchi et donne à l'ion l'impulsion $m_i V = 2m_e v$. L'ion a donc gagné l'énergie $\frac{1}{2}m_i V^2 = \frac{1}{2}m_i \left(2\frac{m_e}{m_i}v\right)^2 = 4\frac{m_e}{m_i} \left(\frac{1}{2}m_e v^2\right)$ qui a été perdue par l'électron. Cette perte est négligeable.

Formulation statistique du problème

L'interaction avec les ions peut être traitée statistiquement en disant que le changement d'angle, par rapport à la direction initiale de l'électron, est un processus brownien. Effectivement, on s'attend à voir évoluer la distribution de vitesse d'un petit faisceau de test froid (= monochromatique) de vitesse $\mathbf{v} = (v_0, 0)$ selon la Fig. A3.1.

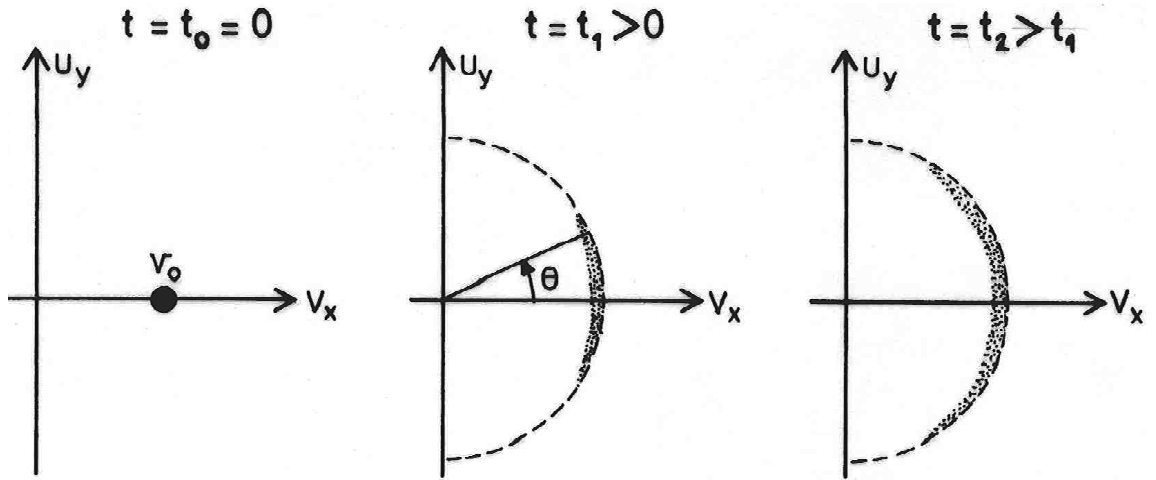


Figure A3.1 L'évolution collisionnelle d'une distribution de vitesse électronique bi-dimensionnelle. Au temps t_0 , toutes les N particules du faisceau ont la même vitesse, $\mathbf{v} = (v_0, 0)$. Au cours du temps, elles s'étalent le long du cercle de rayon v_0 .

Ceci peut être formalisé en définissant la *densité angulaire* $N\Theta(\theta, t)$ tel que

$$N\Theta(\theta, t)d\theta \quad \text{est le nombre d'électrons de vitesse } \mathbf{v} = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta) \text{ ayant l'angle (pitch angle en anglais) dans l'intervalle } [\theta, \theta + d\theta]. \quad (\text{A3.1})$$

La distribution est normalisée,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \Theta(\theta, t) d\theta = 1, \quad (\text{A3.2})$$

et $\Theta(\theta, t)d\theta$ peut donc être interprétée comme la **probabilité** de trouver un électron particulier dans l'intervalle $[\theta, \theta + d\theta]$.

On sait qu'un mouvement brownien est régi par une équation de diffusion (ou, en général, par une équation de Fokker-Planck) ; ici, en particulier, il s'agit d'une diffusion en *pitch angle* :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \hat{D} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2}. \quad (\text{A3.3})$$

Notez que, dimensionnellement, $\hat{D}$ est une fréquence. On montrera plus bas qu'effectivement $\hat{D}$ est apparenté à la fréquence de collision "normale" dans un gaz neutre.

La situation montrée dans la Fig.(A3.1) est décrite par une condition initiale en forme de fonction de Dirac, $\Theta(\theta, t = 0) = \delta(\theta)$ et l'évolution temporelle se fait selon

$$\Theta(\theta, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\hat{D}t}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{4\hat{D}t}\right), \quad (\text{A3.4})$$

pour des temps suffisamment petits, $\hat{D}t \ll (\pi/2)^2$. Cette restriction de la solution (A3.4) est nécessaire pour que la solution ne se rende pas compte de la périodicité sur 2π de θ ; on exige en fait, $\langle \theta^2 \rangle \ll 1$. Sous la même restriction, on vérifie l'éq.(A3.2).

La démarche dans ce chapitre est de présenter le sujet d'une façon intuitive d'abord et d'élaborer les détails ensuite. Nous allons maintenant faire la connection entre notre coefficient de diffusion $\hat{D}$ et la fréquence de collision ordinaire, ensuite rappeler la théorie microscopique élémentaire des coefficients de transport (entre autre du coefficient de diffusion), et finalement traiter les détails mécaniques de la collision électron-ion pour arriver au résultat final, le temps de relaxation électron-ion.

La relation avec le temps de relaxation

On est tellement habitué à penser qu'une "collision moyenne" change la direction d'une particule de l'ordre de 90° que l'on va définir une sorte de "fréquence de collision" par

$$\frac{d\langle w \rangle}{dt} = -\nu_s \langle w \rangle. \quad (\text{A3.5})$$

La moyenne se prend ici sur un ensemble de particules ayant la même vitesse initiale ($\mathbf{v} = (v_0, 0)$ dans la figure A3.1) et une vitesse w dans la direction initiale au temps t ($v_x(t)$ dans la figure A3.1).

En physique des plasmas, on appelle ν_s le taux (ou la fréquence) de freinage (*slowing down rate*) et

$$\tau_s \equiv 1/\nu_s, \quad (\text{A3.6})$$

le temps de relaxation. Il en existe plusieurs, voir *NRL formulary*, p.31. Notez - encore un fois - qu'il y a un grand nombre de rencontres électron-ion (les vraies collisions coulombiennes) dans un temps de relaxation!!! Souvent, on appelle abusivement ν_s la fréquence de collision.

La distribution (A3.4) nous permet de calculer $\langle w \rangle = v_0 \langle \cos \theta \rangle \approx v_0 \langle 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \rangle$; dans le dernier pas, on s'est rappelé du fait que (A3.4) n'est valable que pour $\hat{D}t \ll 1$. Avec la même restriction, on a

$$\langle \theta^2 \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} \theta^2 \Theta(\theta, t) d\theta \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi \hat{D}t}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 \exp\left(-\frac{\theta^2}{4\hat{D}t}\right) d\theta = 2\hat{D}t,$$

et alors

$$\frac{d\langle w \rangle}{dt} = -\hat{D}v_0 \approx -\hat{D}\langle w \rangle,$$

ce qui nous permet d'identifier $\hat{D}$ avec ν_s .

Description qualitative des processus de transport (un rappel de la théorie cinétique des gaz)

La théorie qualitative des phénomènes de transport se base sur une "longueur élémentaire", le **libre parcours moyen**, ℓ et sur un "temps élémentaire", le **temps libre moyen**, $\tau_{tlm} = 1/\nu$, que l'on pourrait aussi appeler le "temps de vol libre". Ici, ν désigne une fréquence de collision associée à ce temps libre.

L'équation de transport s'obtient de la combinaison d'une équation de continuité

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} = 0 \quad (\text{A3.7})$$

et d'une relation constitutive du type

$$\vec{\mathcal{J}} = - \left(\begin{array}{c} \text{coef. de} \\ \text{transport} \end{array} \right) \nabla \mathcal{N}. \quad (\text{A3.8})$$

Ici, $\mathcal{N}$ est une densité et $\vec{\mathcal{J}}$ un flux; $\mathcal{N}$ peut être un scalaire ou un vecteur (p.ex. densité d'impulsion) et $\vec{\mathcal{J}}$ un vecteur ou un tenseur, respectivement (dans le cas de l'impulsion).

Traisons le cas de la diffusion qui nous intéresse directement. Dans ce cas, $\mathcal{N} = n$ est la densité des particules en question et $\vec{\mathcal{J}} = \mathbf{i}$, le flux de ces particules; le coefficient de transport est celui de la diffusion :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{i} = 0, \quad (\text{A3.9})$$

$$\mathbf{i} = -D\nabla n, \quad (\text{A3.10})$$

et en conséquence

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot D\nabla n. \quad (\text{A3.11})$$

C'est l'équation de diffusion recherchée.

On obtient le coefficient en déterminant d'une façon approchée le flux en fonction des quantités microscopiques ℓ et τ_{tlm} et du gradient de densité.

Supposons un gradient dans la direction x et faisons le bilan des flux de particules de direction opposée, Fig.A3.2.

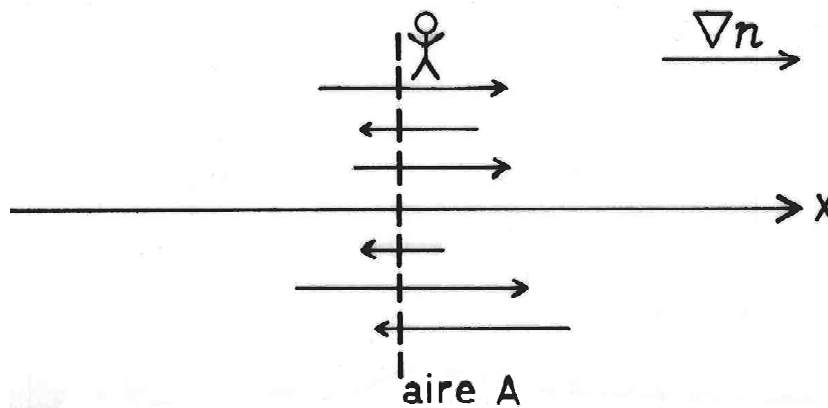


Figure A3.2 Les particules traversent l'aire A dans les deux directions. Le flux i_x est donné par le bilan des deux flux unidirectionnels.

Le flux diffusif est donné par la différence du nombre de particules par seconde traversant l'aire A de gauche à droite ($N_{\rightarrow}$) moins le nombre de celles traversant en sens inverse ($N_{\leftarrow}$) :

$$i_x = \frac{N_{\rightarrow} - N_{\leftarrow}}{A \Delta t}.$$

Dans un temps τ_{tlm} , la moitié des particules à gauche dans la Fig.A3.3 et, respectivement, la moitié des particules à droite traversent l'aire A .

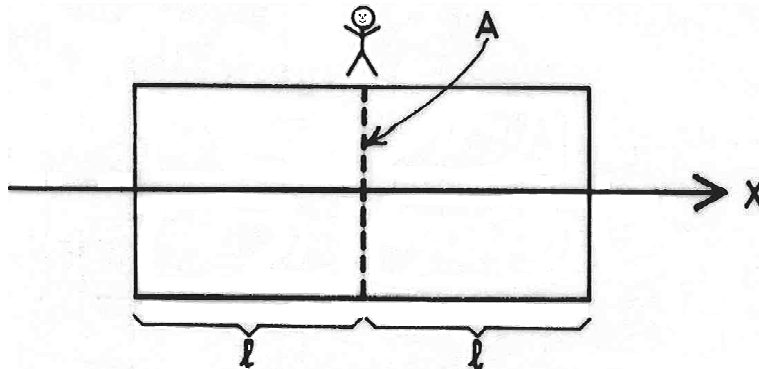


Figure A3.3 Les particules parcourent une distance ℓ dans un temps τ_{tlm} .

Leur densité moyenne est $n(x \pm \frac{1}{2}\ell)$, respectivement. En développant n autour de x , on trouve

$$i_x = \frac{\frac{1}{2}\ell An(x - \frac{1}{2}\ell) - \frac{1}{2}\ell An(x + \frac{1}{2}\ell)}{\tau_{tlm}A} \approx -\frac{\ell^2}{2\tau_{tlm}} \frac{\partial n}{\partial x},$$

et en comparant avec l'éq.(A3.10)

$$D = \frac{\ell^2}{2\tau_{tlm}}. \quad (\text{A3.12})$$

On peut suivre exactement la même argumentation pour déterminer d'autres coefficients de transport comme la viscosité (transport de quantité de mouvement) et le coefficient de conduction thermique (transport d'énergie).

Pour notre diffusion angulaire, (A3.3), on obtient trivialement

$$\nu_s = \hat{D} = \frac{\vartheta^2}{2\tau_{tlm}}, \quad (\text{A3.13})$$

où ϑ est "l'angle libre moyen", le pas élémentaire dans notre mouvement brownien. Ce sont les lois de la collision coulombienne qui vont nous servir maintenant à déterminer ϑ et τ_{tlm} .

La collision "binaire" moyenne

Un électron test interagit simultanément avec tous les ions à l'intérieur de sa sphère de Debye, mais nous considérons chaque interaction comme indépendante des autres. Comptons le nombre de rencontres binaires effectuées, par un électron test dans une seconde, Fig. A3.4.

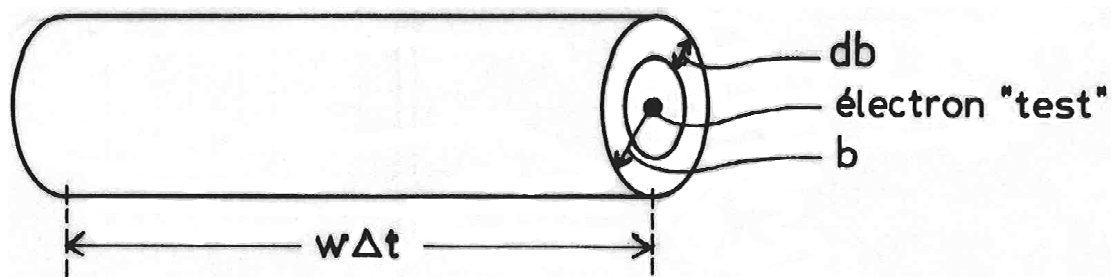


Figure A3.4 L'interaction entre un électron et un ion est déterminée par le paramètre d'impact b , la distance entre l'ion et l'orbite non-perturbée de l'électron. Ici, l'électron se déplace dans une seconde d'une distance de $w \cdot 1$ sec le long de l'axe du cylindre.

Dans une seconde, l'électron se déplace d'une distance de $w \cdot 1 \text{ sec}$ et entre en contact avec tous les ions se trouvant dans un cylindre de longueur $w \cdot 1 \text{ sec}$ et de rayon λ_d . Le nombre de rencontres est donc donné par le nombre d'ions se trouvant dans le cylindre :

$$\begin{array}{l} \text{Le nombre de rencontre e-i avec } b \text{ dans} \\ \text{l'intervalle } [b, b + db] \text{ par seconde} \end{array} = n_i 2\pi b db w,$$

où n_i est la densité des ions. En intégrant cette expression sur tous les paramètres d'impact, on obtient **le nombre total** de rencontres en une seconde, ce qui définit τ_{tlm} ,

$$\begin{array}{l} \text{Le nombre d'ions ren-} \\ \text{contrés dans une seconde} \end{array} = \int_0^{\lambda_d} 2\pi n_i b w db = \frac{1}{\tau_{tlm}}. \quad (\text{A3.14})$$

Dans cette intégrale, on ne tient compte que des valeurs $b \leq \lambda_d$ à cause de l'écrantage de Debye effectué par les autres électrons. Pour des raisons didactiques, nous avons évité ici de parler de "fréquence de collision" bien qu'on la définisse, dans un gaz neutre, exactement de cette manière. La fréquence τ_{tlm}^{-1} compte le nombre de rencontres (faibles!!) coulombiennes et est beaucoup plus grande que la fréquence ν_s définie auparavant, éq. (A3.5).

L'éq. (A3.14) peut être réécrite comme

$$\int_0^{\lambda_d} 2\pi n_i b w \tau_{tlm} db = 1, \quad (\text{A3.15})$$

ce qui permet d'interpréter $2\pi n_i b w \tau_{tlm} db$ comme la probabilité pour qu'une rencontre particulière se fasse avec un ion dans l'intervalle $[b, b + db]$.

Cette probabilité permet de calculer "l'angle libre moyen" ϑ du processus brownien ou, exprimé différemment, l'angle de déviation moyen lors d'une rencontre coulombienne binaire :

$$\vartheta^2 = \langle \theta^2(b) \rangle = \int_0^{\lambda_d} \theta^2(b) 2\pi n_i b w \tau_{tlm} db. \quad (\text{A3.16})$$

L'angle de déviation particulier $\theta(b)$ à une rencontre spécifique est montré dans la Fig.A3.5.

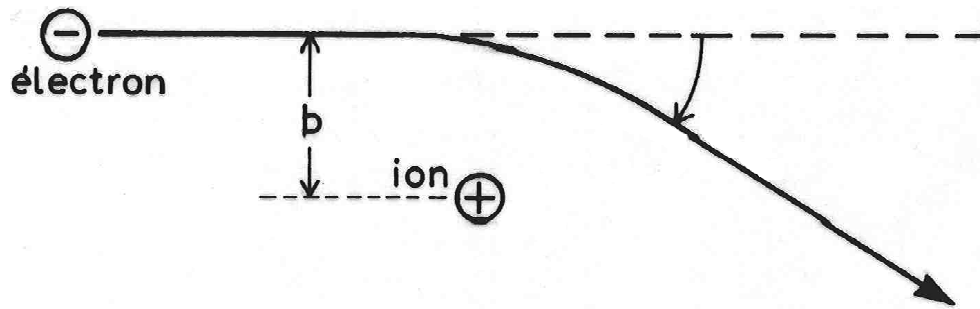


Figure A3.5 La géométrie d'une rencontre binaire.

Ce résultat peut être utilisé dans l'éq.(A3.13) et donne

$$\nu_s = \hat{D} = \pi n_i w \int_0^{\lambda_d} \theta^2(b) b db. \quad (A3.17)$$

Notez que l'intégrale dans cette équation est finie ! Il est important de constater ceci parce que, lors de son évaluation approchée, l'intégrale divergera et il faudra savoir pourquoi et améliorer l'évaluation.

Calcul de l'angle moyen

L'interaction entre l'électron et l'ion est faible. On utilise ceci en supposant une orbite rectiligne de l'électron comme montré dans la Figure A3.6 et un mouvement uniforme à la vitesse w .

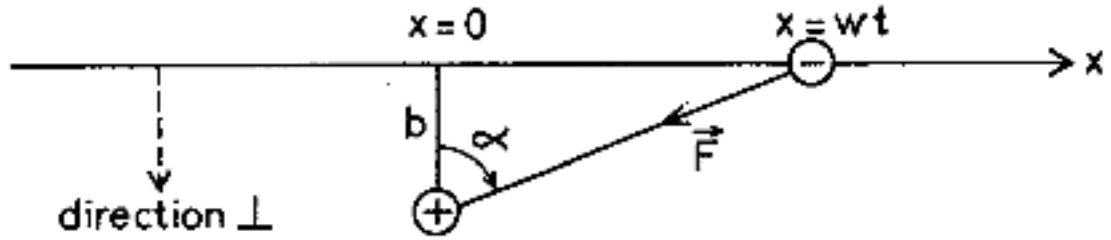


Figure A3.6 La géométrie approchée d'une rencontre binaire. Quand $g_p \ll 1$, la déviation du parcours rectiligne est très, très petite dans la plupart des rencontres.

On obtient l'angle de déviation approché en calculant le changement approché d'impulsion de l'électron en direction perpendiculaire au mouvement,

$$\Delta v_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\perp}(t)}{m_e} dt$$

où

$$F_{\perp} = F \cos \alpha = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{b}{r} = \frac{ze^2 b}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Ici, $r = \sqrt{b^2 + w^2 t^2}$ et z est le nombre de charges ioniques. De cela, on tire

$$\theta(b) \approx \frac{\Delta v_{\perp}}{w} = \frac{2}{m_e w} \int_0^{\infty} \frac{ze^2 b}{4\pi\epsilon_0 (b^2 + w^2 t^2)^{3/2}} dt = \frac{ze^2}{2\pi m_e \epsilon_0} \frac{1}{w^2 b} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}}. \quad (A3.18)$$

La dernière intégrale ayant la valeur 1, on trouve pour l'éq.(A3.17)

$$\nu_s = \pi n_i w \int_0^{\lambda_d} \theta^2(b) b db = \frac{n_i}{4\pi} \left(\frac{ze^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^2 \frac{1}{w^3} \int_0^{\lambda_d} \frac{db}{b}. \quad (\text{A3.19})$$

Voilà que le désastre annoncé s'est produit : La dernière intégrale diverge parce que $\theta(b) \sim 1/b$ dans notre approximation d'une orbite rectiligne ! En réalité évidemment $\theta(b=0) = \pi$ et non pas ∞ .

Quelles sont les issues possibles de cette situation malcommode ? Soit on fait le calcul correct, soit on prend *ad hoc* une limite inférieure de l'intégrale $b_{min} > 0$. La valeur de l'intégrale ne dépendra que logarithmiquement (donc faiblement) de la valeur choisie pour b_{min} ; le choix *ad hoc* n'est donc pas très critique. On obtient le résultat final correct en choisissant

$$b_{min} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e w^2}, \quad (\text{A3.20})$$

ce qui équivaut, dans l'éq.(A3.18), de prendre un angle limite de $\theta_{lim} = 2$. Si l'on avait pris la limite *a priori* plus raisonnable de $\theta_{lim} = 1$, le résultat final changerait de l'ordre de 5%. L'insensibilité du résultat s'explique physiquement par le fait qu'il y a proportionnellement très, très peu de rencontres produisant une déflexion de grand angle. Un deuxième argument pour b_{min} passe par la notion de "l'approche maximale" b^* défini à travers les énergies cinétique et potentiel,

$$\frac{1}{2} m_e w^2 = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 b^*}.$$

Pour le résultat correct, éq.(A3.20), il faut donc prendre $b_{min} = b^*/2$. Il est instructif de constater que dans cet argument-ci on aurait plutôt eu tendance à prendre b_{min} plus grand, $b_{min} = b^*$. Ce flottement est tout-à-fait acceptable et normal parce que l'éq.(A3.18) n'est valable de toute façon que pour des petits angles, $\theta \ll 1$.

La quantité,

$$L_{ei} = \int_{b_{min}}^{\lambda_d} \frac{db}{b} = \ln \frac{\lambda_d}{b_{min}} \quad (\text{A3.21})$$

s'appelle le **logarithme de Coulomb** et prend des valeurs entre 10 et 20 dans les plasmas qui nous intéressent, voir NRL formulary, p.34.

Le temps de relaxation

En combinant les éq. (A3.19) et (A3.21), le résultat prend la forme

$$\nu_s(w) = \frac{n_i}{4\pi} \left(\frac{ze^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^2 \frac{1}{w^3} L_{ei}. \quad (\text{A3.22})$$

Il est directement utilisable dans le cas d'un faisceau électronique froid (c'est-à-dire monochromatique) qui traverse un fond ionique (ou un plasma) à une vitesse w . C'est le cas "e-i fast" dans le NRL formulary, p.32. Par contre, si la composante électronique n'est pas froide mais a une température telle que la vitesse thermique v_{the} domine sur la vitesse ordonnée V_e , c'est la première qui détermine le temps de relaxation. Comme la vitesse thermique réelle est donnée par $\langle v^2 \rangle = 3v_{the}^2$ (Exercices, série 1), on doit, dans ce cas, remplacer w dans l'éq.(A3.22) par $\sqrt{3}v_{the}$ avec le résultat

$$\nu_s = \frac{1}{12\pi\sqrt{3}} \frac{1}{n_i} \left(\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^2 \frac{1}{v_{the}^3} L_{ei} = \frac{1}{12\pi\sqrt{3}} \frac{\omega_{pe}}{\lambda_{de}^3 n_i} L_{ei}, \quad (A3.23)$$

ou en supposant $z = 1$

$$\frac{\nu_s}{\omega_{pe}} = \frac{L_{ei}}{12\pi\sqrt{3}} g_p. \quad (A3.24)$$

Ce dernier résultat est très important ; il montre explicitement que les collisions ne jouent qu'un rôle souvent négligeable dans un plasma idéal où $g_p \ll 1$. Notez qu'avec $w = \sqrt{3}v_{the}$ dans l'éq.(A3.21), on a

$$L_{ei} = \ln \frac{12\pi}{g_p}. \quad (A3.25)$$

Une théorie plus évoluée du type Fokker-Planck modifie le coefficient numérique dans l'éq.(A3.23). Le résultat est

$$\frac{1}{\nu} \equiv \tau_e = \frac{\tau_s}{2} = \frac{1}{2\nu_s} = 6\sqrt{2\pi^3} \epsilon_0^2 \frac{(kT_e)^{3/2} m_e^{1/2}}{e^4 n L_{ei}} = \frac{6\pi\sqrt{2\pi}}{g_p L_{ei} \omega_{pe}}. \quad (A3.26)$$

La discrédance entre le résultat approché, (A3.23) et celui-ci n'est que de 45%.

A3.2 La loi d'Ohm

Comme la friction subie par un électron dépend fortement de sa vitesse, le calcul de la résistivité n'a pas de réponse simple. Seulement dans le cas d'un champ faible les ions arrivent à retenir les électrons :

$$\frac{dV_e}{dt} = -\nu_s V_e - \frac{e}{m_e} E. \quad (A3.27)$$

Le champ est faible si

$$\frac{eE}{m_e \nu_s} \ll v_{the}, \quad (A3.28)$$

c'est-à-dire que la vitesse ordonnée créée par le champ est beaucoup plus petite que la vitesse thermique. Dans ce cas, la fréquence de collision (A3.22) doit être évaluée avec la vitesse thermique moyenne. L'état stationnaire $dV_e/dt = 0$, décrit par l'éq. (A3.27), fournit alors la loi d'Ohm

$$j = -en_e V_e = \frac{e^2 n_e E}{m_e \nu_s(w)} \Big|_{w=\sqrt{3}v_{the}} \equiv \sigma E. \quad (A3.29)$$

Pour n'importe quelle valeur du champ, il existe une *vitesse critique* $w = v_{crit}$ déterminée par

$$\frac{eE}{m_e} = v_{crit} \nu_s(v_{crit}) \quad (A3.30)$$

qui différencie les électrons retenus par les ions et les *électrons découplés* (*runaway electrons*). La loi d'Ohm, éq. (A3.29), n'est plus valable si un nombre considérable d'électrons est découplé. Ceci arrive lorsque

$$\left| \frac{j}{en_e} \right| > 0.1 v_{the}. \quad (A3.31)$$

Dans des tokamaks à basse densité, il arrive que le courant torique soit essentiellement porté par des électrons découplés. La distribution des vitesses est alors constituée par une partie thermique et une longue queue qui peut s'étendre jusqu'à des vitesses relativistes. Sous certaines conditions, cette distribution excite l'instabilité de l'éventail (*fan instability*, *anomalous Doppler instability*).

A4.

La méthode des perturbations

Les équations de Vlasov et fluides étant nonlinéaires, il n'existe pas de méthode permettant la construction d'une solution générale.

Ce appendice expose une méthode souvent utilisée pour construire des solutions d'une certaine classe : la méthode des perturbations. Au lieu de la formuler d'une façon théorique, on la met en oeuvre ici pour résoudre une équation différentielle ordinaire simple dont on connaît même une solution analytique.

Soit l'équation à résoudre

$$\frac{da}{dt} = (1 - a)a. \quad (A4.1)$$

Elle possède la solution stationnaire, $a(t) = 1$. On cherche maintenant la solution qui prend la valeur $1 + \epsilon$ au temps $t = 0$. Pour le moment, on n'exige rien de spécial pour ϵ .

La solution exacte s'obtient comme suit. L'intégration de

$$\frac{da}{(1 - a)a} = dt$$

a pour résultat

$$\ln \left| \frac{a - 1}{a} \right| = -t + t_0 \quad (A4.2)$$

où t_0 est une constante d'intégration. A partir d'ici on ne traite que le cas $a > 1$. En résolvant l'éq. (A4.2) pour a on trouve :

$$a(t) = \frac{1}{1 - \exp(t_0 - t)}.$$

Reste à choisir t_0 de façon à satisfaire à la condition initiale, $a(t = 0) = 1 + \epsilon$:

$$e^{t_0} = \frac{\epsilon}{1 + \epsilon}.$$

La solution exacte du problème posé pour $t \geq 0$ est donc

$$a(t) = \frac{1 + \epsilon}{1 + \epsilon [1 - \exp(-t)]}. \quad (\text{A4.3})$$

Si $0 < \epsilon \ll 1$ on peut développer en puissance de ϵ et on a

$$a(t) \approx 1 + \epsilon e^{-t} + \epsilon^2 (e^{-2t} - e^{-t}) + \dots. \quad (\text{A4.4})$$

Le même résultat peut être obtenu par la méthode de perturbation. Elle consiste à développer la solution $a(t)$ a priori en puissance de ϵ :

$$a(t) = a_0(t) + a_1(t) + a_2(t) + \dots, \quad (\text{A4.5})$$

où $a_i(t)$ est supposé proportionnel à ϵ^i . La première fonction, $a_0(t)$ qui est indépendante de ϵ décrit l'état stationnaire,

$$a_0(t) = 1. \quad (\text{A4.6})$$

Insérant (A4.5) et (A4.6) dans (A4.1) on a

$$\frac{da_1}{dt} + \frac{da_2}{dt} + \dots = -(a_1 + a_2 + \dots)(1 + a_1 + a_2 + \dots).$$

Les termes proportionnels à ϵ produisent

$$\frac{da_1}{dt} = -a_1, \quad (\text{A4.7})$$

et ceux proportionnels à ϵ^2

$$\frac{da_2}{dt} = -a_1^2 - a_2, \quad (\text{A4.8})$$

et ainsi de suite. La démarche est maintenant évidente ; on résoud d'abord (A4.7) avec la condition initiale $a_1(t=0) = \epsilon$. Le résultat est ensuite injecté dans (A4.8) que l'on résoud avec $a_2(t=0) = 0$.

La solution de (A4.7) est

$$a_1(t) = \epsilon e^{-t} \quad (\text{A4.9})$$

et (A4.8) devient

$$\frac{da_2}{dt} + a_2 = -\epsilon^2 e^{-2t}. \quad (\text{A4.10})$$

C'est une équation linéaire inhomogène dont on construit la solution en ajoutant la solution générale de sa partie homogène et une solution particulière.

La partie homogène a comme solution générale

$$C e^{-t}.$$

L'Ansatz (méthode de la variation de la constante)

$$\psi(t) e^{-t}$$

permet de trouver une solution particulière de (A4.10). Par substitution on trouve

$$\frac{d\psi}{dt} = -\epsilon^2 e^{-t} \quad \rightarrow \quad \psi(t) = \epsilon^2 e^{-t}$$

ce qui nous mène à la solution générale

$$a_2(t) = C e^{-t} + \epsilon^2 e^{-2t}.$$

Comme on exige $a_2(t=0) = 0$ C doit être $-\epsilon^2$ et la solution s'écrit

$$a_2(t) = \epsilon^2 (e^{-2t} - e^{-t}). \quad (\text{A4.11})$$

En insérant les solutions (A4.6), (A4.9) et (A4.11) dans le développement (A4.5) on retrouve la solution (A4.4).

Dans la vie réelle, on ne connaît que très rarement la solution du problème physique complet que l'on aimerait résoudre ; par contre on est souvent capable de trouver une ou plusieurs solutions d'un problème simplifié : par exemple une solution stationnaire en physique des plasmas ou la solution pour un potentiel simple

non-perturbé en mécanique quantique etc. En développant en termes d'un petit paramètre on arrive alors à trouver des solutions proches de la solution d'ordre zéro. En physique des plasmas, on s'arrête souvent à l'étape linéaire et on se contente donc de résoudre la forme linéarisée (A4.7) de l'équation non-linéaire de base ((A4.1) dans notre exemple).

D'habitude on ne se préoccupe pas de la convergence du développement en supposant que le paramètre soit suffisamment petit.

A5.

Méthode des orbites non-perturbées

L'équivalence entre une équation différentielle à dérivées partielles du premier ordre et un système d'équations différentielles ordinaires décrivant les caractéristiques de la première est un sujet traité dans tous les textes sur les équations à dérivées partielles(*).

Dans ce cours, on utilise cette équivalence pour des équations à dérivées partielles linéaires sous la forme suivante. Soit l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = s(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A5.1})$$

où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et t sont des variables indépendantes, $f(\mathbf{x}, t)$ la variable dépendante inconnue et $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et $s(\mathbf{x}, t)$ $n + 1$ fonctions données. On cherche $f(\mathbf{x}, t)$ satisfaisant à la condition initiale

$$f(\mathbf{x}, t = 0) = g(\mathbf{x}) \quad (\text{A5.2})$$

où $g(\mathbf{x})$ est une fonction donnée.

Si on connaît les solutions du système d'équations différentielles ordinaires

(*) voir p.ex. R. Courant et D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience 1962, Vol.II, Chap.I, §5.

$$\frac{d\mathbf{x}'(t')}{dt'} = \mathbf{u}(\mathbf{x}'(t'), t') \quad (\text{A5.3})$$

pour toutes les conditions de “passage” (*)

$$\mathbf{x}'(t' = t) = \mathbf{x}, \quad (\text{A5.4})$$

on peut construire la solution de l'éq. (A5.1) à partir de la condition initiale (A5.2). En effet, comme l'éq. (A5.1) doit être satisfaite pour tout choix du $(n+1)$ -tuple des variables indépendantes $(\mathbf{x}, t)$, elle doit être aussi satisfaite pour le choix spécial de $(\mathbf{x}'(t'), t')$:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} + \mathbf{u}(\mathbf{x}'(t'), t') \cdot \frac{\partial f(\mathbf{x}', t')}{\partial \mathbf{x}'} = s(\mathbf{x}'(t'), t'). \quad (\text{A5.5})$$

A l'aide de (A5.3) cette dernière équation s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t'} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}'} \cdot \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = \frac{df(\mathbf{x}'(t'), t')}{dt'} = s(\mathbf{x}'(t'), t'). \quad (\text{A5.6})$$

Elle peut être intégrée de $t' = 0$ à $t' = t$,

$$f(\mathbf{x}'(t), t) - f(\mathbf{x}'(0), 0) = \int_0^t s(\mathbf{x}'(t'), t') dt'. \quad (\text{A5.7})$$

En utilisant les éq. (A5.2) et (A5.4), on trouve finalement

$$f(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}'(0)) + \int_0^t s(\mathbf{x}'(t'), t') dt'. \quad (\text{A5.8})$$

Si on veut connaître la valeur de f à l'endroit $\mathbf{x}$ et au temps t , il faut prendre la valeur de f au temps $t = 0$ au point $\mathbf{x}_0$ qui est le point de départ de l'orbite qui passe au temps t à $\mathbf{x}$: $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}'(0)$. S'il y a une source $s(\mathbf{x}, t)$, il faut en plus accumuler son influence sur f tout le long de cette même orbite.

(*) D'habitude, on ne dit pas “condition de passage”, mais “condition initiale”. Le terme “passage” est utilisé ici pour deux raisons didactiques : Premièrement, il faut distinguer cette condition de la condition initiale (A5.2) imposée à l'équation à dérivées partielles. Deuxièmement, il n'y a rien qui restreint t' à des valeurs plus grandes que t ; dans ce qui suit t' va en fait parcourir l'intervalle $[0, t]$.

Voilà ce qui est important : toute information nécessaire pour la connaissance de $f(\mathbf{x}, t)$ en un point spatio-temporel $(\mathbf{x}, t)$ donné, provient de l'orbite (ou de la caractéristique) passant par $(\mathbf{x}, t)$. Notez que $\mathbf{x}'(0)$ est une fonction de $\mathbf{x}$ et t et que la condition $\mathbf{x}'(0) = \text{const}$ définit implicitement l'orbite en question. Vu sous cet angle, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}'(0)$ joue le rôle d'une constante de mouvement.

Une illustration simple est utile à la compréhension. On se propose de résoudre le problème suivant

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + v \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = s(x, t), \quad (\text{A5.9})$$

où v est un paramètre. L'équation pour les caractéristiques,

$$\frac{dx'}{dt'} = v, \quad (\text{A5.10})$$

est simple à résoudre :

$$x'(t') = x + v(t' - t). \quad (\text{A5.11})$$

On vérifie que la solution satisfait à la condition de "passage", $x'(t' = t) = x$. Avec $f(x, t = 0) = g(x)$ comme condition initiale, on trouve, à l'aide de l'éq. (A5.8)

$$f(x, t) = g(x - vt) + \int_0^t s(x + v(t' - t), t') dt'. \quad (\text{A5.12})$$

Il est évident que la condition initiale est satisfaite. Vérifions aussi l'éq. (A5.9) :

$$v \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = v \left. \frac{dg}{d\xi} \right|_{\xi=x-vt} + \int_0^t v \left. \frac{\partial s(\xi, t')}{\partial \xi} \right|_{\xi=x+v(t'-t)} dt'$$

et

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial g(x - vt)}{\partial t} + \int_0^t \frac{\partial s(x + v(t' - t), t')}{\partial t} dt' + s(x, t)$$

En faisant le changement de variable $\xi = x - vt$ pour le premier terme et $\xi = x + v(t' - t)$ pour le deuxième, on obtient :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -v \left. \frac{dg}{d\xi} \right|_{\xi=x-vt} + \int_0^t (-v) \left. \frac{\partial s(\xi, t')}{\partial \xi} \right|_{\xi=x+v(t'-t)} dt' + s(x, t)$$

On voit donc que (A5.12) est bien une solution de (A5.9).

Cette méthode prend souvent le nom de “méthode des orbites non-perturbées” quand elle est utilisée pour la résolution de l’équation de Vlasov linéarisée. Les caractéristiques sont alors équivalentes aux orbites d’une particule test dans les champs non-perturbés $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_0$:

$$\frac{d\mathbf{r}'(t')}{dt'} = \mathbf{v}'(t'), \quad (\text{A5.13})$$

$$\frac{d\mathbf{v}'(t')}{dt'} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} [\mathbf{E}_0(\mathbf{r}'(t'), t') + \mathbf{v}'(t') \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r}'(t'), t')]. \quad (\text{A5.14})$$

L’identification de (A5.1) avec l’équation de Vlasov linéarisée se fait par

$$\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad (\text{A5.15})$$

et

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \left(\mathbf{v}, \frac{q_\alpha}{m_\alpha} [\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t)] \right). \quad (\text{A5.16})$$

A6.

Fourier, Laplace ou l'ordinateur ?

Dans le contexte de ce cours il n'y a pas de raison de parler de la transformation de Laplace pour les variables spatiales. Par contre, pour le temps il peut y avoir discussion. On comprend mieux cette dernière si on se place devant un problème physique concret.

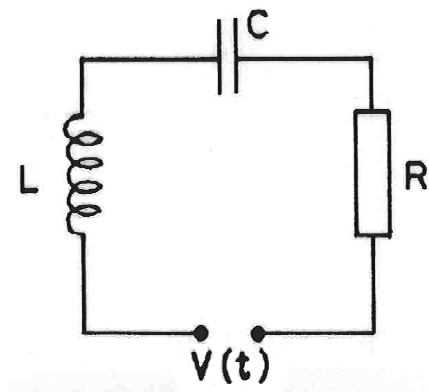


Figure A6.1 Circuit LCR standard excité par une source de tension $V(t)$

Soit alors le circuit électrique de la figure A6.1. Pour celui-ci on peut formuler deux problèmes "type" :

- 1) Le problème à valeur initiale sans excitation externe, $V(t > 0) = 0$. C'est-à-dire

$$Q_0 \equiv Q(t=0) \neq 0 \quad \text{et/ou} \quad I_0 = \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} \neq 0.$$

- 2) Le problème du circuit excité (correspondant aux problèmes aux valeurs au bord des équations différentielles à dérivées partielles en $\mathbf{r}$ et t). Ici, on a $Q_0 = 0$, $I_0 = 0$ mais $V(t > 0) \neq 0$.

L'équation différentielle ordinaire régissant ces deux problèmes s'écrit pour la charge $Q(t)$:

$$\frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2Q}{dt^2} = -V(t). \quad (\text{A6.1})$$

Comme cette équation est linéaire on peut superposer les solutions des problèmes 1) et 2) pour construire la solution du problème combiné avec des valeurs initiales et une excitation non-nulles.

L'équation (A6.1) étant linéaire on peut aussi argumenter que la connaissance de la réponse du système à des excitations périodiques est suffisante pour construire une solution générale. Pour cette raison on se contente (problèmes 2 ou 1+2) souvent de connaître la solution stationnaire maintenue par une excitation périodique. Cette solution stationnaire existe pour $t \rightarrow \infty$ si $R > 0$: Tout ce qui vient de l'enclenchement ou des conditions initiales est amorti et oublié.

Bien que l'on puisse obtenir des solutions asymptotiques ($t \rightarrow \infty$) à l'aide de méthodes numériques, c'est plutôt le royaume de l'analytique, alors que les solutions complètes qui demandent beaucoup de travail algébrique sont obtenues avantageusement à l'aide de l'ordinateur.

Dans les méthodes analytiques il faudrait maintenant comparer Fourier et Laplace. Essayons d'abord de résoudre l'éq. (A6.1) par la méthode des transformées de Laplace. On se donne le problème combiné 1+2 avec une excitation périodique

$$V(t) = -V_0 \sin \Omega t, \quad (\text{A6.2})$$

ce qui nous permet de chercher la solution complexe avec une excitation complexe

$$V(t) = V_0 \exp(-i\Omega t), \quad (\text{A6.3})$$

et de prendre ensuite la partie imaginaire de la solution.

En appliquant les prescriptions du § A1.3 de l'appendice on trouve la transformée de la solution,

$$q(\omega) = \underbrace{\frac{(i\omega L - R)Q(0) - L\dot{Q}(0)}{(\omega - \omega_1)(\omega + \omega_1^*)}}_{\text{Oscillations propres dues aux valeurs initiales}} + \underbrace{\frac{iV_0}{(\omega - \omega_1)(\omega + \omega_1^*)}}_{\text{Oscillations propres dues à l'enclenchement}} \underbrace{\frac{1}{(\omega - \Omega)}}_{\text{Oscillations forcées}}, \quad (\text{A6.4})$$

où la fréquence propre complexe du circuit est donnée par

$$\omega_1 = -i\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}, \quad (\text{A6.5})$$

$$= i\delta + \omega_0. \quad (\text{A6.6})$$

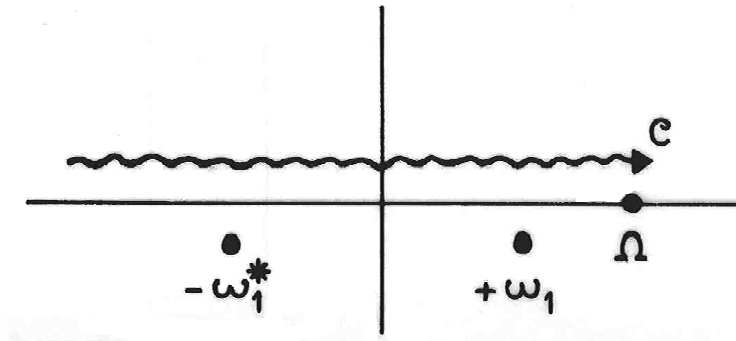


Figure A6.2 Selon la prescription pour les transformées de Laplace le chemin d'intégration $\mathcal{C}$ doit passer au-dessus des pôles ($\Im(\omega)$ suffisamment grand).

Pour la transformation de l'espace des fréquences ω à l'espace du temps, éq.(A1.8), il faut se souvenir que la partie imaginaire de ω doit être suffisamment grande. Le chemin d'intégration passera donc au-dessus des pôles ($\omega_1, -\omega_1^*, \omega$) de l'expression (A6.4) comme dans la fig.A6.2. Dans l'éq. (A1.8) les pôles vont produire les exponentielles

$$\left. \begin{aligned} \exp(-i\omega_1 t) &= \exp(-\delta t) \exp(-i\omega_0 t), \\ \exp(+i\omega_1^* t) &= \exp(-\delta t) \exp(+i\omega_0 t), \\ \exp(-i\Omega t) & \end{aligned} \right\} \quad (\text{A6.7})$$

On voit que les oscillations propres disparaissent avec $\exp(-\delta t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$ et ce qui reste dans cette limite sont les oscillations forcées $\propto \exp(-i\Omega t)$.

Si on ne s'intéresse qu'à ces dernières on peut tout aussi bien utiliser le formalisme des transformées de Fourier sur l'espace du temps complet, $-\infty < t < \infty$. On argumente alors que l'expérience a commencé quelque part dans le passé assez lointain de façon à ce que seules les oscillations forcées aient pu survivre jusqu'aux moments auxquels on s'intéresse. Formellement, cela veut dire que l'on suppose que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} V(t) = 0, \quad (\text{A6.8})$$

mais que $V(t) \propto \exp(-i\Omega t)$ pour des temps finis et dans la limite $t \rightarrow \infty$. A partir de là, l'argumentation suit celle de la transformée de Laplace : pour que

$$\hat{V}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t) \exp(i\omega t) \quad (\text{A6.9})$$

existe, il faut que ω ait une partie imaginaire positive (ici, elle peut être infiniment petite) que l'on écrit souvent explicitement

$$\hat{V}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t) \exp[i(\omega + i\eta)t], \quad \eta > 0. \quad (\text{A6.10})$$

La transformée de la charge prend alors la forme,

$$Q(\omega) = \frac{iV_0}{(\omega + i\eta - \omega_1)(\omega + i\eta + \omega_1^*)(\omega + i\eta - \Omega)} \quad (\text{A6.11})$$

au lieu de (A6.4) dont le premier terme se réfère aux valeurs initiales et n'apparaît pas ici. La transformation inverse

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} Q(\omega) \exp(-i\omega t) \quad (\text{A6.12})$$

suit l'axe réel ; tous les trois pôles sont situés dans le plan inférieur de ω : $\omega_1 - i\eta$, $-\omega_1^* - i\eta$ et $\Omega - i\eta$. C'est précisément le rôle de η d'assurer ceci. Comme les pôles ω_1 et $-\omega_1^*$ se situent de toute façon au-dessous de l'axe réel, on peut oublier les contributions infiniment petites $i\eta$ dans les parenthèses en question. Par contre, il est essentiel d'écrire

$$\frac{1}{\omega - (\Omega - i\eta)} \quad (\text{A6.13})$$

pour le pôle correspondant à la source externe.

Les méthodes, Laplace et Fourier, se confondent à partir d'ici et on obtient les mêmes résultats pour les oscillations forcées.

Si le circuit électrique devait contenir des éléments actifs qui pourraient donner lieu à des instabilités ou si on décidait de l'exciter avec un signal croissant du type

$$e^{\gamma t} \sin(\Omega t), \quad \text{avec } \gamma > 0$$

il est crucial de se souvenir de la philosophie Laplace : la partie imaginaire de ω doit être suffisamment grande pour assurer l'existence de la transformée ou, au retour, le bon emplacement du parcours d'intégration.

A7.**Résolution d'une équation d'onde linéaire**

Pour bien comprendre ce qu'est une relation de dispersion, il est utile de résoudre une équation simple en utilisant différentes approches.

Soit l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - q \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{A7.1})$$

dont on cherche une ou plusieurs solutions. Si q ne dépend pas de x il est judicieux d'utiliser la méthode des transformées de Fourier en x . Dans un domaine $-L/2 \leq x \leq L/2$, on cherche alors des solutions périodiques de la forme

$$U(x, t) = u_k(t) \exp(ikx). \quad (\text{A7.2})$$

Le vecteur k prend des valeurs discrètes si L est fini. Le problème (A7.1) se réduit alors à

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} + qk^2 u_k(t) = 0. \quad (\text{A7.3})$$

Si q ne dépend pas non plus de t les méthodes de Fourier ou de Laplace permettent à nouveau de trouver la solution. Ecrivant $u_k(t)$ sous la forme

$$u_k(t) = u_{k0} \exp(-i\omega t), \quad (\text{A7.4})$$

on se ramène à

$$(qk^2 - \omega^2)u_{k0} = 0. \quad (\text{A7.5})$$

C'est un problème à valeur propre particulièrement simple : Il existe un "vecteur" propre $u_{k0} \neq 0$ associé à une valeur propre nulle :

$$qk^2 - \omega^2 = 0. \quad (\text{A7.6})$$

Cette dernière relation porte le nom de *relation de dispersion* de l'onde. Comme il s'agit en fait de deux ondes distinctes — l'une se propageant vers la droite et l'autre vers la gauche si $q > 0$ — il est souvent prudent de noter leur dépendance en k d'une façon explicite

$$\omega = \begin{cases} \omega_k^{(+)} \equiv +\sqrt{q}k \\ \omega_k^{(-)} \equiv -\sqrt{q}k \end{cases} \quad (\text{A7.7})$$

Dans cette notation il est évident que $\omega_k^{(+)}$ et $\omega_k^{(-)}$ doivent changer de signe quand k change de signe pour garder leur propriété de modes droits et gauches dans les deux relations de dispersions (A7.7).

Ceci est l'approche mathématique. Celle du physicien expérimentateur est différente. Il excite (p.ex. avec une antenne) l'onde (ou les ondes) avec un courant périodique à la fréquence Ω et étudie ce qui se passe (p. ex. en mesurant l'amplitude de l'onde dans la "cavité" L). Mathématiquement ce problème se s'écrit comme l'éq. (A7.1) à laquelle on ajoute un terme source représentant l'antenne :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - q \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = s(x) \exp(-i\Omega t). \quad (\text{A7.8})$$

Prenant $s(x)$ de la forme

$$s(x) = s_0 \delta(x) \quad (\text{A7.9})$$

on trouve après une transformation dans l'espace k

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} + qk^2 u_k(t) = s_0 \exp(-i\Omega t). \quad (\text{A7.10})$$

La solution qui dans le temps se comporte comme la source est de la forme

$$u_k(t) = u_{k0} \exp(-i\Omega t), \quad (A7.11)$$

donc

$$u_{k0} = \frac{s_0}{qk^2 - \Omega^2} = \frac{-s_0}{\left(\Omega - \omega_k^{(+)}\right) \left(\Omega - \omega_k^{(-)}\right)}. \quad (A7.12)$$

On observe que l'onde qui a pour longueur d'onde $\lambda = 2\pi/|k|$ peut avoir une amplitude finie avec une excitation s_0 infiniment petit si la fréquence d'excitation Ω — que l'expérimentateur comprend toujours comme une quantité positive — satisfait la relation

$$\Omega \approx |\sqrt{q}k| = |\omega_k^{\pm}|,$$

c'est-à-dire quand on excite les modes propres. Il apparaît alors clairement pourquoi la relation de dispersion (A7.6) se retrouve dans le dénominateur de l'expression pour l'amplitude excitée par une source externe au système.

Remarque Dans le cas où $q < 0$ le dénominateur ne peut pas devenir nul.