

Physique Nucléaire

PHYS-342

Prof. Olivier Schneider

Transparents du cours optionnel du semestre d'automne 2024
à l'intention des étudiants de troisième année en section de physique

Décembre 2024

Bienvenue au cours de ...

Physique Nucléaire

Prof. Olivier Schneider

Laboratoire de physique des hautes énergies

Site web du cours:

<https://moodle.epfl.ch/user/index.php?id=18593>

OS, 11 septembre 2024

1



OS, 11 septembre 2024

2

Contenu du cours

- Introduction
- Modèles simples du noyau
 - formule semi-empirique de la masse
 - gaz de Fermi
 - instabilités nucléaires
- Nature des forces nucléaires
 - deuton, isospin
- Parité
- Modèles à particules indépendantes
- Modèle en couches
 - interaction spin-orbite
 - propriétés des noyaux (spin, propriétés électromagnétiques, ...)
- Réactions nucléaires
 - théorie quantique de la diffusion
 - développement en ondes partielles, résonances

OS, 11 septembre 2024

3

Organisation

• Horaire

Semaine	Mercredi 13:15–15:00			Mercredi 15:15–17:00		
1	11.09.2024	cours	CE1 105			
2	18.09.2024	cours	CE1 105	18.09.2024	exercices	CM1 121
3	25.09.2024	cours	CE1 105			
4	02.10.2024	cours	CE1 105	02.10.2024	exercices	CM1 121
5	09.10.2024	cours	CE1 105			
6	16.10.2024	cours	CE1 105	16.10.2024	exercices	CM1 121
Interruption						
7	30.10.2024	cours	CE1 105			
8	06.11.2024	cours	CE1 105	06.11.2024	exercices	CM1 121
9	13.11.2024	cours	CE1 105			
10	20.11.2024	cours	CE1 105	20.11.2024	exercices	CM1 121
11	27.11.2024	cours	CE1 105			
12	04.12.2024	cours	CE1 105	04.12.2024	exercices	CM1 121
13	11.12.2024	cours	CE1 105			
14	18.12.2024	cours	CE1 105	18.12.2024	exercices	CM1 121

– assistants: **Rita Silva, Pierre Mayencourt, Eliot Bornand**

- Toutes les infos toujours à jour sur le site Moodle:
 - <https://moodle.epfl.ch/user/index.php?id=18593>
 - + forum de questions/réponses sur le cours et les exercices

OS, 11 septembre 2024

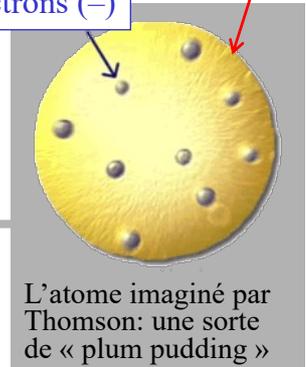
4

Vers la découverte du noyau des atomes

- 1895: découverte des rayons X (Roentgen)
- 1896: découverte de la radioactivité (Becquerel)
- 1897: découverte de l'électron (Thomson)
- 1900: trois types différents de radioactivité connus: α , β , γ
- 1902: radioactivité $\beta \equiv$ émission d'électrons (Kaufman)
- 1903: premier modèle de l'atome (Thomson)
- 1908: radioactivité $\alpha \equiv$ émission d'hélium (Rutherford)
- 1909: expérience de diffusion de particules α sur des feuilles d'or (Rutherford, Marsden, Geiger), menant à des observations incompatibles avec le modèle de Thomson !
- 1911: vision révolutionnaire de l'atome (Rutherford)

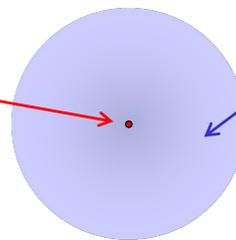
boule uniformément chargée (+), $\sim 10^{-10}$ m

électrons (-)



L'atome imaginé par Thomson: une sorte de « plum pudding »

noyau (+) très petit, $\sim 10^{-14}$ m au plus, portant plus de 99.9% de la masse de l'atome

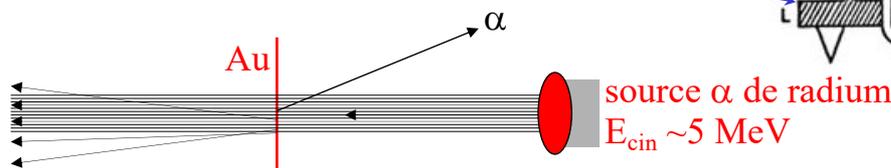


nuage d'électrons (-), $\sim 10^{-10}$ m

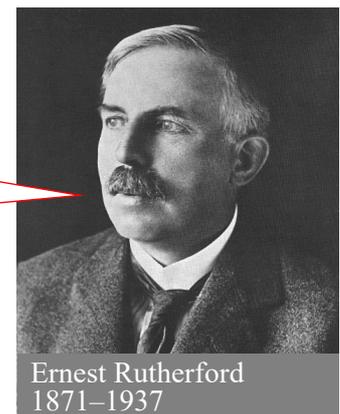
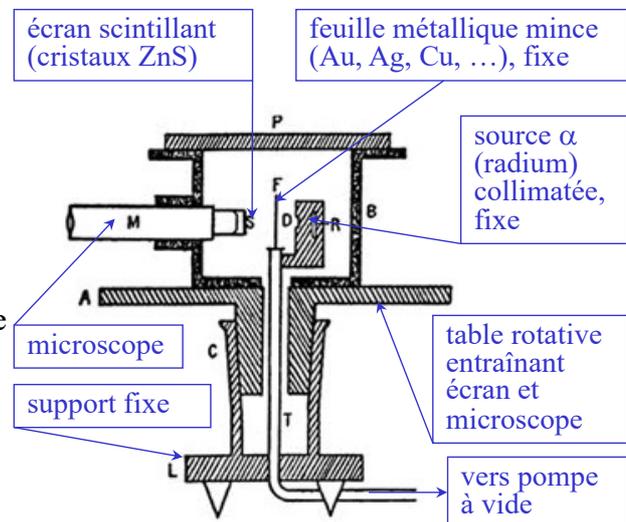
L'atome contient donc essentiellement du « vide »

Rétrodiffusion de Rutherford

- Résultats:
 - La plupart du temps la particule α n'est que très peu déviée en traversant la feuille (voire pas du tout)
 - Elle a pourtant une probabilité non nulle de rebondir vers l'arrière !



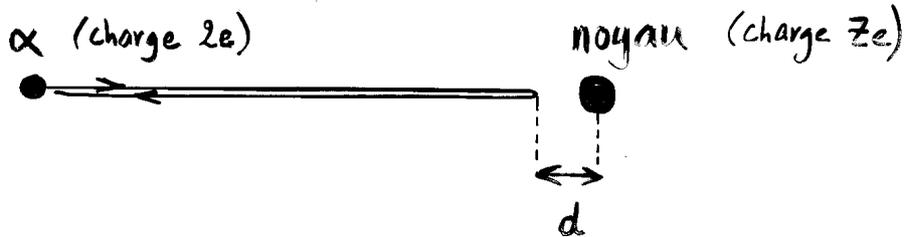
It was quite the most incredible event that has ever happened in my life. It was as incredible as if you fired a 15-inch shell on a piece of tissue paper and it came back and hit you



- Conclusion:
 - présence dans la matière de très petits objets chargés plus massifs que les particules α , donc autres que les électrons ($m_\alpha \sim 8000 m_e$): les noyaux atomiques !

Limite supérieure à la taille des noyaux (Rutherford)

Cas d'une diffusion à 180°
(paramètre d'impact nul)



vitesse v

$$E_{tot} = E_{cin} = \frac{1}{2} m v^2$$

vitesse = 0

$$E_{tot} = E_{pot} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

Conservation énergie:

$$d = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E_{cin}} = 2Z \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \cdot \frac{\hbar c}{E_{cin}} \sim 2Z \cdot \frac{1}{137} \cdot \frac{197 \text{ MeV fm}}{5 \text{ MeV}} \approx 0.575 Z \text{ fm}$$

Constantes et unités

à savoir
par coeur

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

constante de structure fine

$$\hbar c \approx 197 \text{ MeV fm}$$

constante de Plank réduite

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$$

Fermi (= femtomètre)

$$m_p c^2 \approx 938 \text{ MeV}$$

masse du proton

$$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

électron-volt

$$m_e c^2 \approx 0.511 \text{ MeV}$$

masse de l'électron

$$1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV}$$

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$$

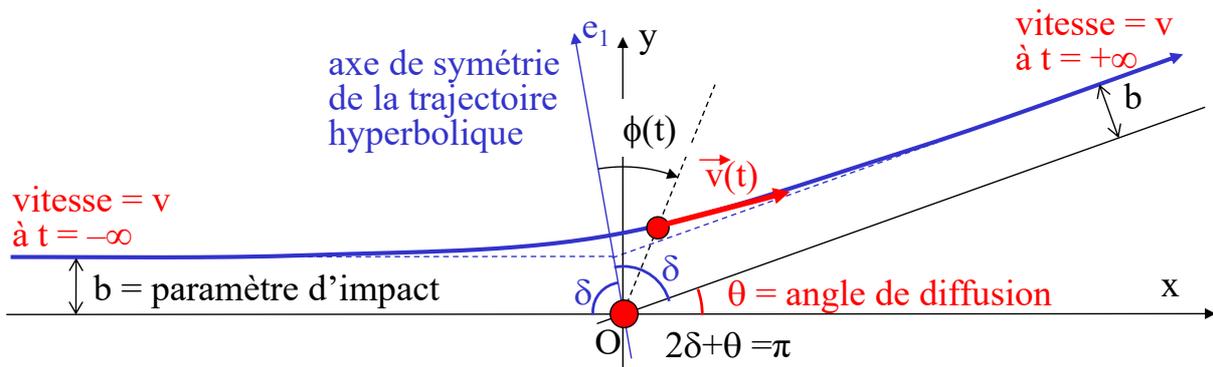
$$1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$$

$$1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$$

Diffusion élastique de Rutherford

- Diffusion coulombienne élastique de deux charges ponctuelles**

- projectile (particule α) = charge ponctuelle ze , de masse m et vitesse v
- cible (noyau) = charge ponctuelle Ze , sans recul (masse infinie)
- diffusion élastique (pas d'excitation du projectile ou de la cible)
- mécanique classique (non-relativiste)
- seule force en jeu = force de Coulomb = $(zZe^2)/(4\pi\epsilon_0 r^2)$
 - force centrale \rightarrow conservation du moment cinétique (par rapport au noyau)
 - force conservative \rightarrow conservation de l'énergie mécanique



OS, 11 septembre 2024

9

Diffusion élastique de Rutherford

- Section efficace différentielle de diffusion coulombienne élastique de deux charges ponctuelles**
(\propto probabilité de déviation du projectile d'un angle θ)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{16\pi\epsilon_0 E_{\text{cin}}} \cdot \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \right)^2$$

Formule de Rutherford

voir exercices

- ze = charge du projectile ($z=2$ pour une particule α)
- Ze = charge de la cible (noyau)
- θ = angle de diffusion
- $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} mv^2$

Pour tenir compte du recul du noyau:

m = masse réduite

v = vitesse relative

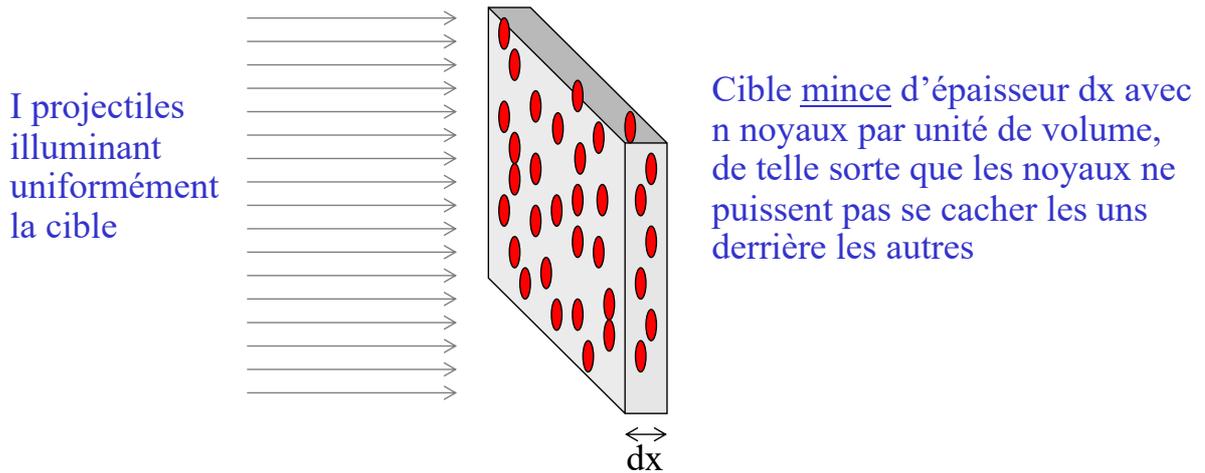
θ = angle de diffusion dans le centre de masse

- Dépendances en $1/\sin^4(\theta/2)$ et en $\sim(\text{masse atomique})^2$ vérifiées expérimentalement par Geiger et Mardsen
 - mais déviations observées pour des cibles de petits Z (avec $d \lesssim 4$ fm) ...

OS, 11 septembre 2024

10

Section efficace totale



- Nombre d'interactions $-dI$ (>0) dans la cible proportionnel à I , n , dx
 - Section efficace totale $\sigma_{\text{tot}} = \frac{-dI}{I n dx}$
 - Probabilité d'interaction $\text{prob} = \frac{-dI}{I} = \sigma_{\text{tot}} n dx$
- σ_{tot} a la dimension d'une aire (1 barn = 10^{-28} m²)
- σ_{tot} = probabilité d'interaction d'un projectile sur une cible contenant un noyau par unité de surface

Sections efficaces partielles

- Plusieurs réactions possibles
 - $p + C \rightarrow a_1 + R_1$ réaction 1 élastique avec $a_1=p$ et $R_1=C$
 - $p + C \rightarrow a_2 + R_2$ réaction 2 inélastique
 - $p + C \rightarrow a_3 + R_3$ réaction 3 inélastique
 - ...
- Section efficace partielle σ_i = probabilité de produire la réaction i au moyen d'un projectile sur une cible contenant un noyau par unité de surface

• On a $\sigma_{\text{tot}} = \sum_i^n \sigma_i$

– en particulier $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{élastique}} + \sigma_{\text{inélastique}}$

Section efficace différentielle

- Réaction i: $p + C \rightarrow a_i + R_i$

$$d\sigma_i = \left\{ \begin{array}{l} \text{prob. de produire la réaction i avec un projectile sur} \\ \text{une cible contenant un noyau par unité de surface} \\ \\ \text{et} \\ \\ \text{que la particule } a_i \text{ soit émise dans l'angle solide } d\Omega \end{array} \right.$$

- Section efficace différentielle

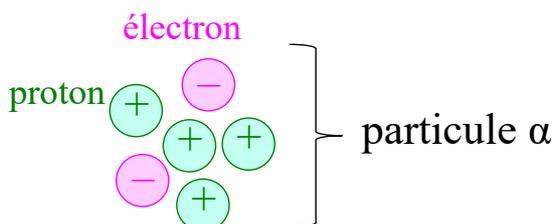
$$\frac{d\sigma_i}{d\Omega} = \text{fonction de } \theta \text{ et } \varphi$$

ne dépend que de θ
si p et C sont non polarisés

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{d\sigma_i}{d\Omega} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \sigma_i$$

Premier modèle du noyau

- “The nucleus, though of minute dimensions, is in itself a very complex system consisting of positively and negatively charged bodies, bound closely together by intense electrical forces”
E. Rutherford, Scientia 16 (1914) 337
- “It is anticipated that the helium nucleus (i.e. the α particle) contains four positive electrons (H particles) and two negative”
E. Rutherford, Phil. Mag. 27 (1914) 488



Pour un noyau (Z, A):
A protons et A-Z électrons

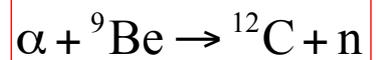
→ modèle simple, “évident”, expliquant la désintégration β

Découverte du neutron

- “I think we shall have to make a real search for the neutron”

Chadwick à Rutherford en 1924

- dès 1920: idée de l’existence du “neutron”, comme un état très lié d’électron et d’une particule H (Rutherford)
- 1930: Bothe et Becker découvrent une “nouvelle radiation” (α du Po sur Be)
- janvier 1932: les Joliot-Curie observent que cette radiation éjecte des protons de la paraffine
- février 1932: Chadwick montre qu’elle est formée de particules neutres de même masse que le proton



- “The neutron may be pictured as a small dipole, or perhaps better, as a proton embedded in an electron”

Chadwick, avril 1932

Une conception moderne du noyau

- “The Attractions of Gravity, Magnetism, and Electricity, reach to very sensible distances, and so have been observed by vulgar Eyes, and there may be others which reach to so small distances as hitherto escape Observation”

Isaac Newton (1642–1727)

- Noyau de nombre de masse A: Z protons + (A–Z) neutrons
- Pour décrire ce noyau, deux nouvelles interactions:
 - **interaction nucléaire forte, pour assurer la cohésion**
 - **interaction nucléaire faible, pour expliquer la désintégration β**
- Les noyaux (comme les protons et neutrons) sont très petits, 1–6 fm
 - décrits par la mécanique quantique

Sondes

- Aujourd'hui comme au temps de Rutherford

étude expérimentale d'un petit objet
=
étude de collisions entre un projectile et cet objet

- Condition sur la longueur d'onde de De Broglie du projectile

$$\lambda = h/p \approx \text{dimension objet à étudier}$$

- Projectiles (sondes) les plus énergétiques:

Accélérateur	Projectiles	Energie de faisceau	λ
LEP 2 @ CERN	e^-, e^+	~ 100 GeV	$\sim 10^{-17}$ m
Tevatron @ Fermilab	p, \bar{p}	~ 900 GeV	$\sim 10^{-18}$ m
LHC @ CERN, 2024	p	6.8 TeV	$\sim 10^{-19}$ m

Large Hadron Collider (2009–2041 ?)



Dimensions et énergies (échelles)

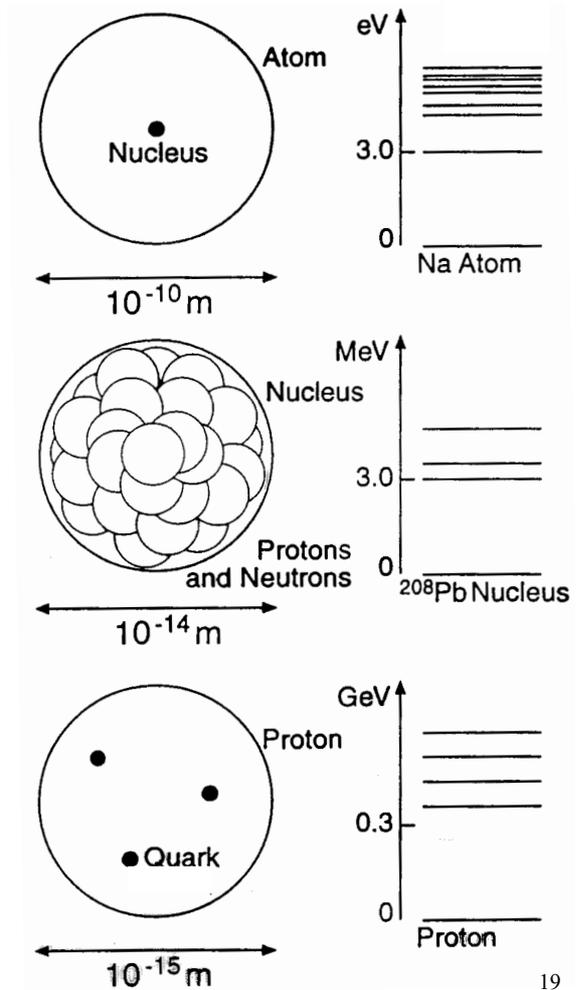
à savoir
par coeur

Les électrons et les quarks ont une taille $< 10^{-19}$ m et sont considérés comme des constituants fondamentaux de la matière

Atome
(forces é.m.)
 $\text{Å} = 10^{-10}$ m
eV

Noyau
(forces nucléaires)
 10^{-14} m
MeV

Nucléon
(forces de couleur)
fm = 10^{-15} m
GeV

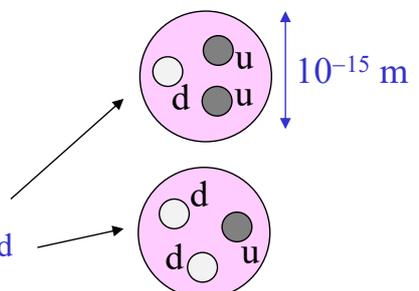


Constituants fondamentaux de la matière (fermions de spin $1/2$)

- Toute la matière connue est formée de combinaisons de 6 leptons et 6 quarks
- Pour chacune de ces 12 particules, il existe une anti-particule de charge électrique opposée (anti-matière)
- Ces constituants élémentaires n'ont pas de structure connue

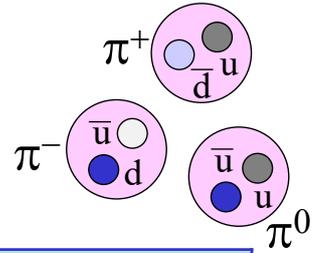
				Charge électrique [e]	Charge de couleur
Leptons	électron e	muon μ	tau τ	-1	non
	neutrino ν_e	neutrino ν_μ	neutrino ν_τ	0	
Quarks	up u	charm c	top t	+2/3	oui
	down d	strange s	bottom b	-1/3	

- La matière courante (stable) est formée seulement de trois types de particules élémentaires: e, u, d
 - Chaque atome contient des électrons et un noyau
 - Les noyau est fait de protons et de neutrons
 - Un proton est une combinaison de quarks u, u et d
 - Un neutron est une combinaison de quarks u, d et d



Particules-forces

- Les forces entre particules de matière et d'antimatière s'exercent par l'échange de particules-forces (bosons de spin entier)



Modèle Standard de la physique des particules

Interaction	Bosons d'échange	Particules sensibles
Force de couleur [→ force forte]	8 gluons [mésons π]	seulement quarks & gluons [neutrons, protons, ...]
Electromagnétisme	photon γ	particules chargées électriquement
Force faible	W^+, W^-, Z^0	toutes
Interaction de Higgs	H	particules massives
Gravitation	graviton	toutes

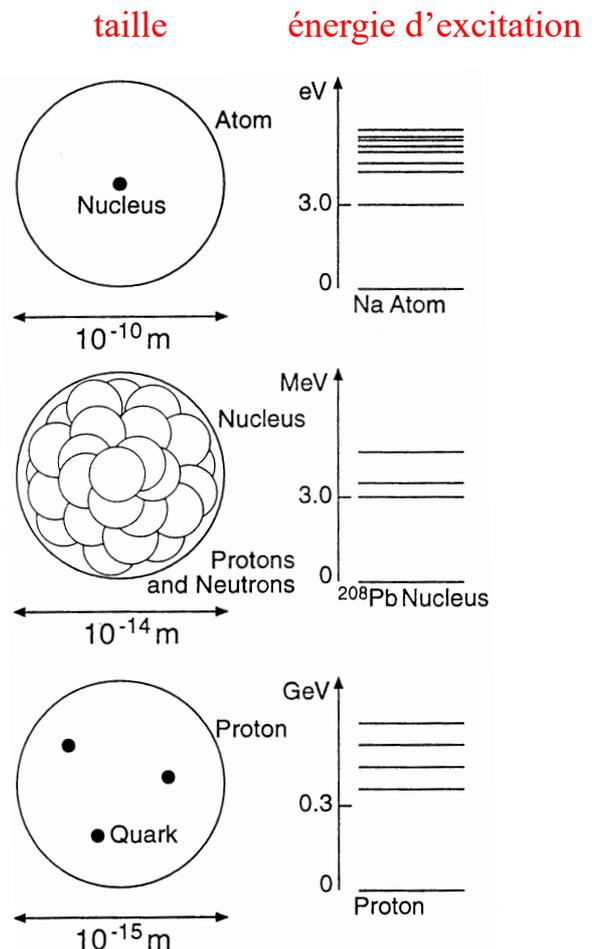
- Bosons W et Z découverts en 1983
- Boson de Higgs découvert en 2012
- Ondes gravitationnelles découvertes en 2016

OS, 11 septembre 2024

21

Structures ...

- Physique atomique:**
 - force électromagnétique
 - atomes formés d'un noyau et d'électrons
 - Ångström, eV
- Physique nucléaire:**
 - force nucléaire forte
 - noyaux formés de nucléons
 - ~10 fm, MeV
- Physique des particules élémentaires:**
 - force de couleur
 - hadrons formés de quarks
 - fm, GeV



OS, 18 septembre 2024

22

Nucléon (= proton ou neutron)

- **Le nucléon a un spin $s = 1/2$**
 - Espace des états de spin de dimension $2s+1 = 2$
 - Base de l'espace des états de spin $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$
formée d'états propres de \vec{s}^2 et s_z

$$\begin{aligned} \vec{s}^2 |\uparrow\rangle &= s(s+1)\hbar^2 |\uparrow\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |\uparrow\rangle & s_z |\uparrow\rangle &= +\frac{1}{2}\hbar |\uparrow\rangle \\ \vec{s}^2 |\downarrow\rangle &= s(s+1)\hbar^2 |\downarrow\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |\downarrow\rangle & s_z |\downarrow\rangle &= -\frac{1}{2}\hbar |\downarrow\rangle \end{aligned}$$

- **Le nucléon est un fermion**
 - il obéit à la statistique de Fermi-Dirac, et donc au principe d'exclusion de Pauli

En mécanique quantique, deux particules identiques sont indistinguables. **L'état quantique d'un système de deux particules identiques doit être soit antisymétrique (cas des fermions) soit symétrique (cas des bosons) sous l'échange des deux particules.**

Système de deux nucléons de spin $1/2$

- Base de l'espace de états de spin de dim. 4: $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$
 - pas états propres du spin total $\boxed{\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2}$
- **Nouvelle base d'états propres du spin total:** $\{ |S; M_S\rangle \}$, $S = 0, 1$, $-S \leq M_S \leq S$
 $M_S =$ valeur propre de S_z/\hbar

$ 0; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\rangle)$	état singulet $S=0$, antisymétrique
$ 1; +1\rangle = \uparrow\uparrow\rangle$	triplet d'états $S=1$, symétriques sous l'échange des deux nucléons
$ 1; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\rangle + \downarrow\uparrow\rangle)$	
$ 1; -1\rangle = \downarrow\downarrow\rangle$	

Si l'état de mouvement est symétrique ($\ell=0$)

- un système pp ou nn (fermions identiques) doit être dans un état antisymétrique, donc avoir $S=0$ ($S=1$ interdit)
- un système pn (fermions différents) peut avoir $S=0$ ou $S=1$

Interaction nucléon-nucléon: faits d'expérience

- Deuteron:



le seul système lié de deux nucléons est le système pn dans l'état $S=1$ et $\ell=0$

⇒

le force entre un proton et un neutron dépend du spin

- **Indépendance de charge des forces nucléaires:**

- si les deux nucléons sont dans le même état de mouvement relatif et de spin total, et si on ignore les forces de Coulomb, alors

force entre p et p = force entre n et n = force entre p et n

- de plus:

$m_p \simeq m_n$

⇒

Le proton et le neutron sont très semblables; ils seraient indiscernables si la seule force en jeu était la force nucléaire forte

la force é.m. "lève la dégénérescence"

Isospin du nucléon

- **Le nucléon a un isospin $I = 1/2$**

- Le nucléon a $2I+1 = 2$ états de charge possible

- état proton $|p\rangle$
 - état neutron $|n\rangle$
- } "doublet d'isospin"

- Espace des états d'isospin de dimension $2I+1 = 2$

- Base de l'espace des états d'isospin $\{|p\rangle, |n\rangle\}$
formée d'états propres de \vec{I}^2 et I_3

$$\begin{aligned} \vec{I}^2 |p\rangle &= I(I+1) |p\rangle = \frac{3}{4} |p\rangle & I_3 |p\rangle &= +\frac{1}{2} |p\rangle \\ \vec{I}^2 |n\rangle &= I(I+1) |n\rangle = \frac{3}{4} |n\rangle & I_3 |n\rangle &= -\frac{1}{2} |n\rangle \end{aligned}$$

} même formalisme que le spin

- opérateur de charge pour le nucléon: $Q = I_3 + 1/2$

$$\begin{aligned} Q |p\rangle &= +1 |p\rangle & \text{valeur propre } +1 \\ Q |n\rangle &= 0 |n\rangle & \text{valeur propre } 0 \end{aligned}$$

Composition de deux isospins $\frac{1}{2}$

- Même formalisme que pour la compositions de deux spins $\frac{1}{2}$

- Isospin total:

$$\vec{I} = \vec{I}^{(1)} + \vec{I}^{(2)}$$

- Les états propres de \vec{I}^2 et I_3 forment une base de l'espace des états d'isospin

$$\{|I; M_I\rangle\}, \quad I = 0, 1, \quad -I \leq M_I \leq I$$

M_I = valeur propre de I_3

$$|0; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle - |np\rangle)$$

état singulet $I=0$, antisymétrique

$$|1; +1\rangle = |pp\rangle$$

$$|1; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle + |np\rangle)$$

triplet d'états $I=1$, symétriques
sous l'échange des deux nucléons

$$|1; -1\rangle = |nn\rangle$$

Système de deux nucléons

- Etat de spin $|S; M_S\rangle$, avec $S = 0$ ou 1
- Etat d'isospin $|I; M_I\rangle$, avec $I = 0$ ou 1
- Etat de mouvement relatif $|\psi\rangle$

- L'état complet $|\psi\rangle \otimes |S; M_S\rangle \otimes |I; M_I\rangle$ doit être antisymétrique pour des fermions

– Cas $\ell=0$ ($|\psi\rangle$ symétrique): 6 états internes possibles

$$\underbrace{|S=0; M_S=0\rangle}_{\text{antisym.}} \otimes \underbrace{|I=1; M_I\rangle}_{\text{sym.}} \quad \left\{ \begin{array}{l} |0;0\rangle \otimes |1;+1\rangle \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \otimes |pp\rangle \\ |0;0\rangle \otimes |1;0\rangle \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle + |np\rangle) \\ |0;0\rangle \otimes |1;-1\rangle \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \otimes |nn\rangle \end{array} \right.$$

$$\underbrace{|S=1; M_S\rangle}_{\text{sym.}} \otimes \underbrace{|I=0; M_I=0\rangle}_{\text{antisym.}} \quad \left\{ \begin{array}{l} |1;+1\rangle \otimes |0;0\rangle \quad |\uparrow\uparrow\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle - |np\rangle) \\ |1;0\rangle \otimes |0;0\rangle \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle - |np\rangle) \\ |1;-1\rangle \otimes |0;0\rangle \quad |\downarrow\downarrow\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle - |np\rangle) \end{array} \right.$$

Interaction forte et isospin

- Interaction dépend de l'isospin total

- état lié pn, avec $\ell=0$ et $S=1 \Rightarrow I=0$
- états pp et nn ont nécessairement $I=1$ puisque $I_3 = \pm 1$;
or pp ou nn n'est pas un état lié

Système avec $\ell=0$	I	M_I	S	
pp	1	+1	0	même force entre les deux nucléons
pn	1	0	0	
nn	1	-1	0	
pn (deuton)	0	0	1	force différente

Les forces nucléaires:

- peuvent dépendre de I
- sont indépendentes de M_I
- conservent l'isospin

indépendance de charge

invariance par rotation dans l'espace d'isospin (ou espace de charge)

$\Leftrightarrow \vec{I}$ conservé

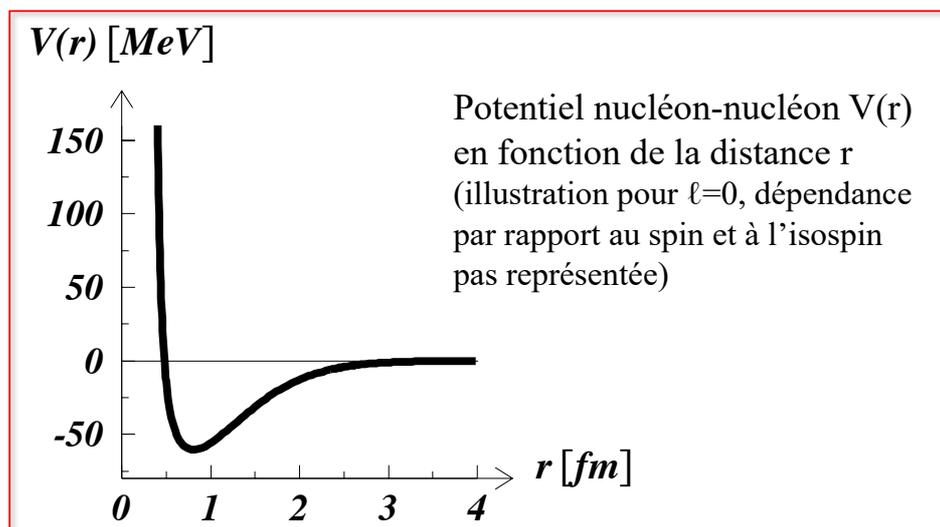
$\Leftrightarrow [H, I_1] = [H, I_2] = [H, I_3] = 0$

NB: les forces é.m et faible ne conservent pas (violent) l'isospin !

Force forte entre deux nucléons

- Force nucléaire forte:

- globalement attractive, avec portée jusqu'à ~ 2 fm
- très fortement répulsive en deça de ~ 0.4 fm
 - incompressibilité de la matière nucléaire
- dépend du spin total et de l'isospin total



Force forte entre deux nucléons (suite)

- Forme générale du potentiel entre deux nucléons, sur la base d'arguments de symétrie et d'invariance:

$$\begin{aligned} V^{(I)}(\vec{r}, \vec{p}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = & V_0^{(I)}(r) \\ & + V_{ss}^{(I)}(r) \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 / \hbar^2 \\ & + V_{\text{tens}}^{(I)}(r) \left[3(\vec{s}_1 \cdot \vec{r})(\vec{s}_2 \cdot \vec{r}) / r^2 - \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \right] / \hbar^2 \\ & + V_{\ell S}^{(I)}(r) (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \cdot \vec{\ell} / \hbar^2 \\ & + V_{\ell s}^{(I)}(r) (\vec{s}_1 \cdot \vec{\ell})(\vec{s}_2 \cdot \vec{\ell}) / \hbar^4 \\ & + V_{ps}^{(I)}(r) (\vec{s}_1 \cdot \vec{p})(\vec{s}_2 \cdot \vec{p}) / (\hbar mc)^2 \end{aligned}$$

I = isospin total

\vec{r} = position relative

\vec{p} = quantité de mouvement relative

$\vec{\ell}$ = $\vec{r} \wedge \vec{p}$ = moment cinétique relatif

\vec{s}_i = spin du nucléon i

OS, 18 septembre 2024

31

Description du noyau

noyau = Z protons + N neutrons = A nucléons

Notation: $\boxed{{}_Z^A X_N}$ ou bien $\boxed{{}^A X}$ où X = symbole chimique

Chaque « espèce nucléaire » (ou noyau) est définie par Z et A

Hypothèses:

- ① la structure des nucléons (quarks) peut être ignorée
 - valable si $E(\text{noyau}) \ll E(\text{nucléon})$
où E = énergie en jeu (liaison, excitation, ...)
- ② le mouvement des nucléons dans le noyau est non-relativiste
 - valable si $\beta(\text{nucléon}) \ll 1$
où βc = vitesse

OS, 18 septembre 2024

32

Tableau des isotopes

- « tableau de Mendeleev » de la physique nucléaire
 - nombreux isotopes
 - ~260 isotopes stables

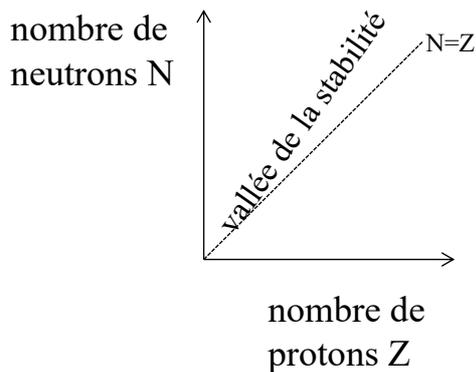
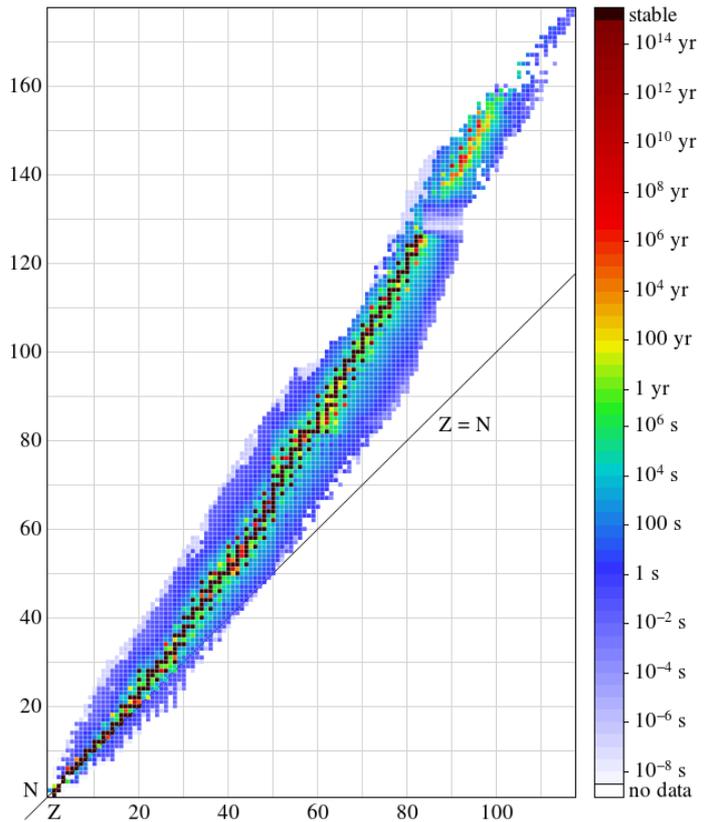


tableau interactif
<http://www.nndc.bnl.gov/nudat3/>



OS, 18 septembre 2024

33

Description du noyau (suite)

A résoudre

- système quantique non-relativiste de A nucléons en interaction mutuelle

Il suffit de:

- ① déterminer l'hamiltonien
- ② résoudre l'équation de Schrödinger
- ③ tenir compte du principe d'exclusion (Pauli)

Obstacles:

- interaction forte encore mal connue
- problème à A corps non soluble analytiquement si $A > 3$

→ on doit faire des approximations
et introduire des paramètres empiriques

OS, 18 septembre 2024

34

Modèles nucléaires ...

- ... de la goutte liquide
- ... du gaz de Fermi
- ... à particules indépendantes
- ... en couches
- ... collectifs

But:

- Prédiction des propriétés des noyaux \longrightarrow élaboration
avec un minimum de paramètres empiriques
- Confrontation avec l'expérience \longrightarrow justification

masse, énergie de liaison, stabilité, spin-parité,
moment magnétique dipolaire,
moment électrique quadrupolaire
niveaux excités (énergie, spin-parité, durée de vie ...)

OS, 18 septembre 2024

35

Distribution de charge dans les noyaux

mesurée par
diffusion d'électrons
 $E \sim 200\text{--}500$ MeV
(interaction é.m.)

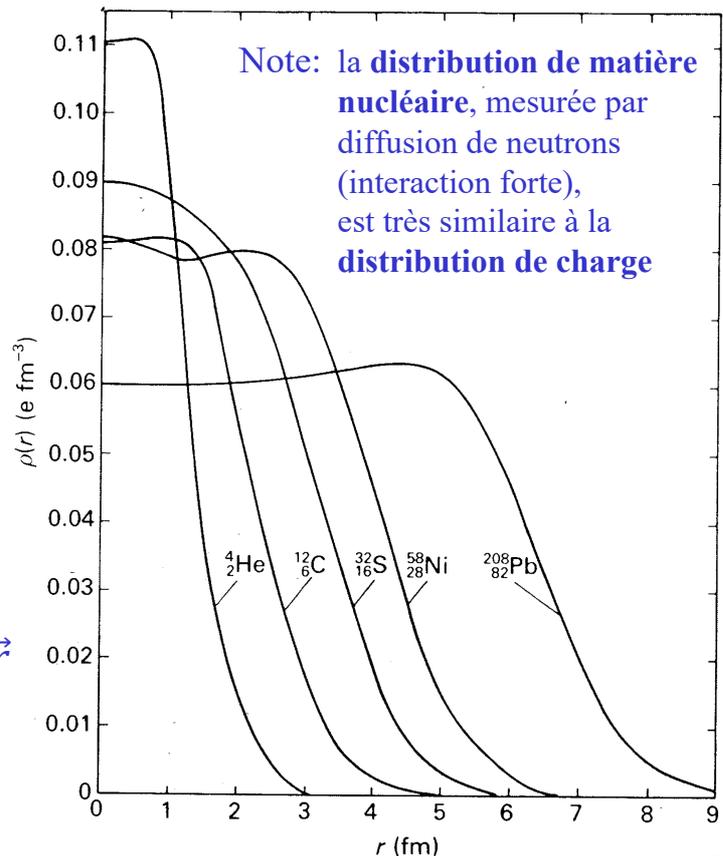
Effet d'une distribution de charge $\rho(\vec{r})$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow |F(q^2)|^2 \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

avec facteur de forme

$$F(q^2) = \frac{1}{Ze} \iiint \rho(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} d^3\vec{r}$$

où q = impulsion transférée



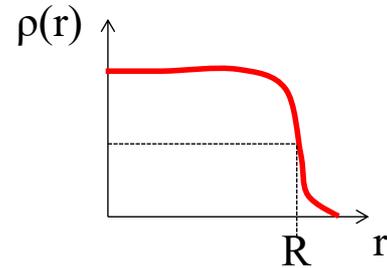
OS, 18 septembre 2024

36

Taille des noyaux

- Relation empirique déduite des expériences de diffusion

$$R \approx r_0 A^{1/3} \quad \text{où } r_0 = 1.2 \text{ fm}$$



- Volume du noyau (supposé sphérique): $\Omega = \frac{4}{3} \pi R^3 \approx \frac{4}{3} \pi r_0^3 A$
- Densité nucléaire à l'intérieur du noyau:

$$\rho = \frac{A}{\Omega} \approx \frac{1}{\frac{4}{3} \pi r_0^3} = 0.138 \text{ nucléons / fm}^3 = 1.38 \times 10^{38} \text{ nucléons / cm}^3$$

Volume proportionnel à A
 Densité similaire pour tous les noyaux !

Relativité restreinte (rappels)

	Re lativité restreinte	$\xrightarrow{v/c \ll 1}$	Mécanique newtonienne
Postulats	$c = \text{constante}$ $(c\Delta t)^2 - (\overline{\Delta x})^2$ invariant		temps et espace absolus Δt et $ \overline{\Delta x} $ invariants
Grandeurs physiques	$\vec{\beta} = \vec{v}/c, \quad \gamma = (1 - \vec{\beta}^2)^{-1/2}$ $\vec{p} = m\gamma\vec{\beta}c$ $T = mc^2(\gamma - 1)$ $E = mc^2 + T = m\gamma c^2$ $\vec{\beta} = \vec{p}c/E$ $E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$	\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow	$\vec{p} = m\vec{v}$ $T = \frac{1}{2} m v^2$ $E = E^{\text{interne}} + \frac{1}{2} m v^2$ $v = 2T/p$ $T = \vec{p}^2 / (2m)$
Lois physiques	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ conservation de \vec{p} conservation de E		$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ conservation de \vec{p} conservation de E

Relativité restreinte (rappels)

- Energie potentielle de masse (Einstein, 1905): $E_{\text{masse}} = mc^2$
- Energie totale: $E = T + E_{\text{masse}} = mc^2(\gamma - 1) + mc^2 \Rightarrow E = \gamma mc^2$
- Vitesse d'une particule: $p = \gamma m \beta c$ et $E = \gamma mc^2 \Rightarrow \beta = \frac{pc}{E}$
- Relation entre énergie, quantité de mouvement et masse:

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow E^2 - E^2 \beta^2 = \frac{E^2}{\gamma^2} \Leftrightarrow E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$
- Masse nulle \Leftrightarrow vitesse c : $m = 0 \Leftrightarrow E = pc \Leftrightarrow \beta = 1$
- Unités:

E en GeV pc en GeV $\Rightarrow p$ en GeV/c mc^2 en GeV $\Rightarrow m$ en GeV/c ²	(on pose parfois $c=1$)
---	--------------------------

Masses nucléaires et atomiques

Noyau ${}^A_Z X_N$: Z protons + N neutrons = A nucléons

$$\text{masse noyau } {}^A_Z X_N = m(Z, A) = Zm_p + Nm_n - B(Z, A) / c^2$$

- $m_p = 938.272 \text{ MeV}/c^2 =$ masse du proton
- $m_n = 939.565 \text{ MeV}/c^2 =$ masse du neutron
- $B(Z, A) =$ énergie de liaison du noyau > 0

$$\text{masse atome de } {}^A_Z X_N = M(Z, A) = m(Z, A) + Zm_e - L(Z) / c^2$$

- $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2 =$ masse de l'électron
- $L(Z) \approx 15.73 Z^{7/3} \text{ eV} =$ énergie de liaison des Z électrons (négligeable)

$$\text{masse atome de } {}^A_Z X_N = M(Z, A) = Zm_H + Nm_n - B(Z, A) / c^2$$

- $m_H =$ masse de l'atome d'hydrogène $\approx m_p + m_e$

Unité de masse atomique

- Définition de l'unité de masse atomique:
1/12 de la masse d'un atome de carbone 12 ($^{12}\text{C}_6$)

$$1 \text{ uma} = 1 \text{ u} = \frac{M(6,12)}{12} \approx 931.494 \text{ MeV} / c^2$$

- Avant la redéfinition de la mole le 20 mai 2019:

$$12 \text{ g de } ^{12}\text{C} = 1 \text{ mole de } ^{12}\text{C} = N_A \text{ atomes de } ^{12}\text{C}$$

où N_A = nombre d'Avogadro

$$1 \text{ uma} = 1 \text{ u} = 1 \text{ g} / N_A \approx 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

- Après le 20 mai 2019:
mole redéfinie par $N_A = 6.02214076 \times 10^{23}$ (exactement)
donc

$$1 \text{ uma} = 1 \text{ u} \approx 1 \text{ g} / N_A \approx 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Modèle de la goutte liquide

Modèle totalement empirique, dû à Von Weizsäcker (1935)

Analogie:

goutte liquide	↔	noyau
molécules	↔	nucléons
forces de van der Waals	↔	force nucléaire

- force à courte portée (**saturation**)
 - nucléons en interaction seulement avec leurs plus proches voisins
 - énergie de liaison d'un nucléon dans le noyau indépendante de A
- énergie de liaison diminuée pour les nucléons à la surface; effet proportionnel à l'aire $S = 4\pi R^2 = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$ (**tension superficielle de la goutte**)
- **répulsion coulombienne** entre les protons
- **énergie d'asymétrie** et **énergie d'appariement**

Formule semi-empirique de la masse (1)

Von Weizsäcker (1935)

$$\begin{aligned}
 m(Z, A)c^2 &= Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 - B(Z, A) \\
 &= Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 \quad \text{masses} \\
 &\quad - a_v A \quad \text{-- énergie de volume} \\
 &\quad + a_s A^{2/3} \quad \text{-- énergie de surface} \\
 &\quad + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad \text{-- énergie de Coulomb} \\
 &\quad + a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad \text{-- énergie d'asymétrie} \\
 &\quad - \delta(Z, A) \quad \text{-- énergie d'appariement}
 \end{aligned}$$

$$\text{où } \delta(Z, A) = \begin{cases} +a_p A^{-3/4} & \text{si A et Z pairs} \\ 0 & \text{si A impair} \\ -a_p A^{-3/4} & \text{si A pair et Z impair} \end{cases}$$

N	Z	Nombre noyaux stables
pair	pair	156
pair	impair	48
impair	pair	50
impair	impair	5

Un nombre pair de protons ou neutrons garantit une meilleure stabilité du noyau

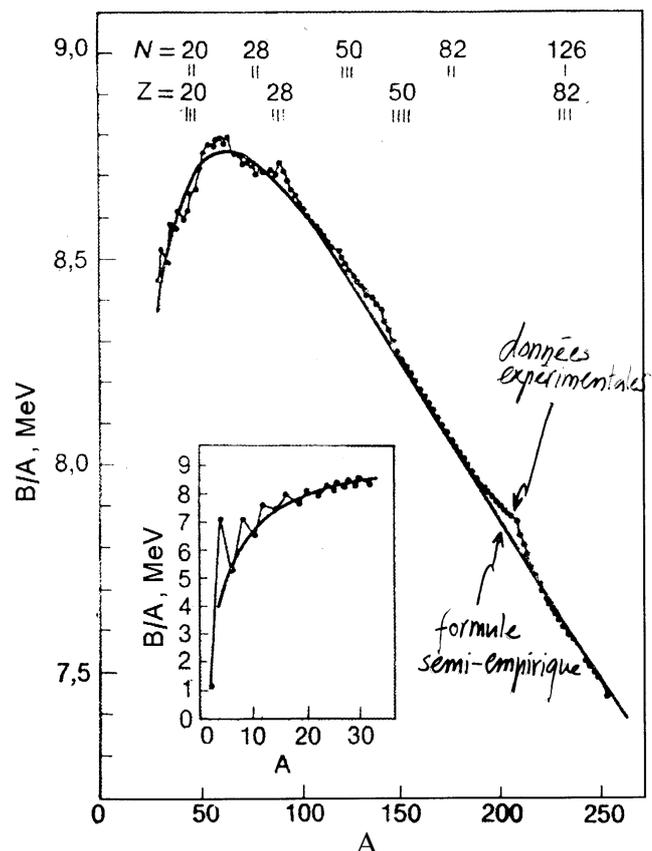
Formule semi-empirique de la masse (2)

- Ajustement des paramètres sur les masses mesurées des noyaux stables:

$$\begin{aligned}
 a_v &= 15.75 \text{ MeV} \\
 a_s &= 17.8 \text{ MeV} \\
 a_c &= 0.71 \text{ MeV} \\
 a_a &= 23.7 \text{ MeV} \\
 a_p &= 34 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

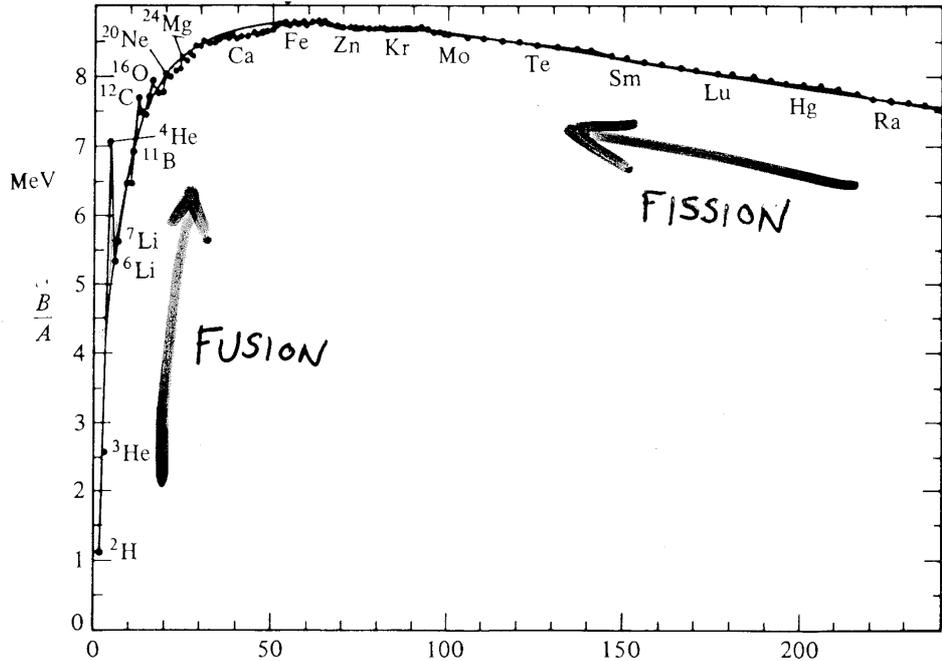
- Accord relativement bon, mais loin d'être parfait

- excès d'énergie de liaison pour N, Z = 20, 28, 50, 82, 126



Energie de liaison par nucléon (1)

$B/A \approx \text{constante}$
 $\approx 8.5 \text{ MeV}$
 (pour $A > 12$)

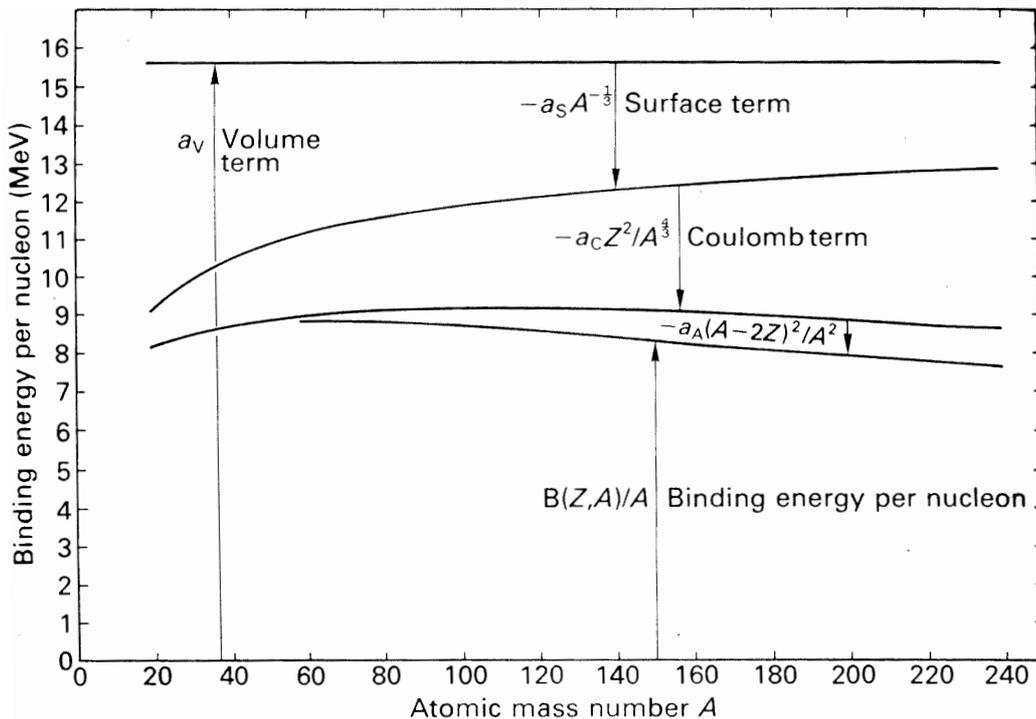


^{56}Fe = noyau dans lequel les nucléons sont le plus liés
 = isotope le plus abondant (avec le Si) pour $A \geq 20$

Energie de liaison par nucléon (2)

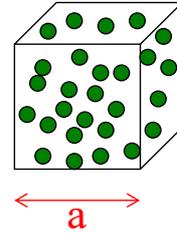
- Formule semi-empirique

$$\frac{B(Z, A)}{A} = a_v - a_s A^{-1/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{4/3}} - a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A^2} + \frac{\delta}{A}$$



Modèle du gaz de Fermi (1)

- Z protons et N neutrons
 - sans interaction entre eux
 - confinés dans une boîte (= noyau)
 - respectant le principe d'exclusion
- Paramètre empirique du modèle:
 $a =$ dimension de la boîte



- Pour chaque nucléon:
 - fonction d'onde $\psi = \psi(x, y, z)$ avec $\begin{cases} \int_{\text{boîte}} |\psi|^2 dx dy dz = 1 \\ \psi = 0 \text{ sauf dans la boîte} \end{cases}$
 - hamiltonien $H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$
 - équation de Schrödinger (aux valeurs propres) $H\psi = T\psi$

Modèle du gaz de Fermi (2)

Spectre d'énergie:

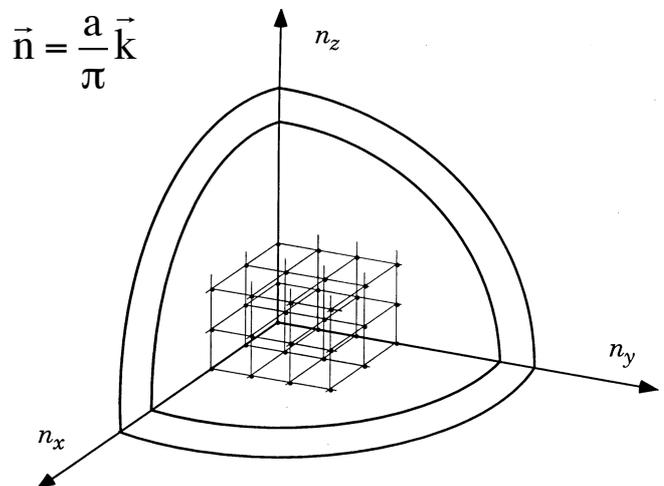
$$T = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \text{ où } n_x, n_y, n_z \text{ entiers}$$

Nombre d'états avec module de \vec{n} entre n et $n+dn$
 = nombre d'états avec module de \vec{k} entre k et $k+dk$:

$$du(k) = \frac{1}{8} \text{coquille} = \frac{1}{8} 4\pi n^2 dn$$

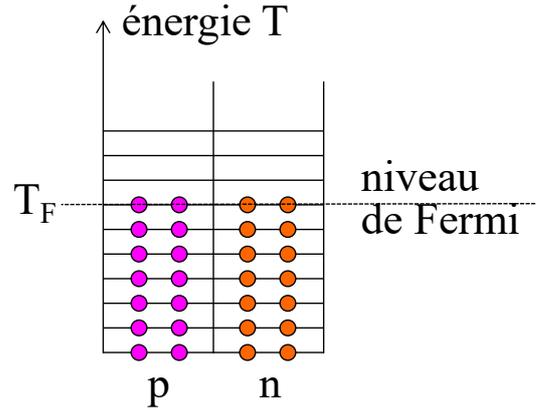
$$= \frac{1}{8} 4\pi \left(\frac{a}{\pi}\right)^3 k^2 dk = \frac{a^3}{2\pi^2} k^2 dk$$

$$du(k) = \frac{\Omega}{2\pi^2} k^2 dk \text{ où } \Omega = \text{volume de la boîte}$$



Modèle du gaz de Fermi (3)

- Principe d'exclusion de Pauli:
 - 2 protons + 2 neutrons par niveau d'énergie (spin 1/2)
- Pour un noyau symétrique avec $Z = N = A/2$:
 - nombre d'états tels que le module de k soit inférieur à k_F



$$\frac{A}{4} = u(k_F) = \int_0^{k_F} \frac{\Omega}{2\pi^2} k^2 dk = \frac{\Omega}{6\pi^2} k_F^3 = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{6\pi^2} k_F^3 = \frac{2R^3}{9\pi} k_F^3$$

$$\Rightarrow k_F = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{A^{1/3}}{R} \approx \frac{3}{2r_0} \Rightarrow \begin{cases} k_F \approx 1.27 \text{ fm}^{-1} \\ p_F = \hbar k_F \approx 250 \text{ MeV}/c \\ T_F = \hbar^2 k_F^2 / (2m) \approx 33 \text{ MeV} \end{cases}$$

$r_0 = 1.2 \text{ fm}$
paramètre empirique

constantes pour tous les noyaux !

Modèle du gaz de Fermi (4)

- Energie cinétique moyenne d'un nucléon dans le noyau:

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^{A/4} T du}{\int_0^{A/4} du} = \dots = \frac{3}{5} T_F \approx 20 \text{ MeV}$$

- Energie de séparation S du nucléon le moins lié:

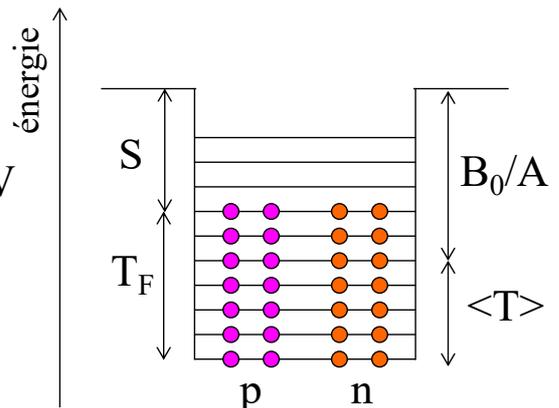
$S \approx 6 \text{ MeV}$
~ constante pour tous les noyaux
paramètre empirique

- Energie de liaison moyenne d'un nucléon:

$$\frac{B_0}{A} = T_F + S - \langle T \rangle \approx 33 + 6 - 20 = 19 \text{ MeV}$$

- Energie de liaison totale du noyau:

$$B_0 = a_v A \quad \text{où } a_v = 19 \text{ MeV}$$



Modèle du gaz de Fermi (5)

- Energie de liaison brute: $B_0 = a_v A$ où $a_v = 19 \text{ MeV}$

- Corrections:

- ① Energie de répulsion coulombienne entre les protons

$$E_C = a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad \text{où } a_c \approx 0.72 \text{ MeV}$$

- ② Energie d'asymétrie (pour N différent de Z)

$$E_a = a_a \frac{(N-Z)^2}{A} \quad \text{où } a_a \approx 11 \text{ MeV}$$

- ③ Energie de surface

$$E_s = a_s A^{2/3} \quad \text{où } a_s \approx 16 \text{ MeV}$$

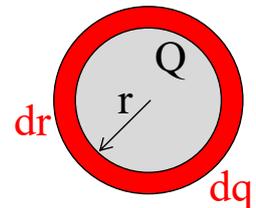
- Energie de liaison corrigée:

$$B = B_0 - E_C - E_a - E_s$$

Energie coulombienne d'un noyau

- On considère une boule de rayon R de charge Ze , uniformément chargée, densité de charge $= \eta = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}$
- Energie d'interaction d'une boule de rayon r et de charge Q avec une coquille de rayon r , d'épaisseur dr et de charge dq :

$$dE_c = \frac{dq Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{(4\pi r^2 dr \eta) \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \eta\right)}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \eta^2 r^4 dr$$

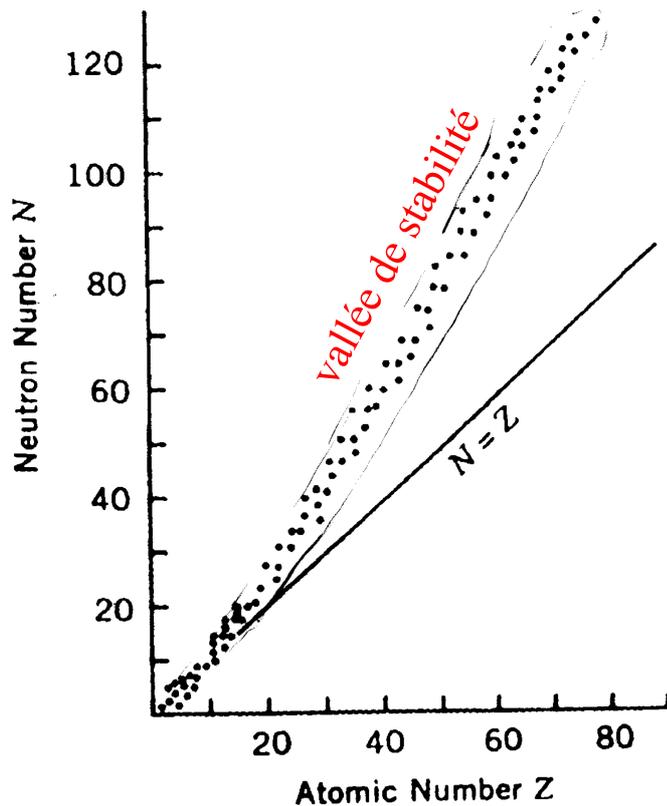


- Energie totale pour la boule de rayon R :

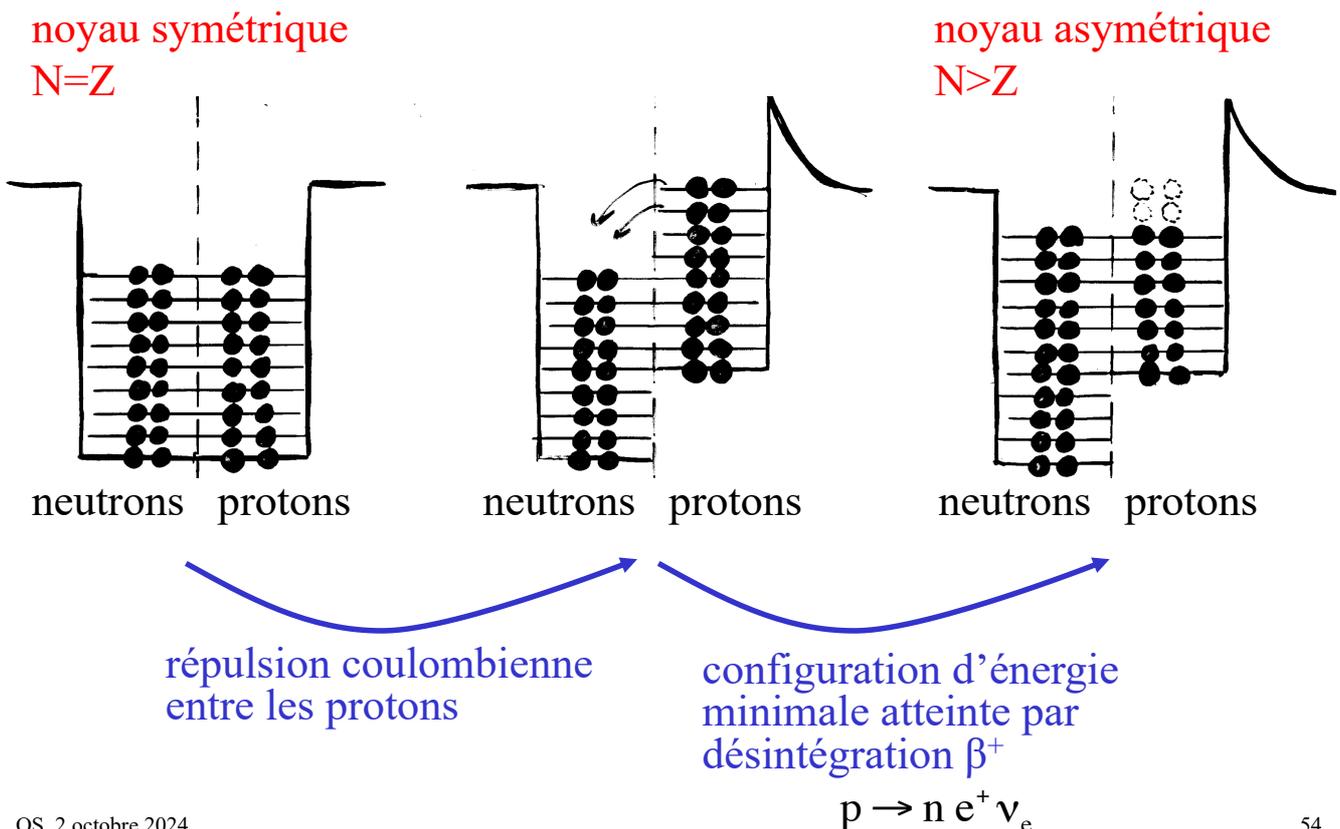
$$\begin{aligned} E_c &= \int_0^R dE_c = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \eta^2 \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \left(\frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)^2 \frac{R^5}{5} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{Z^2}{R} \\ &= \frac{3}{5} \frac{\alpha \hbar c}{r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}} = \frac{3}{5} \times \frac{197 \text{ MeV fm}}{137 \times 1.2 \text{ fm}} \times \frac{Z^2}{A^{1/3}} \approx 0.72 \text{ MeV} \times \frac{Z^2}{A^{1/3}} \end{aligned}$$

Asymétrie N – Z

- Pour les noyaux stables légers:
 $N \approx Z$
- Pour les noyaux stables moyens ou lourds:
 $N > Z$
- Effets déterminants:
 - ① principe d'exclusion
 - ② répulsion coulombienne



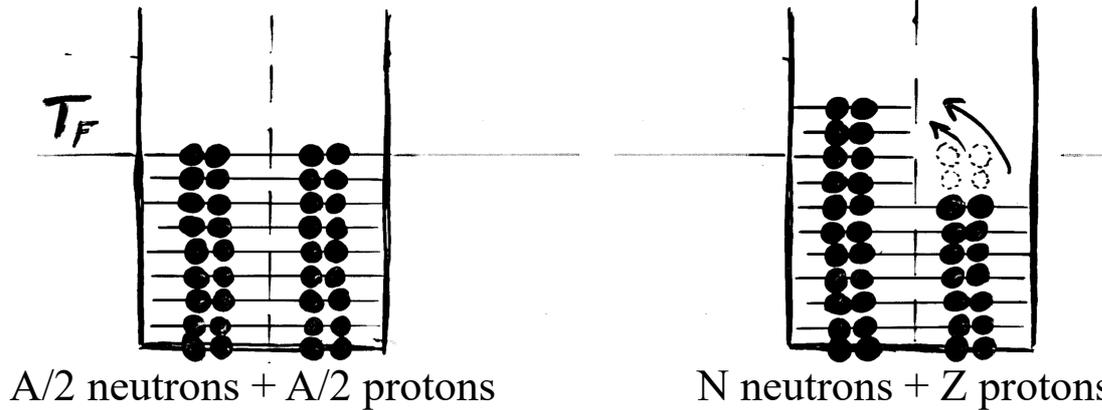
Etat d'énergie minimale d'un noyau



Energie d'asymétrie

noyau symétrique de A nucléons

noyau asymétrique de A nucléons



$A/2$ neutrons + $A/2$ protons

N neutrons + Z protons

$$N = \frac{A}{2}(1 + \lambda) \quad Z = \frac{A}{2}(1 - \lambda)$$

$$N - Z = \lambda A$$

- Energie supplémentaire due à l'asymétrie:

$$E_a = 2 \underbrace{\int_{A/4}^{A/4(1+\lambda)} T du}_{\text{neutrons en plus}} - 2 \underbrace{\int_{A/4(1-\lambda)}^{A/4} T du}_{\text{protons en moins}}$$

Energie d'asymétrie (calcul)

$$F(u) = \int_0^u T du' \quad \frac{dF}{du} = T(u) = \text{énergie du } u\text{-ième niveau}$$

$$E_a = 2 \left[F\left(\frac{A}{4}(1 + \lambda)\right) - F\left(\frac{A}{4}\right) \right] - 2 \left[F\left(\frac{A}{4}\right) - F\left(\frac{A}{4}(1 - \lambda)\right) \right]$$

Développement limité en λ au 2^{ème} ordre (valable si $\lambda \ll 1$):

$$F\left(\frac{A}{4}(1 \pm \lambda)\right) = F\left(\frac{A}{4}\right) \pm \left(\lambda \frac{A}{4}\right) \frac{dF}{du} \Big|_{u=A/4} + \frac{1}{2} \left(\lambda \frac{A}{4}\right)^2 \frac{d^2F}{du^2} \Big|_{u=A/4}$$

$$E_a \approx 4 \frac{1}{2} \left(\lambda \frac{A}{4}\right)^2 \frac{d^2F}{du^2} \Big|_{u=A/4} = \frac{1}{8} \lambda^2 A^2 \frac{d^2F}{du^2} \Big|_{u=A/4} = \frac{1}{8} (N - Z)^2 \frac{dT}{du} \Big|_{u=A/4}$$

$$\left(T = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \text{ et } u = \frac{\Omega}{6\pi^2} k^3 \right) \Rightarrow T(u) = \beta u^{2/3} \Rightarrow \frac{dT}{du} = \frac{2}{3} \beta u^{-1/3} = \frac{2}{3} \frac{T}{u}$$

$$E_a \approx \frac{1}{8} (N - Z)^2 \frac{2}{3} \frac{T_F}{\frac{A}{4}} = \frac{T_F}{3} \frac{(N - Z)^2}{A} = 11 \text{ MeV} \times \frac{(N - Z)^2}{A}$$

Désintégrations (instabilités) nucléaires

- Population de noyaux instables, avec durée de vie moyenne τ

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

– temps de demi-vie $t_{1/2}$ $N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow t_{1/2} = \tau \ln(2)$

- Activité = nombre de désintégrations par unité de temps

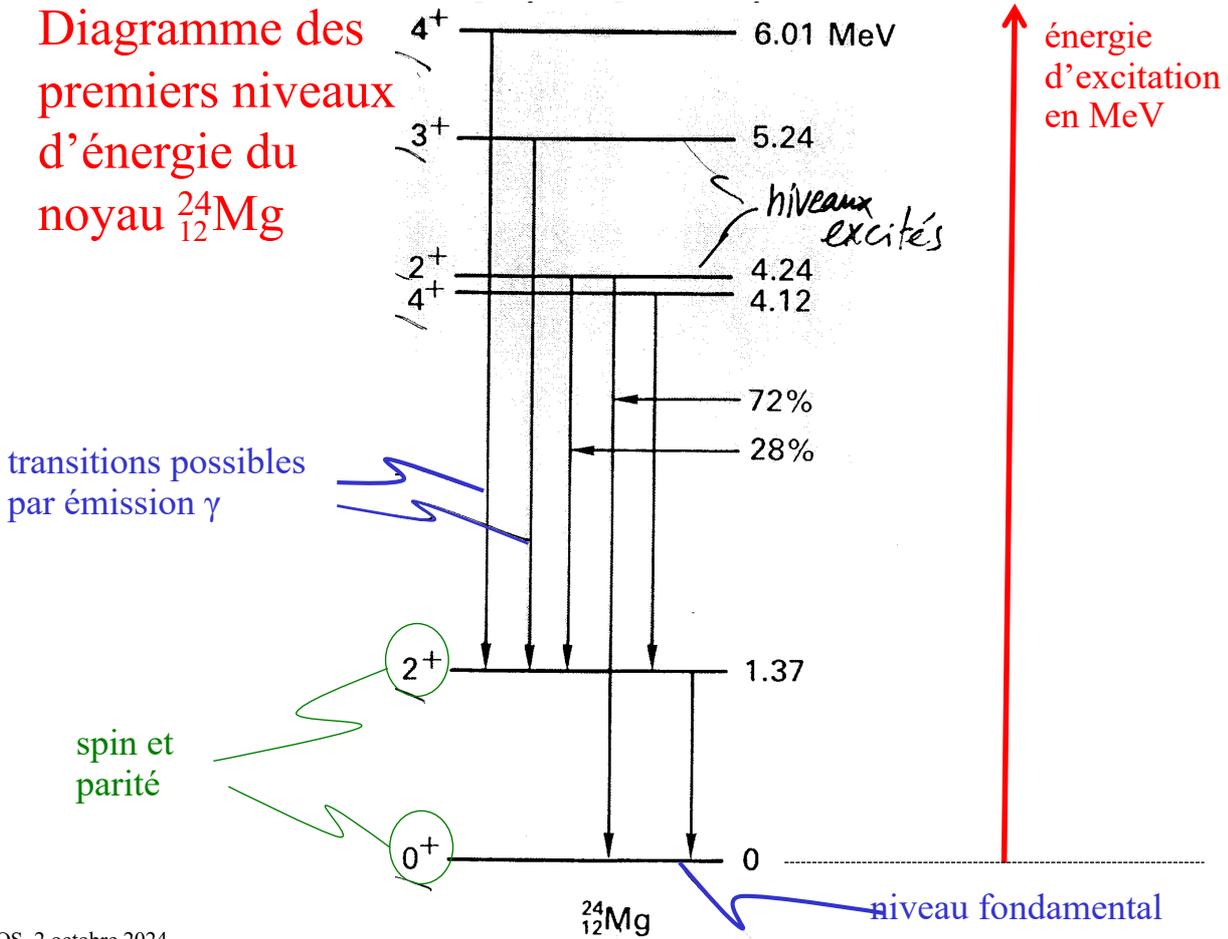
$$A(t) = -\frac{dN}{dt} = A_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad A_0 = \frac{N_0}{\tau}$$

- Désintégration: $X \rightarrow A + B + C$
- Energie cinétique dégagée: $Q = m_X - m_A - m_B - m_C > 0$
(on a posé $c=1$)

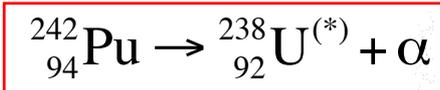
Désintégrations (instabilités) nucléaires

α émission α fission (cas plus général)	${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 \text{He}$ ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A'}_{Z'} Y^{(*)} + {}^{A-A'}_{A-Z'} W^{(*)} + \text{neutrons}$	$Q_\alpha = M_X - M_Y - M_{\text{He}}$
β émission β^- émission β^+ capture électronique (par ex. capture K)	${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y^{(*)} + e^- + \bar{\nu}_e$ ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y^{(*)} + e^+ + \nu_e$ ${}^A_Z X + e^- \rightarrow {}^A_{Z-1} Y^{(*)} + \nu_e$	$Q_{\beta^-} = M_X - M_{Y^{(*)}}$ $Q_{\beta^+} = M_X - M_{Y^{(*)}} - 2m_e$ $Q_{\text{EC}} = M_X - M_{Y^{(*)}}$
γ émission γ conversion interne	${}^A_Z X^* \rightarrow {}^A_Z X + \gamma$ ${}^A_Z X^* + e^- \rightarrow {}^A_Z X + e^-$	$Q_\gamma = M_{X^*} - M_X$

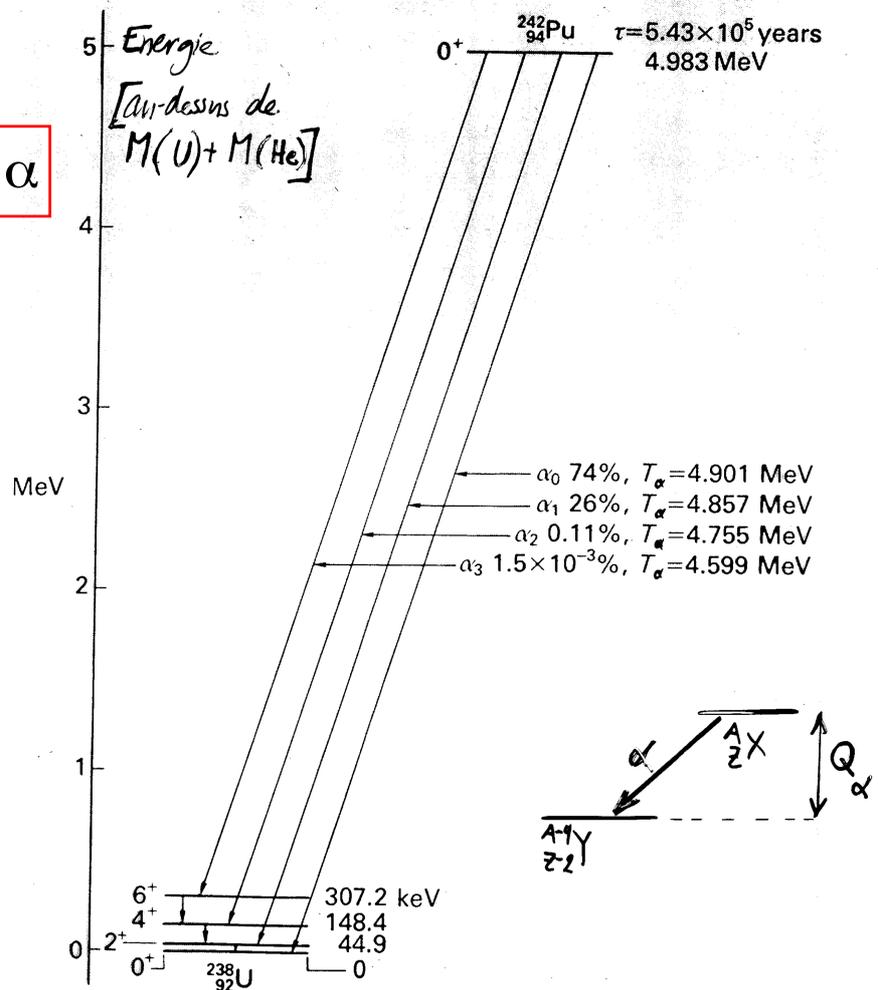
Diagramme des premiers niveaux d'énergie du noyau $^{24}_{12}\text{Mg}$



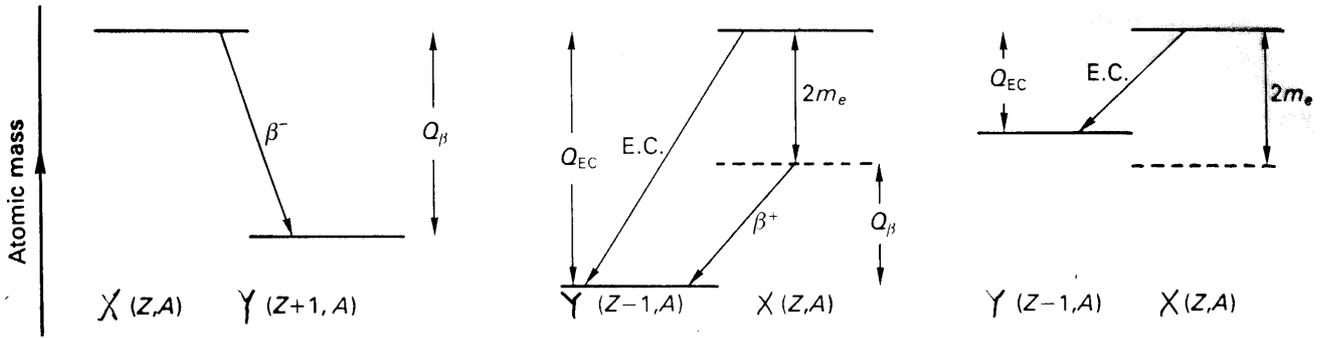
Désintégration α



(voir exercice)



Désintégration β



émission β^-



émission β^+

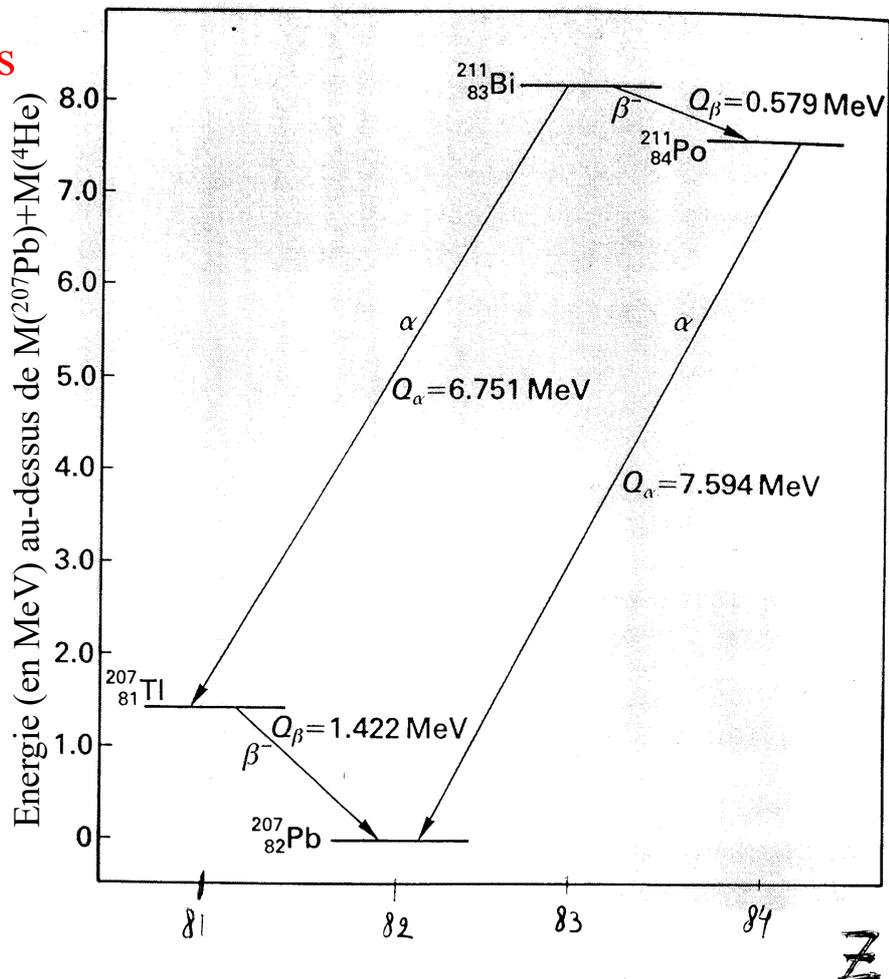


capture électronique



La capture électronique est toujours possible si l'émission β^+ est possible, car $Q_{EC} > Q_{\beta^+}$

Désintégrations successives

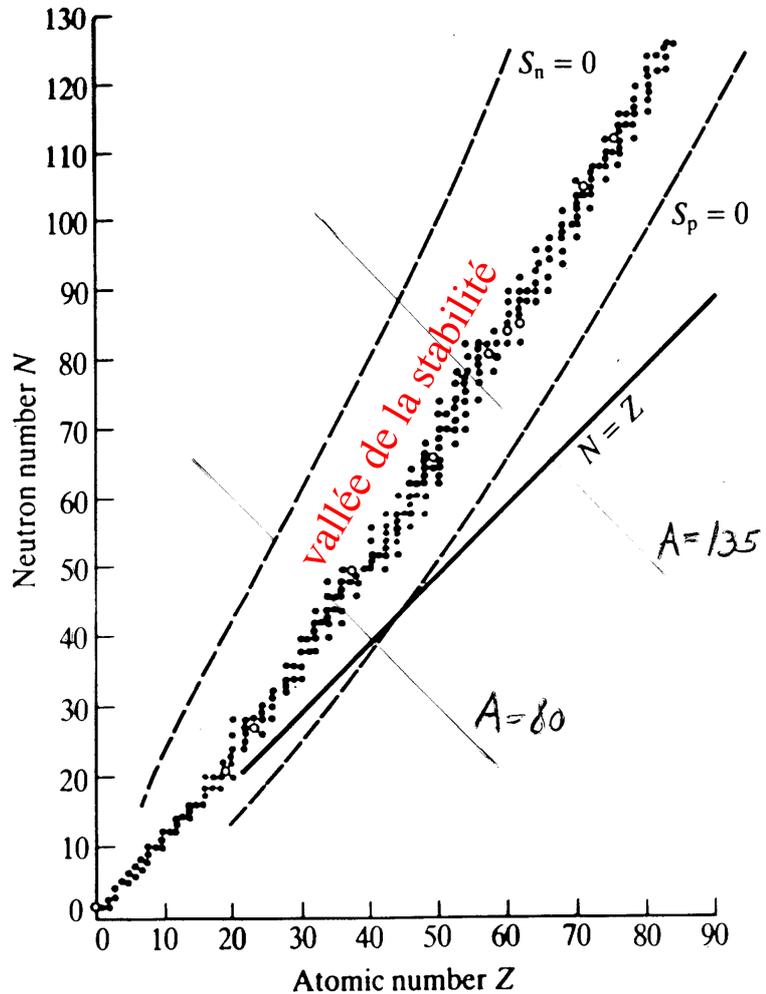


- Z_A = nombre de protons de l'isobare à A nucléons qui soit stable par rapport aux désintégrations β

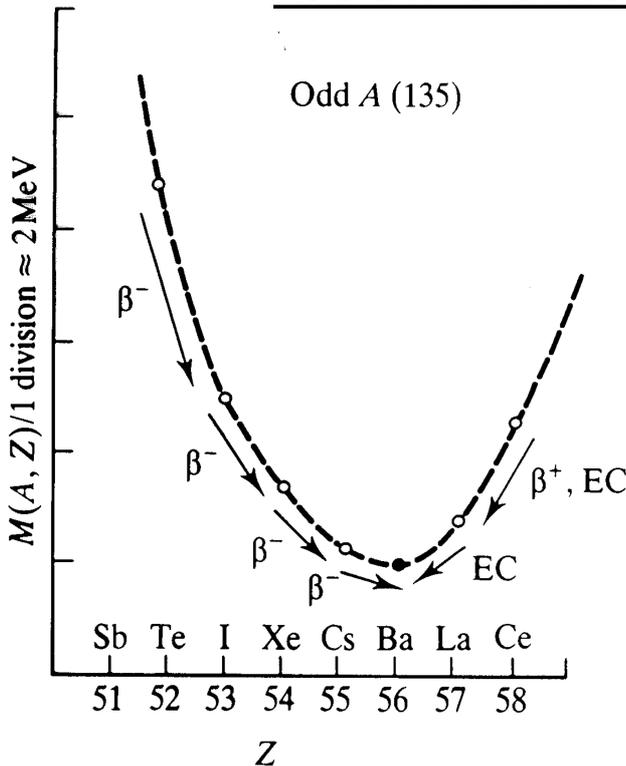
- A fixé
- formule de la masse $M(Z,A)$
- on pose $\left. \frac{\partial M}{\partial Z} \right|_{Z=Z_A} = 0$

$$Z_A = \frac{A}{2} \frac{1}{1 + \frac{a_c}{4a_a} A^{2/3}} < \frac{A}{2}$$

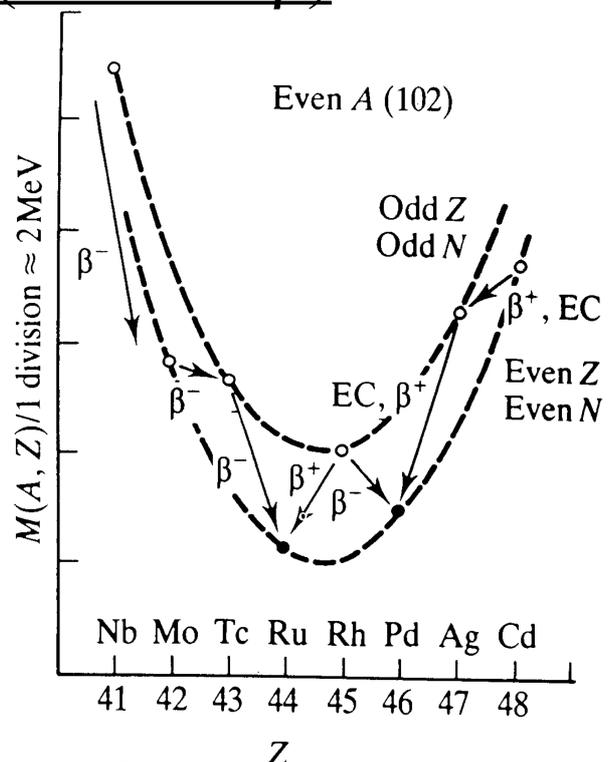
$$= \frac{A}{2} \frac{1}{1 + 0.0075 A^{2/3}}$$



Isobare stable (stabilité β)

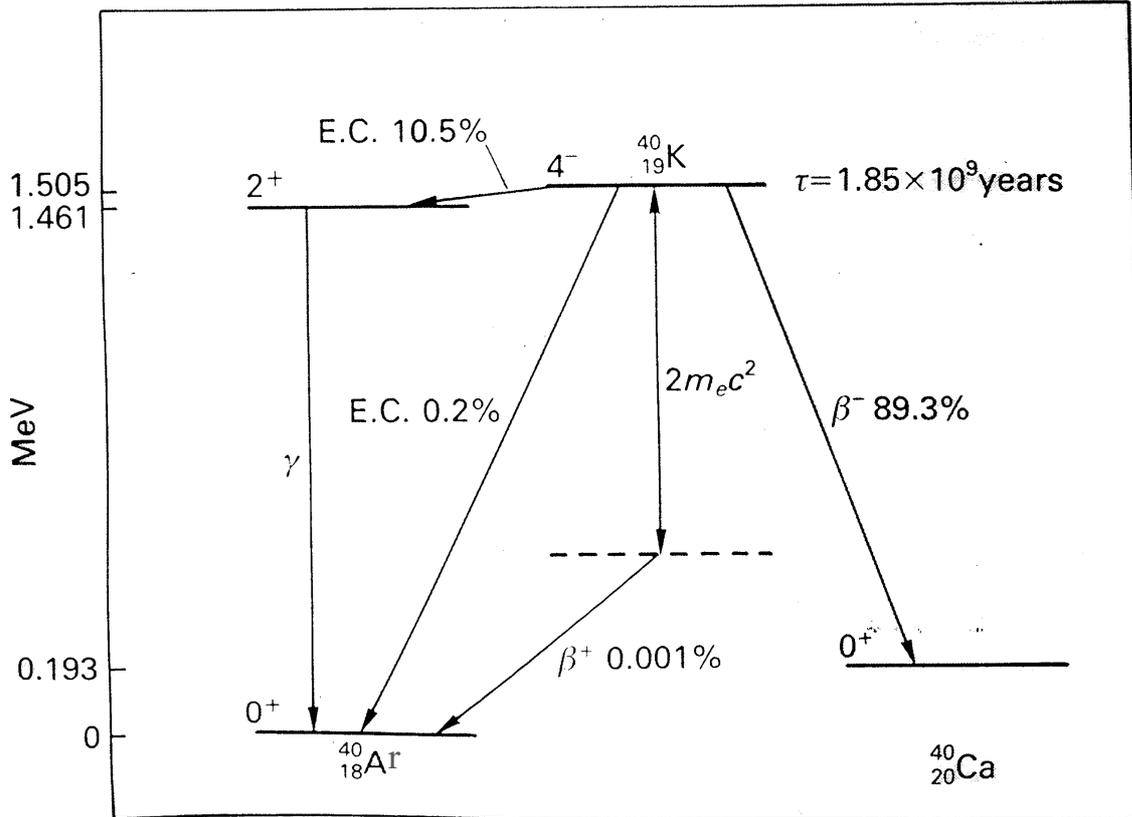


A impair:
– un seul isobare stable



A pair:
– un ou deux isobares stables avec N et Z pairs

Noyau radioactif β^+ et β^-

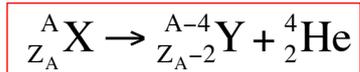


OS, 2 octobre 2024

65

Stabilité α

- Désintégration α d'un isobare stable pour la désintégration β



- formule de la masse $M(Z,A)$

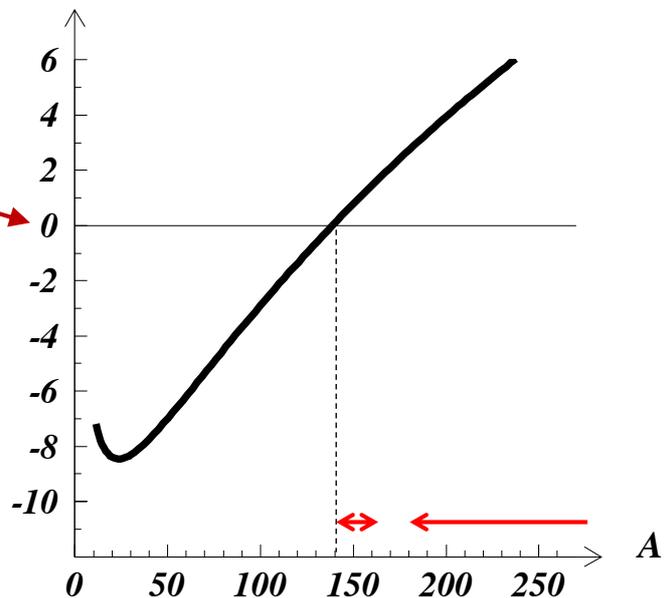
- énergie libérée:

$$Q_\alpha = M(Z,A) - M(Z-2; A-4) - M(2,4)$$

pour $Z = Z_A$

- $Q_\alpha > 0 \Rightarrow A \geq 140$

Q_α [MeV]



- Noyaux émetteurs α :
 - $144 < A < 160$ et $A > 180$

OS, 2 octobre 2024

66

Stabilité α (calcul)

- En posant $c=1$, et avec $\Delta Z=-2$, $\Delta A=-4$:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= M(Z, A) - M(Z - 2; A - 4) - M(2, 4) \\ &= -\left[M(Z + \Delta Z, A + \Delta A) - M(Z, A) \right] - M(2, 4) \\ &= -\left[\frac{\partial M}{\partial Z} \Big|_{A=\text{cte}} \Delta Z + \frac{\partial M}{\partial A} \Big|_{Z=\text{cte}} \Delta A \right] - M(2, 4) \end{aligned}$$

- On considère un noyau stable pour la désintégration β , donc

$$Z = Z_A \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial Z} \Big|_{A=\text{cte}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_\alpha = 4 \frac{\partial M}{\partial A} \Big|_{Z=\text{cte}} - M(2, 4)$$

- Avec la formule semi-empirique de la masse, on obtient

$$Q_\alpha = \underbrace{4m_n - M(2, 4)}_{29.9 \text{ MeV}} - 4a_v + \frac{8}{3}a_s A^{-1/3} - \frac{4}{3}a_c Z_A^2 A^{-4/3} + 4a_a \left[1 - \left(\frac{2Z_A}{A} \right)^2 \right]$$

$$\text{où } Z_A = \frac{A}{2} \frac{1}{1 + \frac{a_c}{4a_a} A^{2/3}} < \frac{A}{2}$$

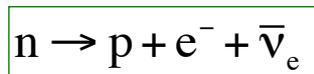
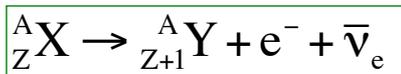
Les surprises de la désintégration β (et donc de l'interaction faible)

- 1930: découverte "théorique" (postulation) du **neutrino**
- 1956: découverte expérimentale du neutrino
- 1957: découverte de la non-conservation de la **parité**,
c'est-à-dire de la violation de la symétrie gauche-droite
- 1958: découverte que le neutrino a toujours une **hélicité** de -1 ,
c'est-à-dire qu'il est toujours gauche
(et que l'anti-neutrino a toujours une hélicité $+1$,
c'est-à-dire qu'il est toujours droit)
- ...

Radioactivité β et neutrino

- 1898: Rutherford distingue les radioactivités α et β
- ~ 1900: rayons β = électrons
- 1914: Chadwick et Rutherford constatent que la désintégration β viole la conservation de l'énergie
- 1930: W. Pauli postule l'existence d'une nouvelle particule pour rétablir les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique

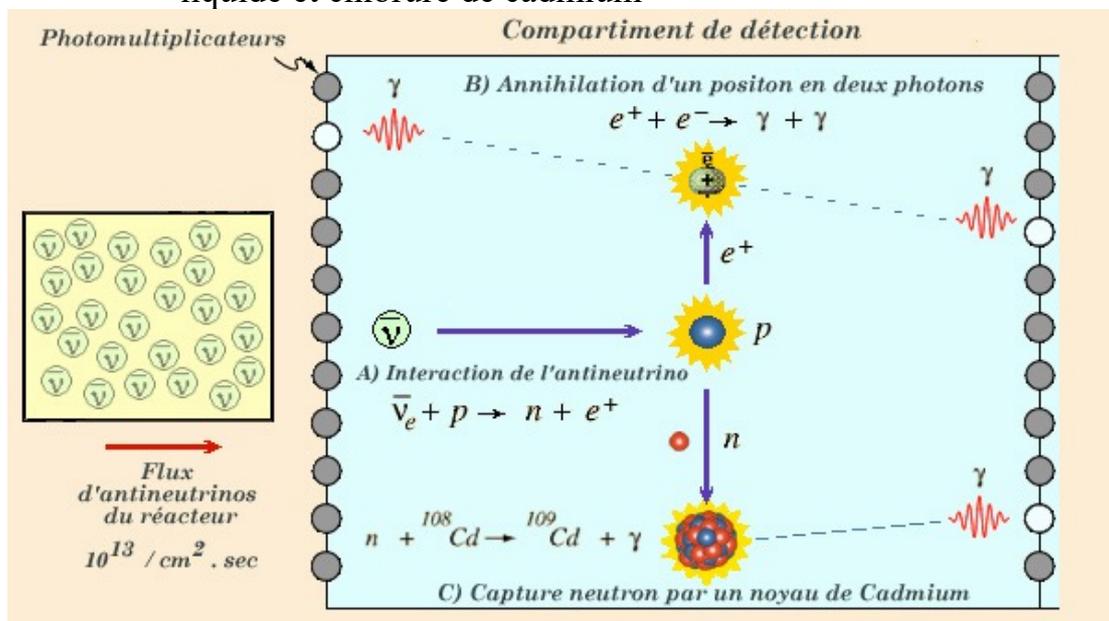
"I have done a terrible thing today, something which no theoretical physicist should ever do. I have suggested something that can never be verified experimentally" (W. Pauli)



- Neutrino:**
 - masse nulle
 - insensible à l'interaction é.m. (charge électrique nulle)
 - insensible à l'interaction forte
 - spin 1/2

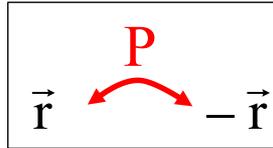
Découverte du neutrino

- 1956: Reines & Cowan observent directement des anti-neutrinos au réacteur de Savannah River (USA)
 - interactions dans un cuve de 200 l d'eau avec scintillateur liquide et chlorure de cadmium



Une symétrie discrète: la parité P

- Opération de parité P = « inversion d'espace »



- Réflexion (par un miroir)
 - = inversion d'une seule des 3 coordonnées de l'espace
 - = opération P suivie d'une rotation de 180 degrés autour d'un axe perpendiculaire au miroir

CONSERVATION DE LA PARITE:

E. Wigner, 1927

On dit que « la parité est conservée » si les lois de la physique sont invariantes par rapport à une inversion d'espace (ou une réflexion dans un miroir), c'est-à-dire si l'image dans un miroir d'un phénomène physique correspond à un phénomène physique de même probabilité

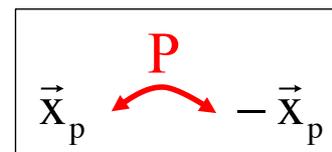
Parité des Vecteurs polaires et axiaux

- Un vecteur peut se transformer de deux façons différentes sous une inversion spatiale P:

- **vecteur polaire**

parité = -1

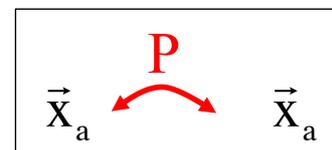
- direction avec une signification physique
- exemple: vitesse \vec{v} , force \vec{F} , champ électrique \vec{E}



- **vecteur axial (ou pseudo-vecteur)**

parité = +1

- direction conventionnelle (règle du « tire-bouchon »)
- exemple: champ magnétique \vec{B}



- Produit vectoriel:

$$\vec{x}_p \wedge \vec{y}_p = \vec{z}_a \quad \text{par ex.} \quad \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{L}$$

$(-1) \times (-1) = +1$

$$\vec{x}_p \wedge \vec{y}_a = \vec{z}_p \quad \text{par ex.} \quad q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{F} \quad \rightarrow \text{la parité est conservée}$$

$(-1) \times (+1) = -1$

$$\vec{x}_a \wedge \vec{y}_a = \vec{z}_a$$

$(+1) \times (+1) = +1$

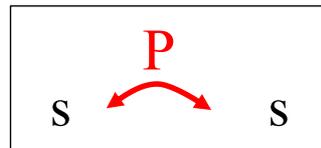
Parité des Scalars et pseudo-scalars

- Un scalaire peut se transformer de deux façons différentes sous une inversion spatiale P:

– (vrai) scalaire

parité = +1

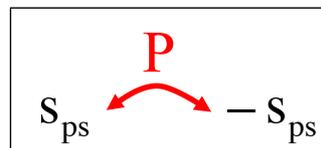
- signe avec une signification physique
- exemple: masse m, charge électrique q



– pseudo-scalaire

parité = -1

- signe conventionnel
- exemple: hélicité H (voir plus loin)



- Produit scalaire:

$$\vec{x}_p \cdot \vec{y}_p = s$$

$$(-1) \times (-1) = +1$$

par ex. $\vec{F} \cdot \vec{\ell} = W$

$$\vec{x}_p \cdot \vec{y}_a = s_{ps}$$

$$(-1) \times (+1) = -1$$

par ex. $\vec{p} \cdot \vec{S} \propto H$

→ la parité est conservée

$$\vec{x}_a \cdot \vec{y}_a = s$$

$$(+1) \times (+1) = +1$$

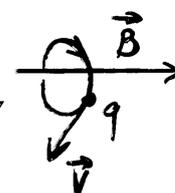
par ex. $-\vec{\mu} \cdot \vec{B} = E$

Parité des quantités physiques

Quantité physique	P
position \vec{r}	-
temps t	+
vitesse $\vec{v} = d\vec{r}/dt$	-
masse m	+
quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$	-
moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$	+
spin \vec{S}	+
force $\vec{F} = d\vec{p}/dt$	-
énergie $E = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$	+
charge électrique q	+
champ électrique \vec{E}	-
champ magnétique \vec{B}	+

la quantité physique est multipliée par ce signe sous une inversion d'espace

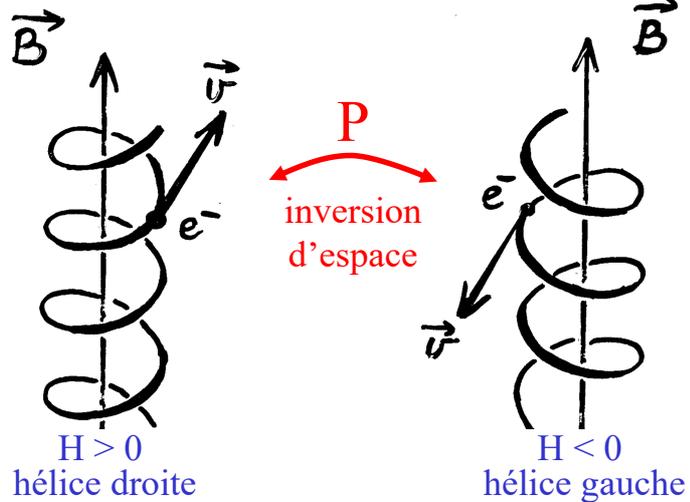
$$+q \cdot \vec{E} = -q$$



Hélicité (pseudo-scalaire)

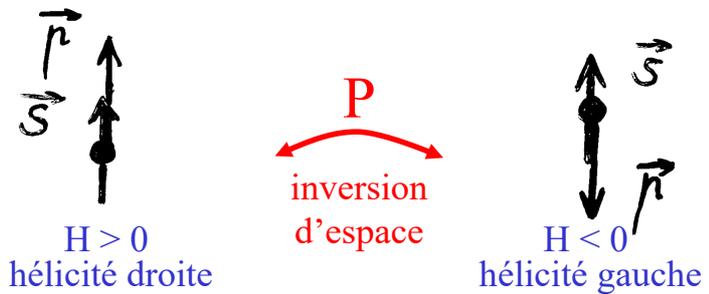
- Hélicité de l'orbite d'une particule dans un champ magnétique B:

$$H = \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$$



- Hélicité d'une particule de spin S:

$$H = \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{S}}{\|\vec{S}\|} = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}c}{\|\vec{S}\|E}$$



Parité en mécanique quantique

- Inversion d'espace: opérateur \mathbf{P}

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &\rightarrow \psi(-\vec{r}) && \text{fonction d'onde} \\ |\psi\rangle &\rightarrow \mathbf{P}|\psi\rangle && \text{"ket"} \\ \mathbf{P}^2|\psi\rangle &= |\psi\rangle && \Rightarrow \text{valeurs propres} = \pm 1 \end{aligned}$$

- Conservation de la parité $\Leftrightarrow [\mathbf{P}, \mathbf{H}] = 0$ (\mathbf{H} = Hamiltonien)
- Cas d'une particule dans un potentiel central:
 - conservation du moment cinétique $\Leftrightarrow [\mathbf{L}_x, \mathbf{H}] = [\mathbf{L}_y, \mathbf{H}] = [\mathbf{L}_z, \mathbf{H}] = 0$
 - Les états propres simultanés de \mathbf{H} , L^2 et L_z , de moment cinétique ℓ
 $\psi_{n\ell m}(\vec{r}) = R_{n\ell}(r)Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ où (r, θ, φ) = coordonnées sphériques
 sont aussi états propres de \mathbf{P} , pour la valeur propre $(-1)^\ell$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \psi_{n\ell m}(\vec{r}) &= \psi_{n\ell m}(-\vec{r}) = R_{n\ell}(r)Y_\ell^m(\pi - \theta, \varphi + \pi) \\ &= R_{n\ell}(r) (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta, \varphi) = (-1)^\ell \psi_{n\ell m}(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{P} = (-1)^\ell$$

Parité et moment cinétique intrinsèques

- Chaque hadron (et donc chaque noyau) possède, comme les vecteurs ou les scalaires, une **parité intrinsèque P (= ±1)** qui décrit la manière dont son état quantique se transforme sous une inversion d'espace

Exemples:

	P	J	J ^P
Proton (p)	+1	1/2	1/2 ⁺
Neutron (n)	+1	1/2	1/2 ⁺
Pion (π)	-1	0	0 ⁻
Deuton (d)	+1	1	1 ⁺
Helium 4 (⁴ He= α)	+1	0	0 ⁺
Lithium 6 (⁶ Li)	+1	1	1 ⁺
Lithium 7 (⁷ Li)	-1	3/2	3/2 ⁻
Bore 10 (¹⁰ B)	+1	3	3 ⁺
Oxygène 17 (¹⁷ O)	+1	5/2	5/2 ⁺

- Chaque particule (et donc chaque noyau) a un **moment cinétique intrinsèque ou spin J (= 0, 1/2, 1, 3/2, 2, ...)**
- Spin et parité intrinsèque sont souvent noté J^P

OS, 9 octobre 2024

77

Conservation du moment cinétique et de la parité dans un processus 1+2 → 3+4

- **Conservation du (vecteur !) moment cinétique total**

$$\vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \vec{L}_{12} = \vec{J}_3 + \vec{J}_4 + \vec{L}_{34}$$

Attention: composition des moments cinétiques

- J_i = spin de la particule i
- L_{ij} = moment cinétique orbital relatif entre les particules i et j

- **Conservation de la parité (par les interactions fortes et é.m.)**

$$P_1 \cdot P_2 \cdot (-1)^{L_{12}} = P_3 \cdot P_4 \cdot (-1)^{L_{34}}$$

Attention: les parités sont multiplicatives

- P_i = parité intrinsèque de la particule i
- L_{ij} = moment cinétique orbital relatif entre les particules i et j

- Exemple (voir exercice):

- capture pionique par le deuton: π⁻ + d → n + n

OS, 9 octobre 2024

78

Le « problème τ - θ » en 1956

- Observation de nouvelles particules étranges τ et θ , se désintégrant pas interaction faible:

$\tau^+ \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+$	$P = (-1)^3 = -1$
$\theta^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$	$P = (-1)^2 = +1$

- Parités opposées, mais toutes les autres propriétés identiques:
 - masse
 - durée de vie moyenne
 - charge électrique (+1)
 - section efficace de production par interaction forte
 - etc.

Comment deux particules différentes peuvent-elles se ressembler autant ?

Question of Parity Conservation in Weak Interactions*

T. D. LEE, *Columbia University, New York, New York*

AND

C. N. YANG,† *Brookhaven National Laboratory, Upton, New York*

(Received June 22, 1956)

The question of parity conservation in β decays and in hyperon and meson decays is examined. Possible experiments are suggested which might test parity conservation in these interactions.

RECENT experimental data indicate closely identical masses¹ and lifetimes² of the θ^+ ($\equiv K_{\pi_2^+}$) and the τ^+ ($\equiv K_{\pi_3^+}$) mesons. On the other hand, analyses³ of the decay products of τ^+ strongly suggest on the grounds of angular momentum and parity conservation that the τ^+ and θ^+ are not the same particle. This poses a rather puzzling situation that has been extensively discussed.⁴

One way out of the difficulty is to assume that parity is not strictly conserved, so that θ^+ and τ^+ are two different decay modes of the same particle, which necessarily has a single mass value and a single lifetime. We wish to analyze this possibility in the present paper against the background of the existing experimental evidence of parity conservation. It will become clear that existing experiments do indicate parity conservation in strong and electromagnetic interactions to a high degree of accuracy, but that for the weak inter-

[...]

The reason for the absence of interference terms CC' is actually quite obvious. Such terms can only occur as a pseudoscalar formed out of the experimentally measured quantities. For example, if three momenta $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ are measured, the term $CC' \mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_3)$ may occur. Or if a momentum \mathbf{p} and a spin $\boldsymbol{\sigma}$ are measured, the term $CC' \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ may occur. In all the β -decay phenomena mentioned above, no such pseudoscalars can be formed out of the measured quantities.

→ il faut mesurer un pseudo-scalaire dans un processus d'interaction faible !

Idée de Lee et Yang

Lee & Yang, Phys. Rev. 104, 254 (1956)

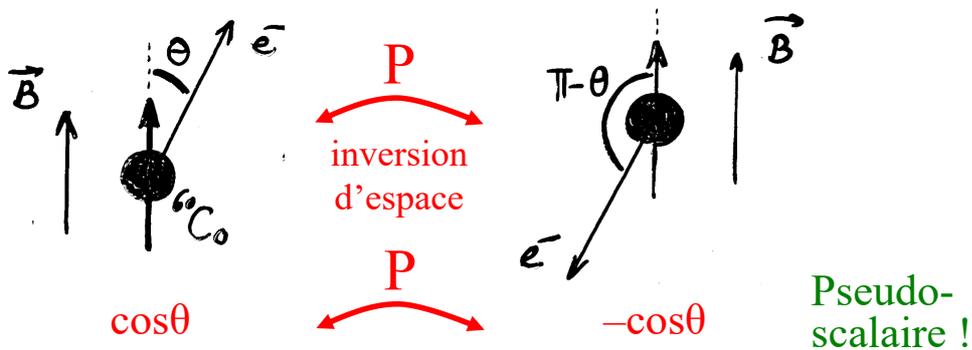
- Désintégration β du cobalt 60 (par interaction faible):



- ① aligner les spins S de tous les noyaux ${}^{60}\text{Co}$ par un champ magnétique B
- ② mesurer $N(\theta)$ = nombre d'électrons émis à un angle θ par rapport à B
- ③ comparer $N(\theta)$ et $N(\pi-\theta)$

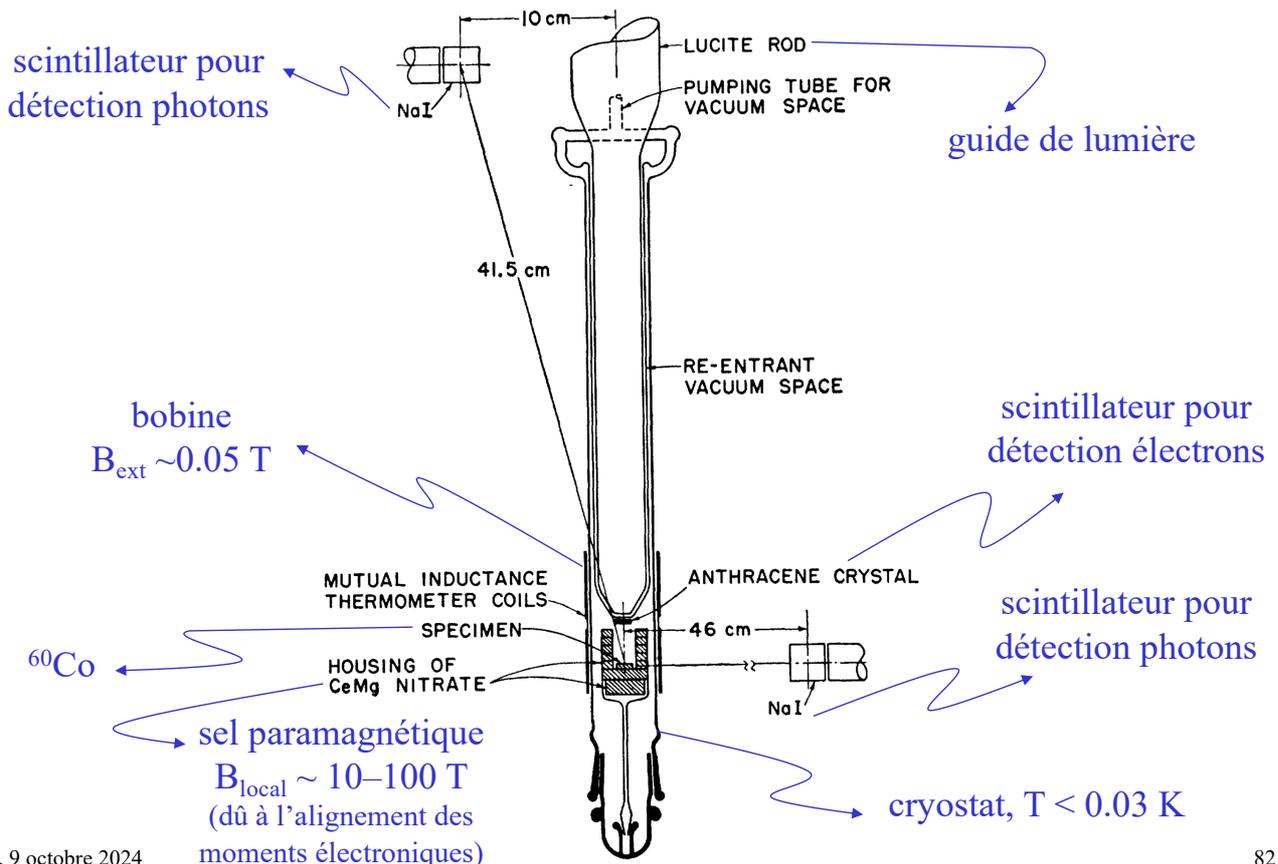
$$\cos\theta = (\vec{p}_e \cdot \vec{B}) / (p_e B)$$

conservation de P $\Leftrightarrow N(\theta) = N(\pi - \theta)$



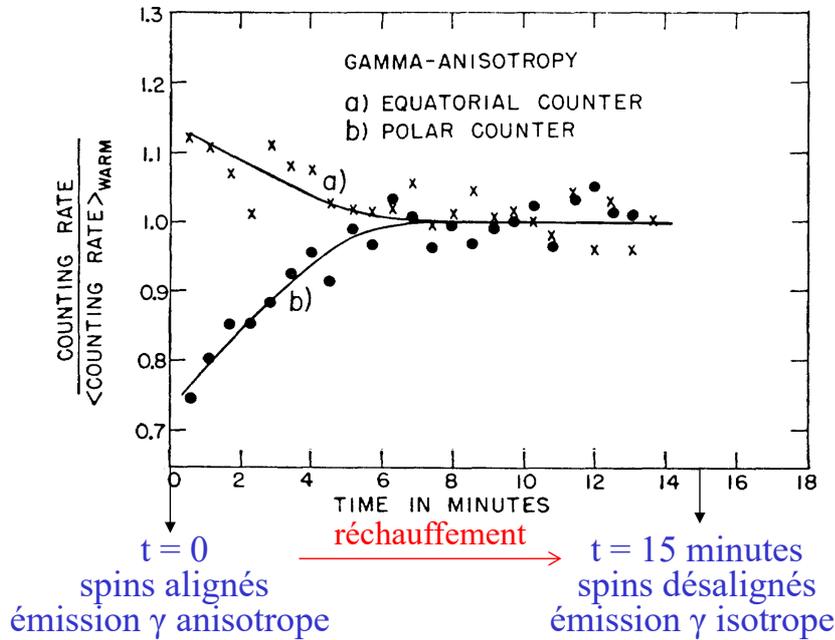
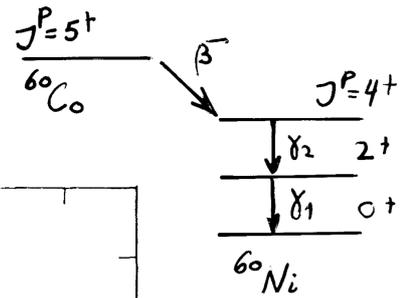
Expérience de Mme Wu

Wu et al., Phys. Rev. 105, 1413 (1957)



Expérience de Mme Wu (comptage γ)

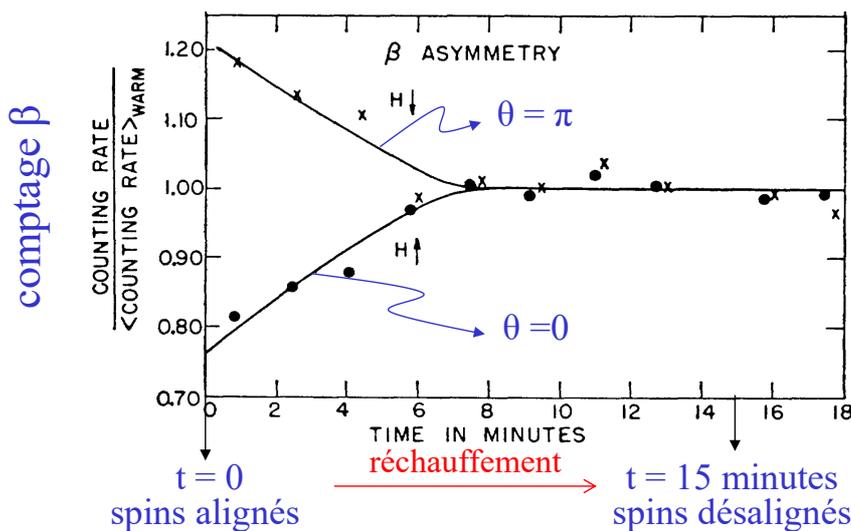
- La polarisation des noyaux de ^{60}Co est démontrée par l'anisotropie des γ émis par le $^{60}\text{Ni}^*$



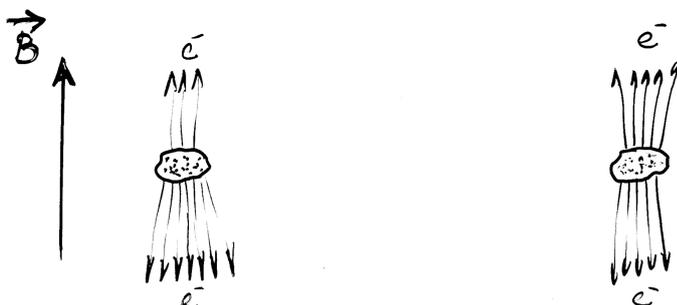
OS, 9 octobre 2024

83

Découverte de la violation de la parité



Wu et al., Phys. Rev. 105, 1413 (1957)

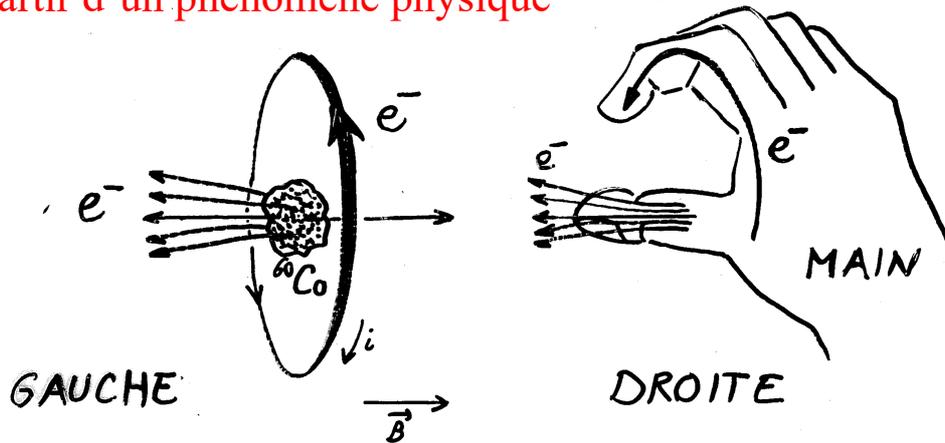
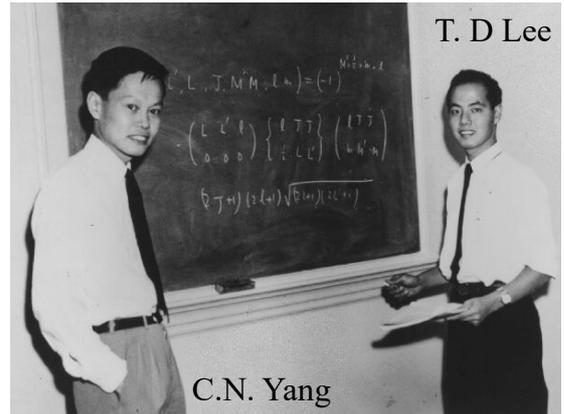


OS, 9 octobre 2024

84

Deux conséquences

- Lee et Yang reçoivent le prix Nobel (en 1957 !)
 - à l'âge de 31 et 35 ans
- Nous pouvons définir « GAUCHE » et « DROITE » à partir d'un phénomène physique



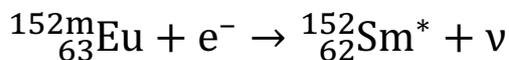
OS, 9 octobre 2024

85

Hélicité du neutrino

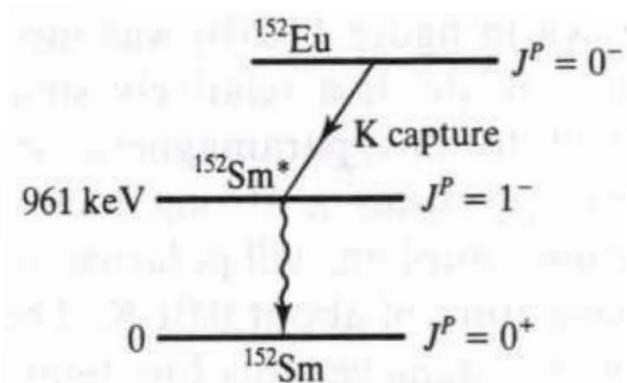
Goldhaber, Grodzins, Sunyar, Phys. Rev. 109, 1015 (1958)

- Capture électronique de l'euporium sur la couche K:



- Moment cinétique total

$$\vec{J}_{\text{tot}} = \vec{J}_{\text{Eu}} + \vec{J}_e + \vec{L}_K = \vec{0} + \frac{\vec{1}}{2} + \vec{0} = \frac{\vec{1}}{2}$$



- Désintégration γ du samarium excité: ${}^{152}_{62}\text{Sm}^* \rightarrow {}^{152}_{62}\text{Sm} + \gamma$
 - On s'intéresse au cas où le photon est émis dans la direction du samarium excité

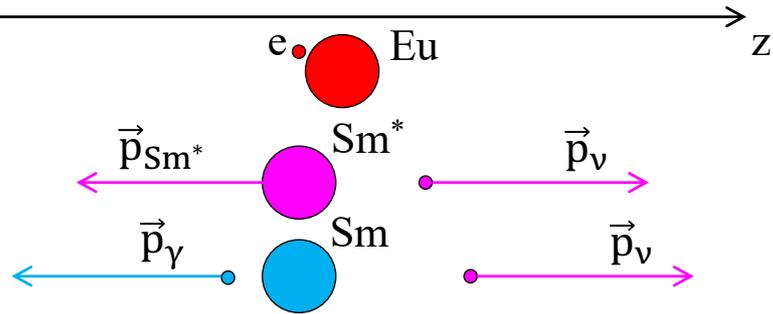
OS, 16 octobre 2024

86

Hélicité du neutrino

Goldhaber, Grodzins, Sunyar, Phys. Rev. 109, 1015 (1958)

- Axe z selon les quantités de mouvement:



- Projection des spins sur l'axe z avec somme égale à $J_{\text{tot},z} = \pm \frac{1}{2}$ (pas de moment cinétique orbital selon z)

- cas hélicité +1 $\leftarrow s_{\gamma,z} = -1$ $\rightarrow s_{\nu,z} = +\frac{1}{2}$
- cas hélicité -1 $\rightarrow s_{\gamma,z} = +1$ $\leftarrow s_{\nu,z} = -\frac{1}{2}$

- En mesurant la polarisation circulaire des photons, on détermine l'hélicité du neutrino: $H = -1$ (le neutrino est toujours gauche)

Modèle du noyau à particules indépendantes

- Hypothèses:

- Chaque nucléon i se meut indépendamment des autres sous l'effet d'un potentiel moyen reflétant l'action des $A-1$ autres nucléons
- Ce potentiel moyen ne dépend que de la position du nucléon i
- Ce potentiel a une symétrie sphérique (potentiel central)

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^A V_{ij} \\
 &= \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i=1}^A V_i \\
 &= \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i=1}^A V(\vec{r}_i) \\
 &= \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i=1}^A V(r_i)
 \end{aligned}$$

- Hamiltonien du noyau (dans le centre de masse)

$$H = \sum_{i=1}^A H_i \quad \text{où} \quad H_i = \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + V(r_i) = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}_i^2 + V(r_i)$$

Modèle à particules indépendantes (2)

- Fonction d'onde du noyau:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) \text{ telle que } H\psi = E\psi$$

- Comme H est une somme de termes H_i agissant sur des variables différentes (\vec{r}_i), on peut séparer les variables et chercher des solutions de la forme

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = \psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2)\dots\psi_A(\vec{r}_A) \text{ avec } H_i\psi_i = E_i\psi_i \text{ et } \sum_{i=1}^A E_i = E$$

- On est donc ramené à résoudre le problème d'un « nucléon indépendant » dans un potentiel central
 - détermination des états possibles (et donc du spectre) du nucléon indépendant
- On construit ensuite la fonction d'onde du noyau en respectant l'antisymétrie sous l'échange de deux nucléons identiques (principe d'exclusion de Pauli)

$$\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_k, \dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_A) = -\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_k, \dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_A) \text{ pour toute paire } j, k \text{ de nucléons identiques}$$

Fonction d'onde du noyau

- Fonction d'onde du nucléon j dans l'état k: $\psi_k(\vec{r}_j)$
 - $j = \underbrace{1, 2, \dots, Z}_{\text{protons}}, \underbrace{Z+1, \dots, A-1, A}_{\text{neutrons}}$ et k numérote les états occupés par les nucléons
- Fonction d'onde du noyau de Z protons et N = A-Z neutrons

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = \frac{1}{\sqrt{Z!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\vec{r}_1) & \psi_2(\vec{r}_1) & \dots & \psi_Z(\vec{r}_1) \\ \psi_1(\vec{r}_2) & \psi_2(\vec{r}_2) & \dots & \psi_Z(\vec{r}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(\vec{r}_Z) & \psi_2(\vec{r}_Z) & \dots & \psi_Z(\vec{r}_Z) \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_{Z+1}(\vec{r}_{Z+1}) & \dots & \psi_A(\vec{r}_{Z+1}) \\ \psi_{Z+1}(\vec{r}_{Z+2}) & \dots & \psi_A(\vec{r}_{Z+2}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{Z+1}(\vec{r}_A) & \dots & \psi_A(\vec{r}_A) \end{vmatrix}$$

- change de signe sous l'échange de deux nucléons identiques (permutation de deux lignes dans un des déterminants)
- nulle si deux nucléons identiques sont dans le même état (deux colonnes identiques dans un des déterminants)

Particule dans un potentiel central

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(r) \Rightarrow [H, \vec{L}] = 0 \quad \text{moment cinétique } \vec{L} = -i\hbar \vec{r} \wedge \vec{\nabla} \text{ conservé}$$

- On cherche les fonctions d'ondes $\psi(r, \theta, \phi)$ telles que

$$\begin{aligned} H\psi &= E\psi \\ \vec{L}^2 \psi &= \ell(\ell+1)\hbar^2 \psi \\ L_z \psi &= m\hbar \psi \end{aligned}$$

En coordonnées sphériques:

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2 r^2}$$

$$\vec{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

- Solutions: $\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_\ell^m(\theta, \phi)$

- les fonctions angulaires $Y(\theta, \phi)$ sont universelles (harmoniques sphériques)
- les fonctions radiales $R(r)$ dépendent de $V(r)$ et satisfont à

$$\left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V(r)) - \ell(\ell+1) \right] R(r) = 0 \quad \text{équation radiale}$$

Harmoniques sphériques (1)

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

harmoniques sphériques

ℓ et m entiers: $\ell = 0, 1, 2, \dots$ et $-\ell \leq m \leq \ell$

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (1-x^2)^\ell$$

fonctions associées de Legendre, définies dans l'intervalle $[-1, +1]$

$P_\ell^0(x)$ = polynôme de Legendre

$P_\ell^0(1) = 1$

- Les harmoniques sphériques

- sont les solutions des équations différentielles $\begin{cases} \vec{L}^2 Y_\ell^m(\theta, \phi) = \ell(\ell+1)\hbar^2 Y_\ell^m(\theta, \phi) \\ L_z Y_\ell^m(\theta, \phi) = m\hbar Y_\ell^m(\theta, \phi) \end{cases}$ où $\vec{L} = -i\hbar \vec{r} \wedge \vec{\nabla}$

- forment une base orthonormée des fonctions définies sur la sphère unité

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_\ell^m(\theta, \phi) Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \phi)^* \sin\theta d\theta d\phi = \delta^{\ell\ell'} \delta^{mm'}$$

Harmoniques sphériques (2)

- Propriétés:

- parité P = inversion d'espace

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$$

$$(r, \theta, \phi) \rightarrow (r, \pi - \theta, \phi + \pi)$$

$$P Y_\ell^m(\theta, \phi) = Y_\ell^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

- conjugaison complexe

$$Y_\ell^m(\theta, \phi)^* = (-1)^m Y_\ell^{-m}(\theta, \phi)$$

$$Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_1^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_1^1(\theta, \varphi) = -Y_1^{-1*}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}$$

$$Y_2^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_2^1(\theta, \varphi) = -Y_2^{-1*}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}$$

$$Y_2^2(\theta, \varphi) = Y_2^{-2*}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}$$

$$Y_3^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$

$$Y_3^1(\theta, \varphi) = -Y_3^{-1*}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{i\varphi}$$

$$Y_3^2(\theta, \varphi) = Y_3^{-2*}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{2i\varphi}$$

$$Y_3^3(\theta, \varphi) = -Y_3^{-3*}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \theta e^{3i\varphi}$$

Particule dans un potentiel central (suite)

- Equations différentielles pour la fonction radiale R(r)
(une pour chaque valeur de $\ell = 0, 1, 2, \dots$)

$$\left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V(r)) - \ell(\ell + 1) \right] R(r) = 0$$

- pour chaque ℓ , plusieurs solutions numérotées $n = 1, 2, \dots$ par ordre croissant d'énergie

$$E \rightarrow E_{n\ell}$$

$$R(r) \rightarrow R_{n\ell}(r)$$

$$\psi(r, \theta, \phi) \rightarrow \psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = R_{n\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

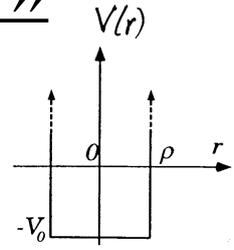
- Un état propre de H, L² et L_z d'une particule dans un potentiel central est défini par

- nombre quantique radial $n = 1, 2, \dots$
- nombre quantique orbital (moment cinétique orbital) $\ell = 0, 1, 2, \dots$
- nombre quantique magnétique $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$ ($2\ell+1$ valeurs)

Potentiels centraux « simples »

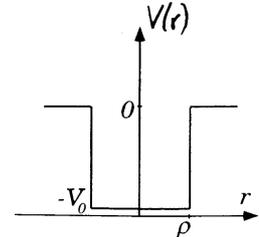
- Puits rectangulaire à paroi infinie

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{si } r < \rho \\ \infty & \text{si } r \geq \rho \end{cases}$$



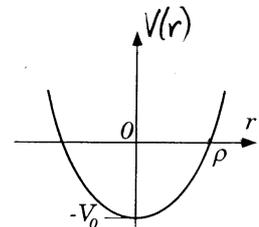
- Puits rectangulaire à paroi finie

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{si } r < \rho \\ 0 & \text{si } r \geq \rho \end{cases}$$



- Puits parabolique (oscillateur harmonique)

$$V(r) = -V_0 \left[1 - \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 \right] = -V_0 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad \text{avec } \omega^2 = \frac{2V_0}{m\rho^2}$$



- Puits coulombien
– inapproprié pour décrire les forces nucléaires
- $$V(r) = -\frac{C}{r}$$

OS, 16 octobre 2024

95

Puits rectangulaire infini

- Equation radiale pour $r < \rho$, $V(r) = -V_0$

$$\left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + r^2 \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0) - \ell(\ell + 1) \right] R(r) = 0$$

- Avec $x = kr$
 - pour chaque ℓ entier, deux solutions linéairement indép.
$$\left[\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d}{dx} \right) + x^2 - \ell(\ell + 1) \right] f(x) = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} j_\ell(x) & \text{fonction de Bessel sphérique d'ordre } \ell \\ \eta_\ell(x) & \text{fonction de Neumann sphérique d'ordre } \ell \end{cases}$$

- La solution physique doit être régulière à l'origine \Rightarrow

$$R(r) = \begin{cases} A j_\ell(kr) & \text{si } r < \rho \\ 0 & \text{si } r \geq \rho \end{cases} \quad (A = \text{normalisation})$$
 - continuité en $r = \rho$

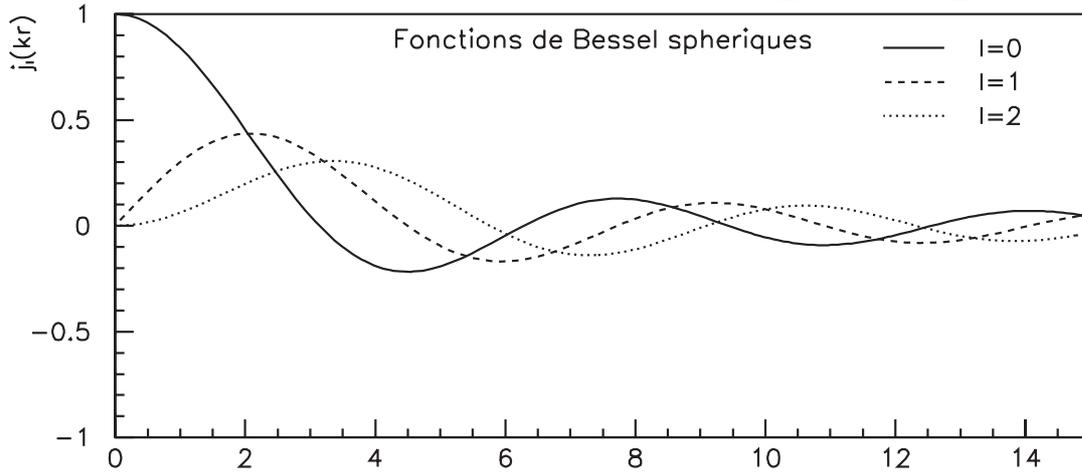
$$j_\ell(k\rho) = 0 \quad \text{condition de quantification sur } k$$

- Solutions: $k_{n\ell} = n^{\text{ième}} \text{ zéro de } j_\ell(k\rho) \Rightarrow E_{n\ell} = \frac{\hbar^2 k_{n\ell}^2}{2m} - V_0$
(sans compter le zéro à l'origine)

OS, 16 octobre 2024

96

Fonctions de Bessel sphériques



- Fonctions de Bessel

- régulières (c'est-à-dire finies) à l'origine

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3\cos x}{x^2}$$

- Fonctions de Neumann

- infinies à l'origine

$$\eta_0(x) = -\frac{\cos x}{x}$$

$$\eta_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$$

$$\eta_2(x) = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3\sin x}{x^2}$$

Puits rectangulaire fini (1)

- Equation radiale pour $r \geq \rho$, $V(r) = 0$

$$\left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + r^2 \overbrace{\frac{2m}{\hbar^2} E}^{-\kappa^2} - \ell(\ell+1) \right] R(r) = 0$$

car $E < 0$ (états liés)

- Avec $x = i\kappa r$

$$\left[\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d}{dx} \right) + x^2 - \ell(\ell+1) \right] f(x) = 0$$

même équation que précédemment !

- pour chaque ℓ , deux solutions linéairement indépendantes: $j_\ell(x)$ et $\eta_\ell(x)$
- la solution physique doit s'annuler pour $r \rightarrow \infty$, sans oscillations:

fonction de **Hankel** sphérique d'ordre ℓ
 $h_\ell(x) = j_\ell(x) + i \eta_\ell(x)$

- Solution complète:

$$R(r) = \begin{cases} A j_\ell(\kappa r) & \text{si } r < \rho \\ C h_\ell(i\kappa r) & \text{si } r \geq \rho \end{cases}$$

$$h_0(i\kappa r) = -\frac{1}{\kappa r} e^{-\kappa r}$$

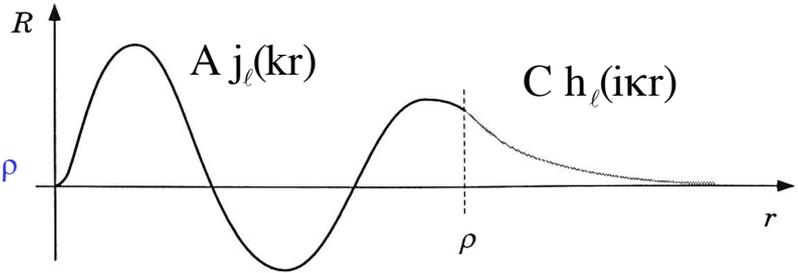
$$h_1(i\kappa r) = i \left(\frac{1}{\kappa^2 r^2} + \frac{1}{\kappa r} \right) e^{-\kappa r}$$

$$h_2(i\kappa r) = \left(\frac{3}{\kappa^3 r^3} + \frac{3}{\kappa^2 r^2} + \frac{1}{\kappa r} \right) e^{-\kappa r}$$

Puits rectangulaire fini (2)

- Pour chaque $\ell = 0, 1, 2, \dots$
 - **trois constantes** à déterminer
 - A, C et E (ou k ou \mathcal{K})
 - **trois conditions:**
 - normalisation de $R(r)$
 - continuité de $R(r)$ en $r = \rho$
 - continuité de dR/dr en $r = \rho$

$$R(r) = \begin{cases} A j_\ell(kr) & \text{si } r < \rho \\ C h_\ell(ikr) & \text{si } r \geq \rho \end{cases}$$



- Plusieurs solutions:
 - numérotation $n=1, 2, \dots$ par ordre croissant d'énergie
 - $n =$ nombre de zéros de $R(r)$
 - sans compter le zéro l'origine, mais y.c. le zéro à l'infini

$$E_{n\ell} = \frac{\hbar^2 k_{n\ell}^2}{2m} - V_0 < E_{n\ell}^{\text{puits infini}}$$

$$E_{n\ell} < 0 \text{ (état lié)}$$

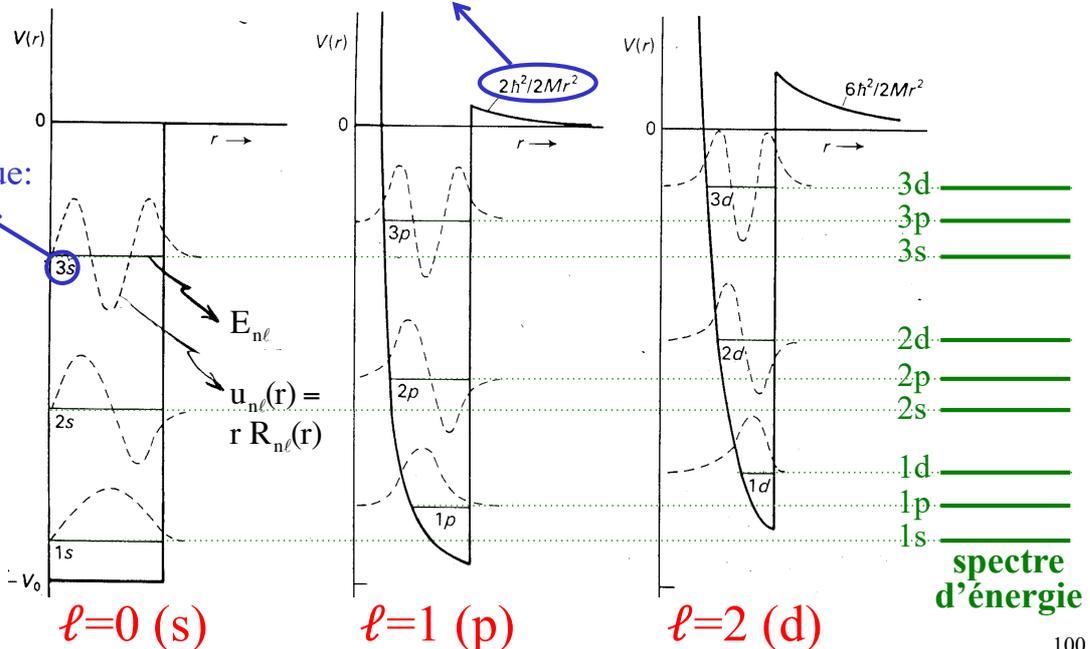
Puits rectangulaire fini (3)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + V(r) + \frac{\hbar^2}{2mr^2} \ell(\ell+1) \right] R(r) = E R(r)$$

« barrière angulaire »: terme s'additionnant à $V(r)$

$n\ell$ en notation spectroscopique:

- $\ell=0 \leftrightarrow s$
- $\ell=1 \leftrightarrow p$
- $\ell=2 \leftrightarrow d$
- $\ell=3 \leftrightarrow f$
- $\ell=4 \leftrightarrow g$
- $\ell=5 \leftrightarrow h$
- $\ell=6 \leftrightarrow i$
- $\ell=7 \leftrightarrow k$
- etc ...



spectre d'énergie

Dégénérescence des niveaux d'énergie

- Le nucléon est une particule de spin $s = 1/2$
- Fonction d'onde d'un état propre de H, L^2, L_z et S^2 et S_z

$$\psi_{n\ell m_\ell m_s}(r, \theta, \phi) = R_{n\ell}(r) Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \phi) \chi_s^{m_s}$$

état défini par
4 nombres
quantiques

- | | | | |
|---|--|---|--------------------------------------|
| { | n = nombre quantique radial | } | nombres
quantiques
magnétiques |
| | ℓ = nombre quantique orbital (moment cinétique) | | |
| | m_ℓ = projection du moment cinétique orbital | | |
| | m_s = projection du spin $s = 1/2$ | | |

$$H \psi_{n\ell m_\ell m_s}(r, \theta, \phi) = E_{n\ell} \psi_{n\ell m_\ell m_s}(r, \theta, \phi)$$

énergie $E_{n\ell}$
indépendante
de m_ℓ et m_s !

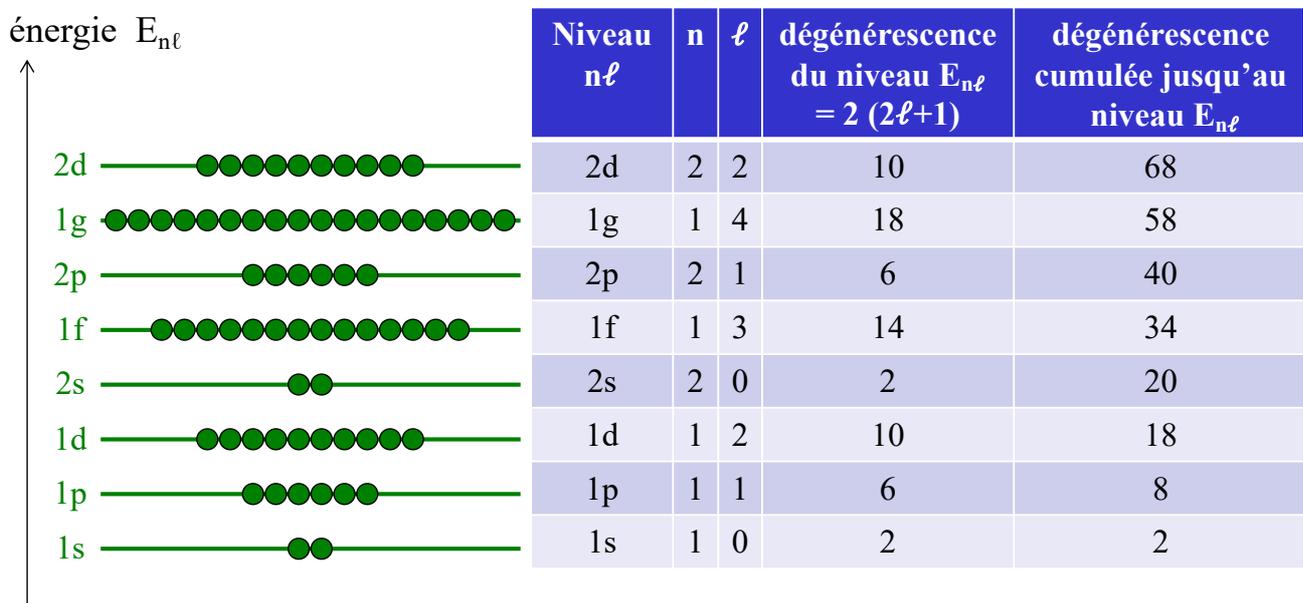
- Dégénérescence = nombre d'états distincts par niveau $E_{n\ell}$
 $= 2(2\ell+1)$

2 valeurs possibles pour m_s :
 $m_s = \pm 1/2$

$2\ell+1$ valeurs possibles pour m_ℓ :
 $m_\ell = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$

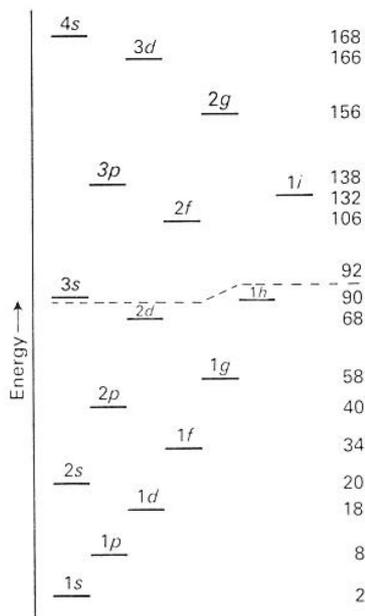
Remplissage des niveaux d'énergie

- Principe d'exclusion de Pauli appliqué séparément aux neutrons et aux protons
 - pour une des deux espèces:

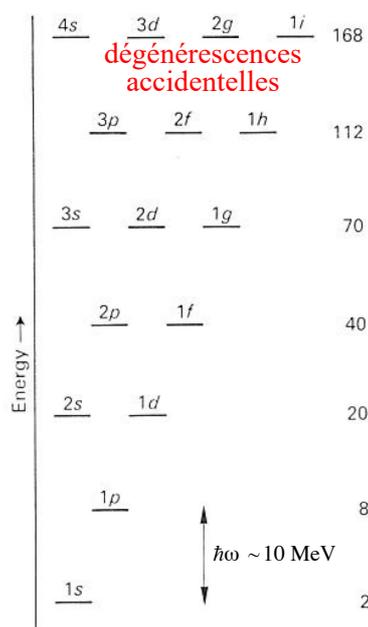


Comparaison entre différents spectres

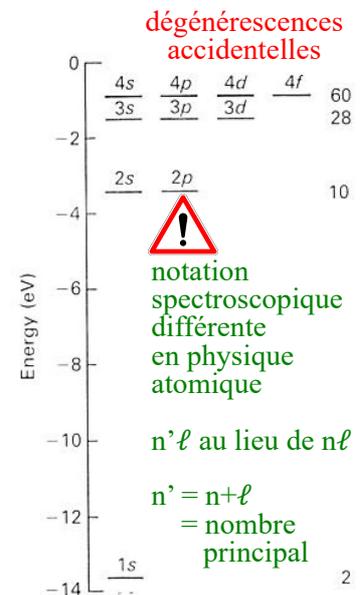
potentiel rectangulaire (noyau)



potentiel harmonique (noyau)



potentiel coulombien (atome H)



$$E_{n\ell} = \hbar\omega \left(2n + \ell - \frac{1}{2} \right) - V_0$$

$$E_{n\ell} = -\frac{E_1}{(n + \ell)^2} \equiv -\frac{E_1}{n'^2}$$

OS, 16 octobre 2024

103

Nombres magiques

- Un **noyau magique** est un noyau ayant un **nombre magique** de neutrons ou de protons
- Dans un noyau magique, les neutrons ou les protons ne forment que des **couches complètes**
- Nombres magiques:

... observés	2	8	20	28	50	82	126	
... prédits par potentiel rectangulaire	2	8	20	34	40	58	92	138
... prédits par potentiel harmonique	2	8	20	40	70	112		

- Question:
 - quel est le potentiel $V(r)$ qui peut prédire correctement tous les nombres magiques ?

OS, 30 octobre 2024

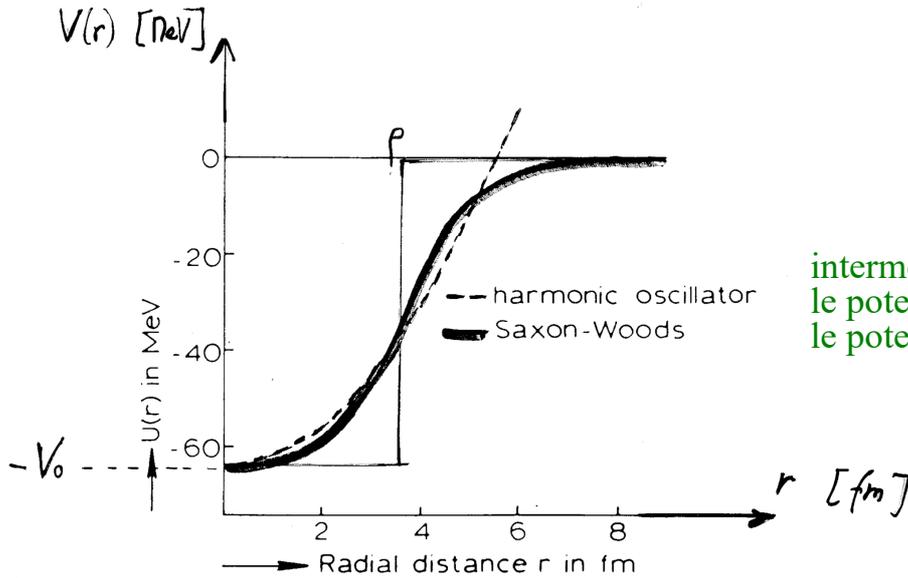
104

Potentiel de Saxon-Woods

- Déterminé empiriquement à partir de mesures de densité nucléaire

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp(\mu(r - \rho))}$$

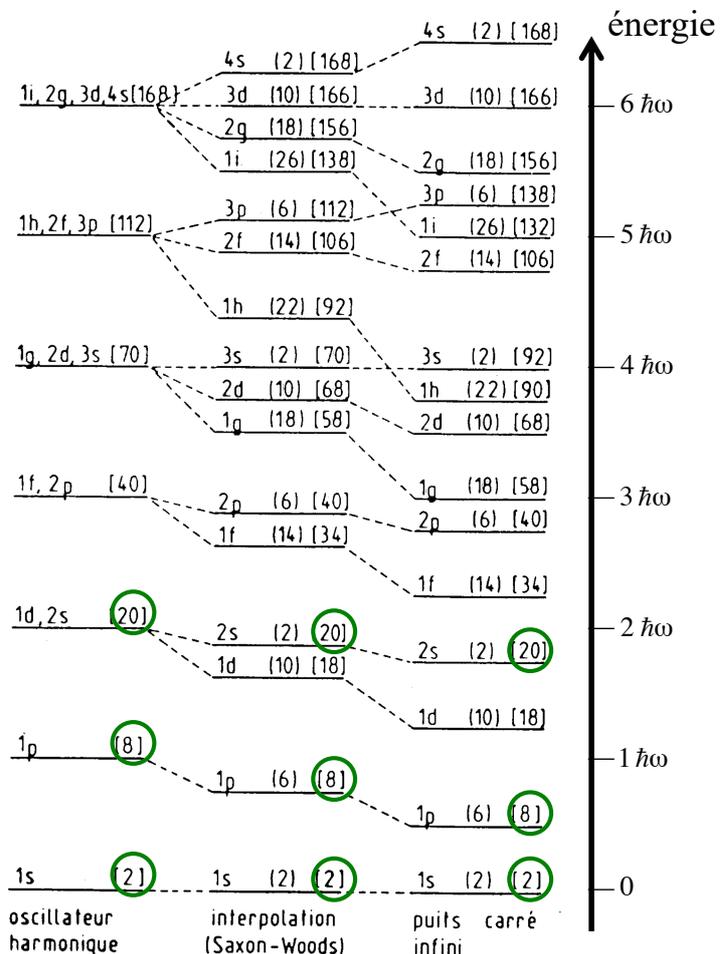
$V_0 = 50-60 \text{ MeV}$
 $\rho = r_0 A^{1/3}, r_0 \sim 1.2 \text{ fm}$
 $\mu = 1-2 \text{ fm}^{-1}$



intermédiaire entre
le potentiel harmonique et
le potentiel rectangulaire

Spectre avec potentiel de Saxon-Woods

- Nombres magiques reproduits
- 2, 8, 20
- Nombres magiques pas reproduits
- 28, 50, 82, 126



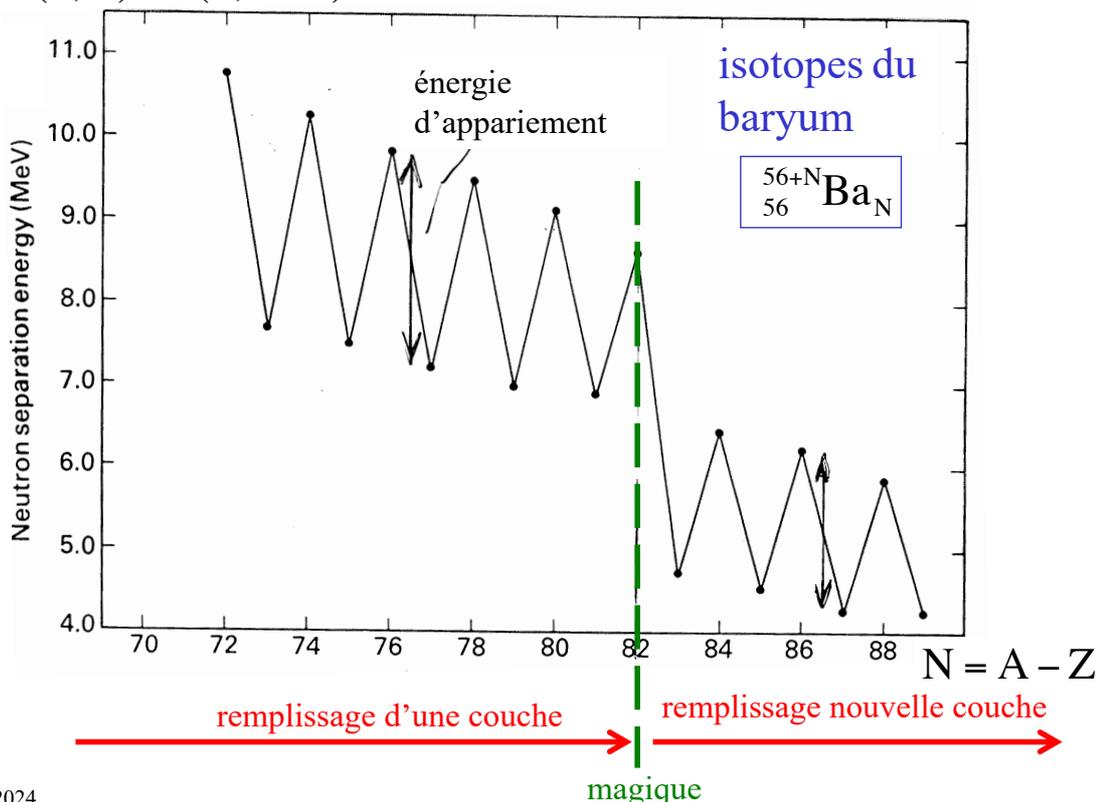
Modèle en couches

Modèle en couches de la physique nucléaire
 = modèle à nucléon indépendant permettant de
 reproduire les nombres magiques

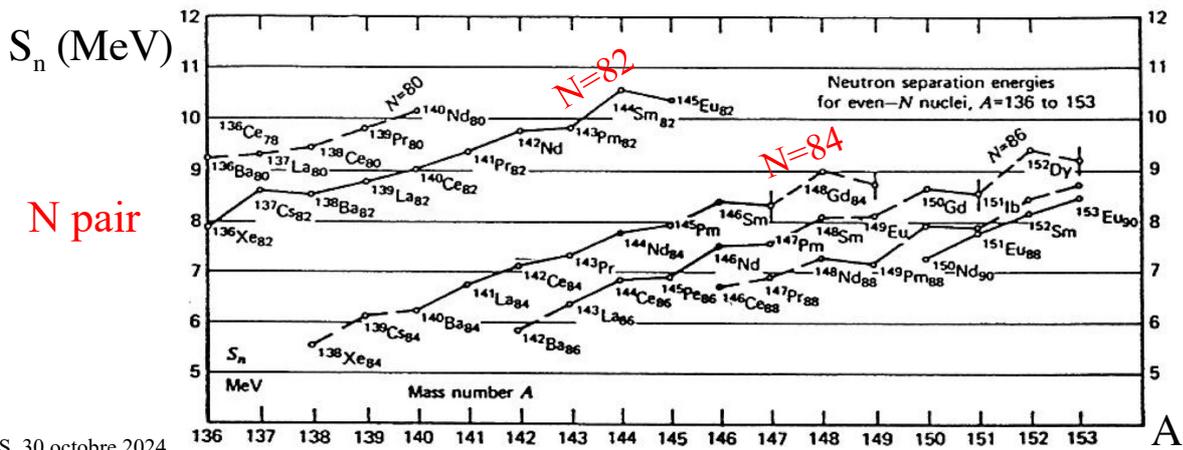
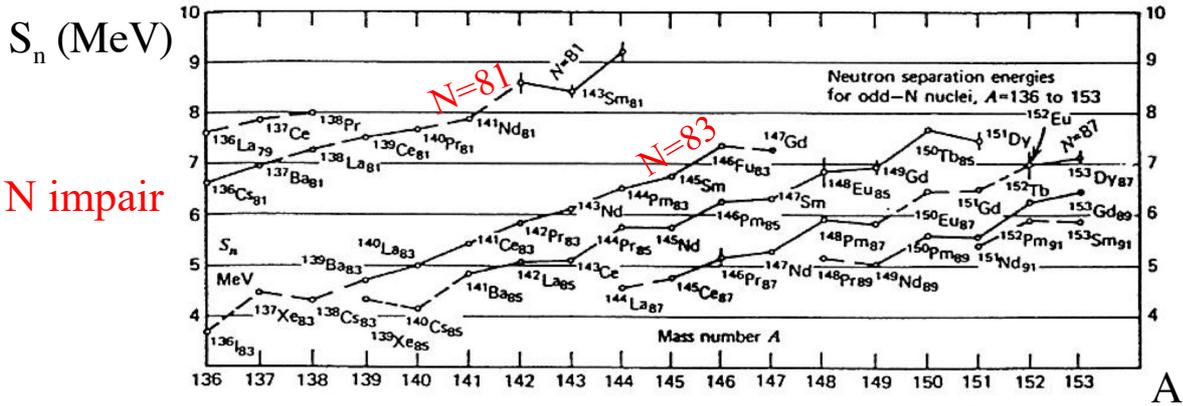
- Evidences expérimentales en faveur des nombres magiques
 - **2, 8, 20, 28, 50, 82, 126**
- Potentiel permettant de reproduire les nombres magiques
 - potentiel non-central, avec couplage spin-orbite
- Prédictions du modèles en couches et comparaison avec les mesures expérimentales
 - spin-parité des niveaux fondamentaux et excités
 - moment magnétique dipolaire
 - moment électrique quadrupolaire

Energie de séparation du neutron le moins lié

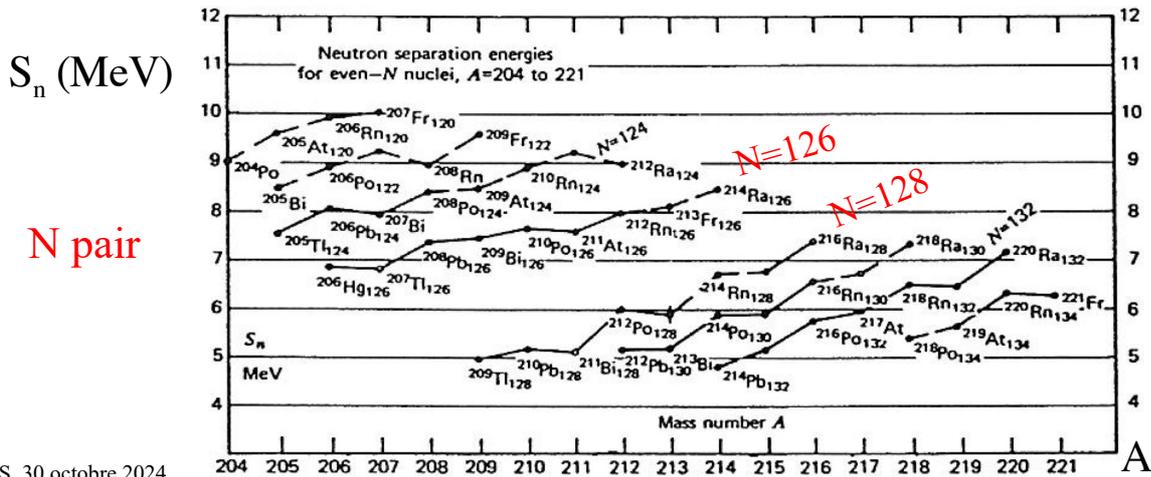
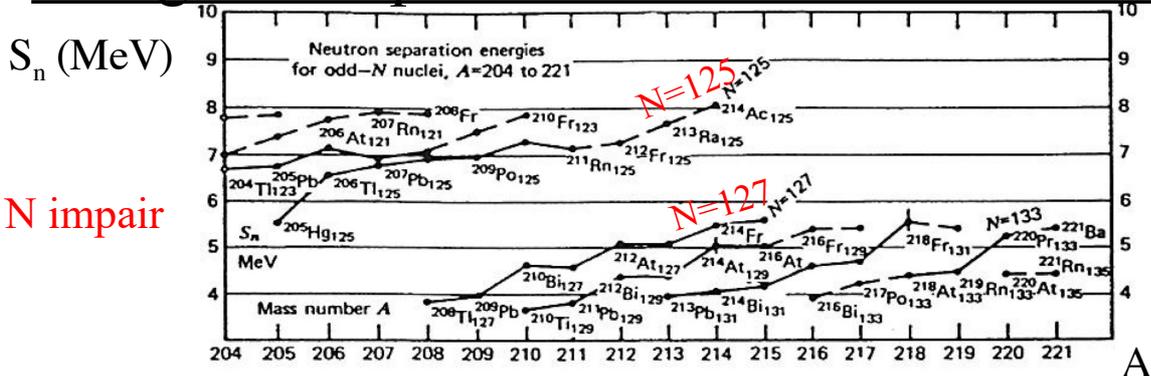
$$S_n = B(Z, A) - B(Z, A - 1)$$



Energie de séparation du neutron le moins lié



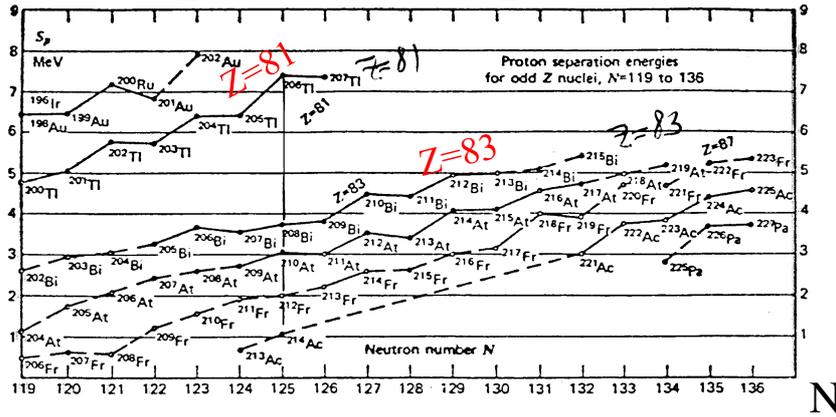
Energie de séparation du neutron le moins lié



Energie de séparation du proton le moins lié

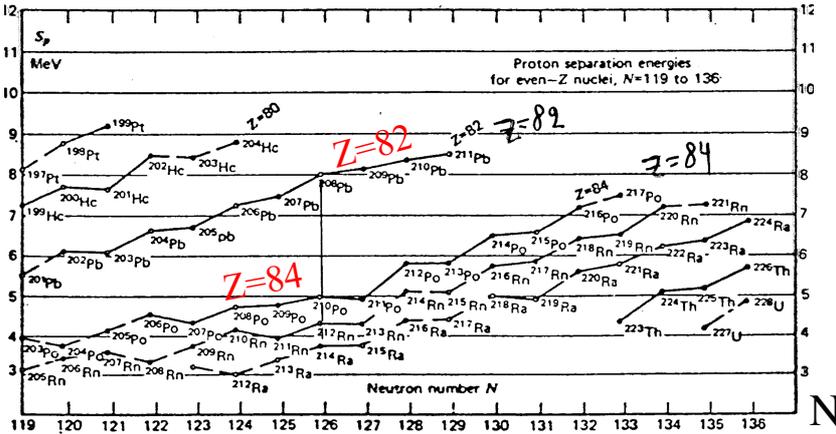
S_p (MeV)

Z impair



S_p (MeV)

Z pair

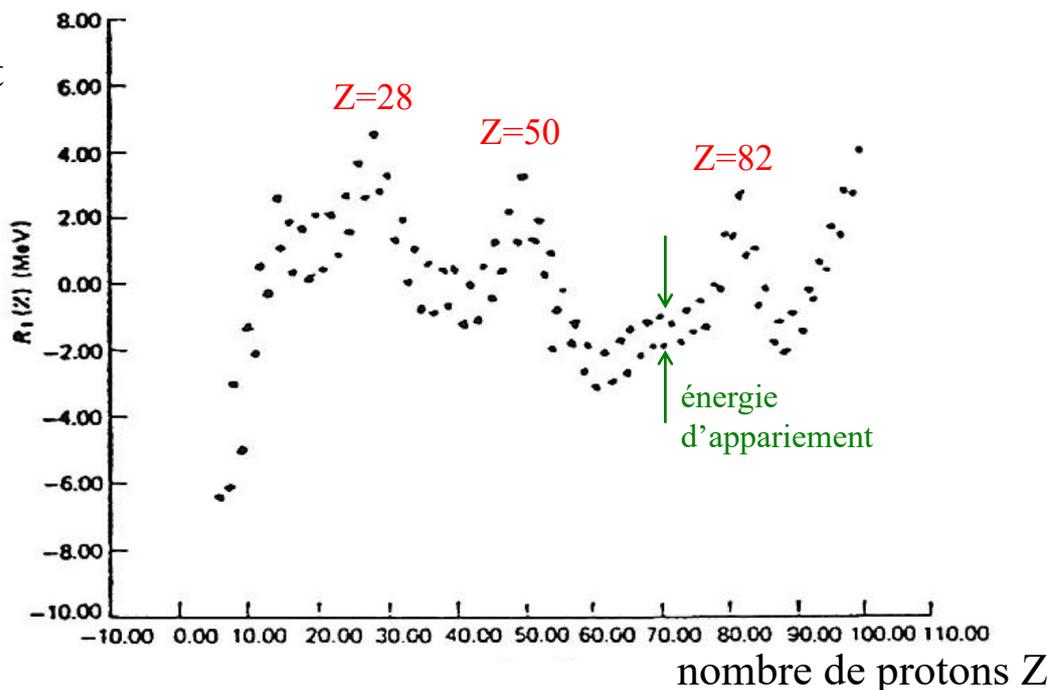


OS, 30 octobre 2024

111

Irrégularités de l'énergie de liaison

résidu =
 $B(Z,A) - \text{fit}$
en MeV



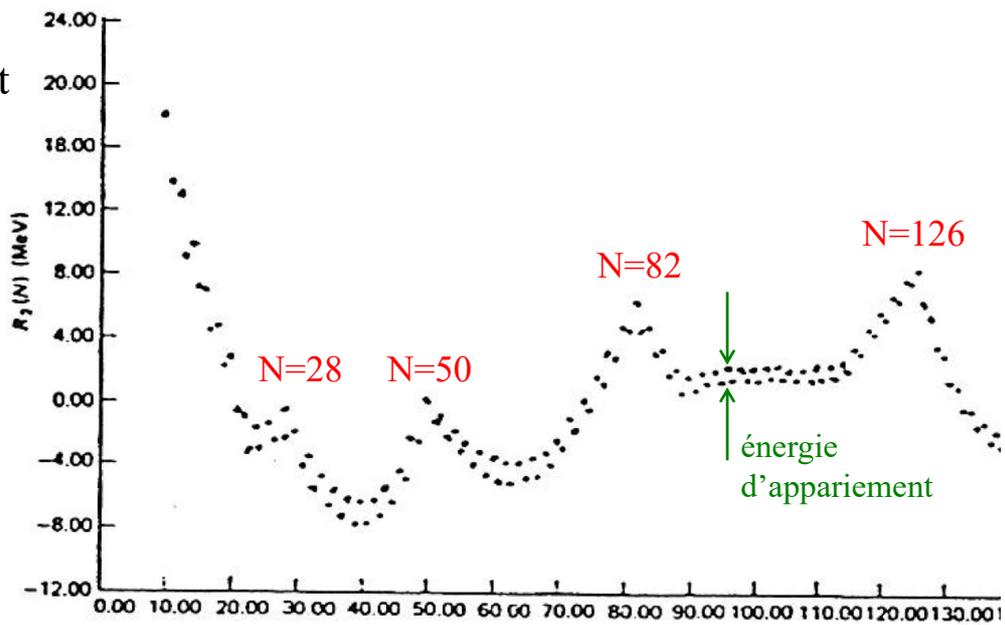
fit = polynôme de degré 2 en A et Z

OS, 30 octobre 2024

112

Irrégularités de l'énergie de liaison

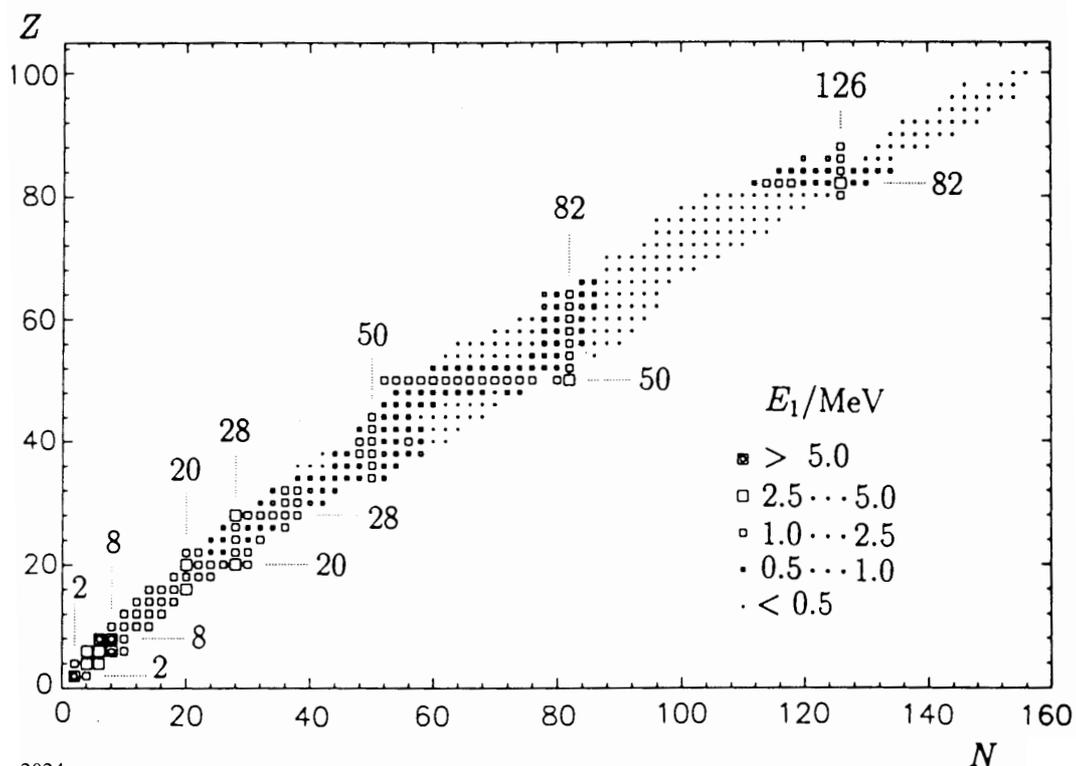
résidu =
 $B(Z,A) - \text{fit}$
 en MeV



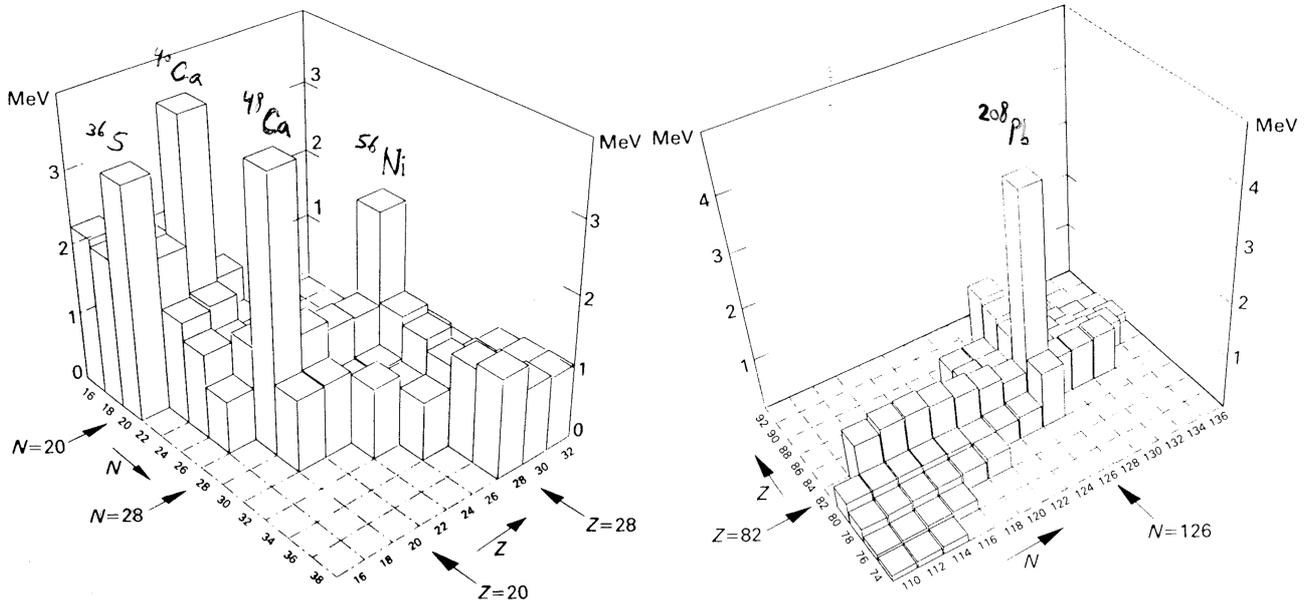
nombre de neutrons N

fit = polynôme de degré 2 en A et Z

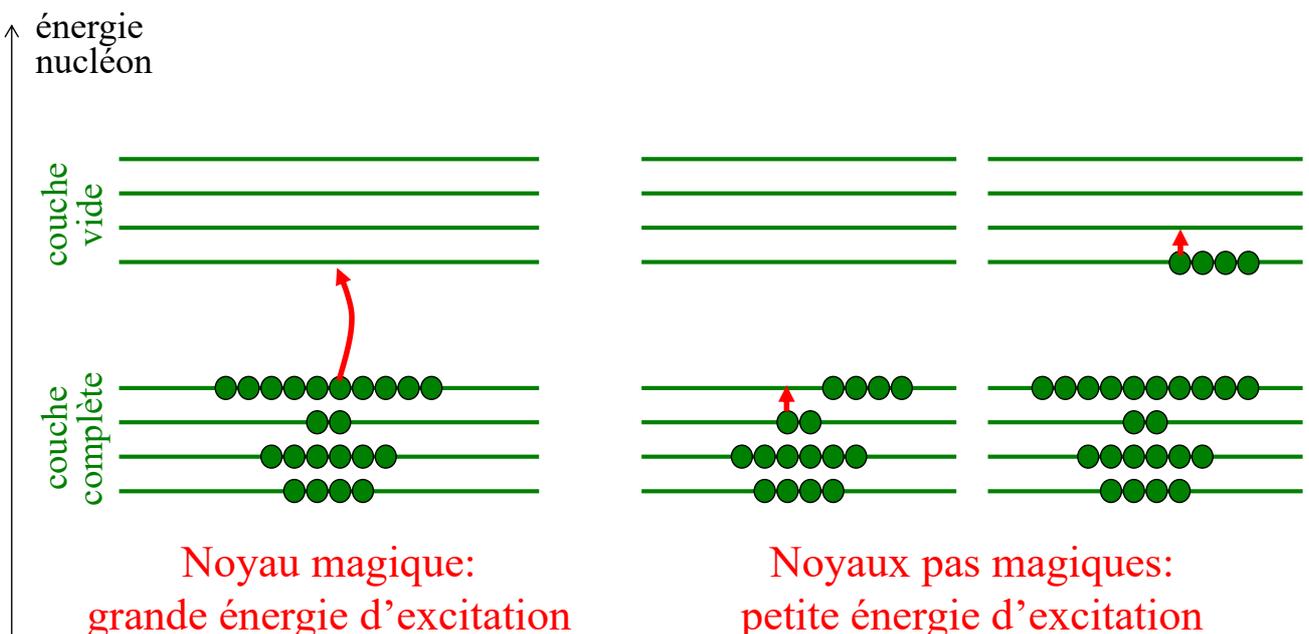
Energie d'excitation du premier niveau excité des noyaux pair-pair



Energie d'excitation du premier niveau excité des noyaux pair-pair



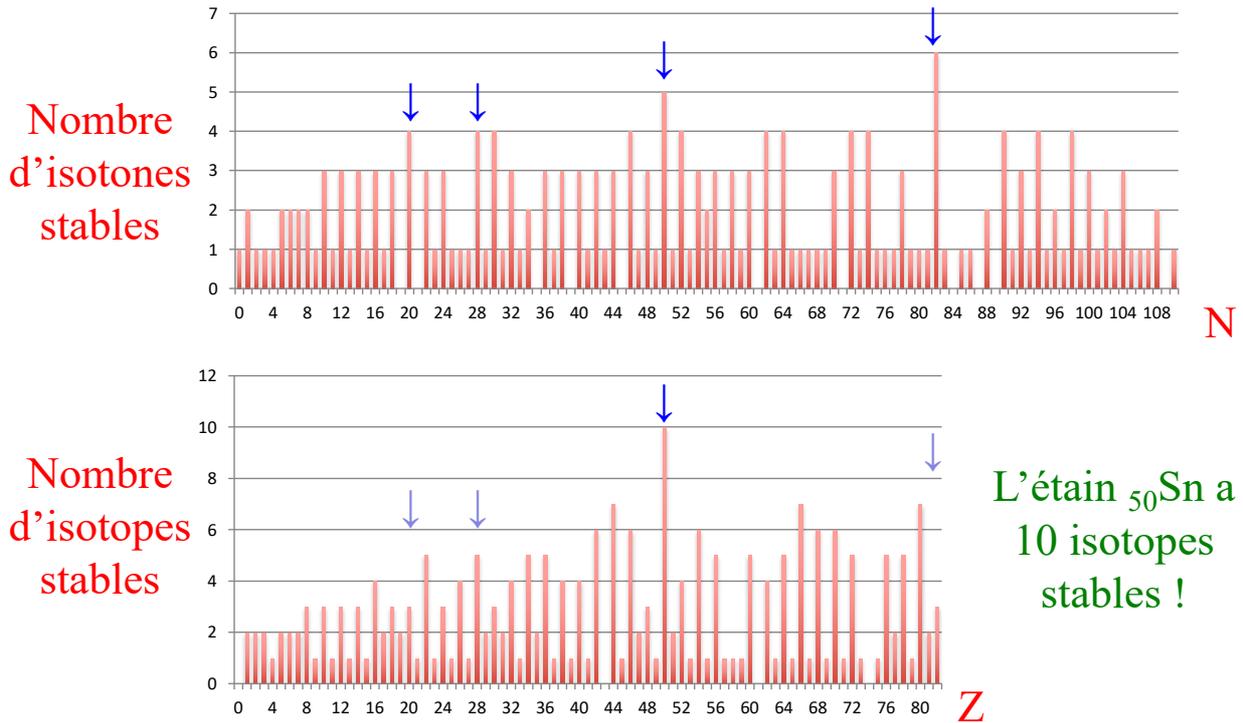
Energie d'excitation du premier niveau excité des noyaux pair-pair



Nombre d'isotones ou isotopes stables

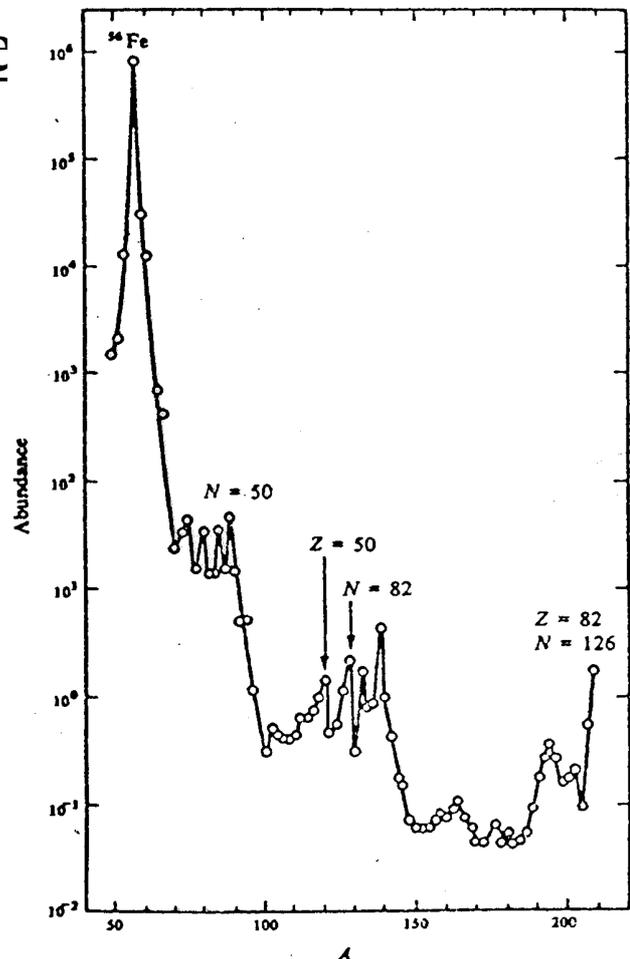
isotones ↔ même N
isotopes ↔ même Z

en général plus élevé pour les noyaux magiques

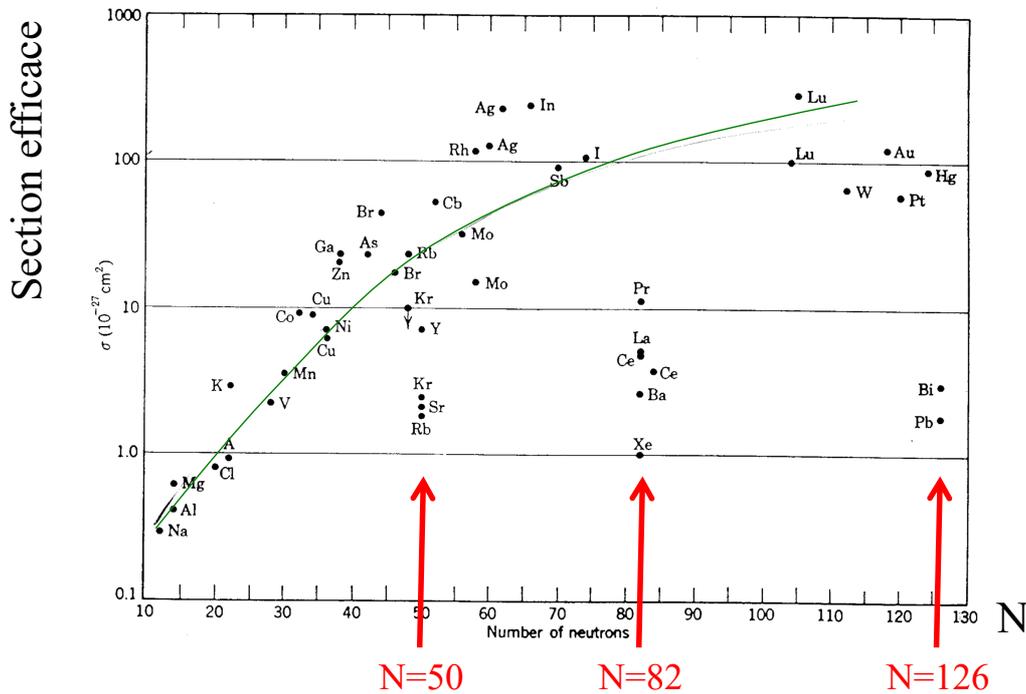
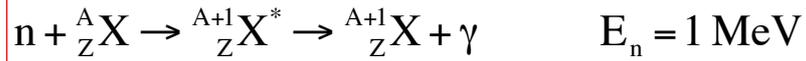


Abondance naturelle relative des noyaux

^1H : 93%
 ^4He : 7%
autres: 0.1%



Capture radiative des neutrons lents



OS, 30 octobre 2024

119

Couplage spin-orbite

- Introduit (sur suggestion de Fermi) en 1949 par
 - Maria Goeppert-Mayer (Chicago)
 - J. Hans D. Jensen (Heidelberg)

} $\frac{1}{2}$ prix Nobel 1963



$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(r) + \xi(r) \vec{\ell} \cdot \vec{s}$$

potentiel central (p. ex. Saxon-Woods)

interaction spin-orbite

$\vec{\ell}$ = moment cinétique orbital du nucléon

\vec{s} = spin du nucléon

- Les fonctions propres de $\vec{\ell}^2$, ℓ_z , \vec{s}^2 , s_z et $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(r)$

$$\psi_{n\ell m_\ell m_s}(r, \theta, \phi) = R_{n\ell}(r) Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \phi) \chi_s^{m_s}$$

ne sont pas des fonctions propres de H car

$$[H, \ell_z] = \xi(r) [\vec{\ell} \cdot \vec{s}, \ell_z] \neq 0 \quad \text{et} \quad [H, s_z] = \xi(r) [\vec{\ell} \cdot \vec{s}, s_z] \neq 0$$

OS, 30 octobre 2024

120

Couplage spin-orbite (suite)

- Moment cinétique total du nucléon indépendant:

$$\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$$

- les opérateurs H , $\vec{\ell}^2$, \vec{s}^2 , \vec{j}^2 et j_z commutent entre eux
- on cherche donc des fonctions stationnaires ψ telles que

$$\begin{aligned} H\psi &= E\psi \\ \vec{\ell}^2\psi &= \ell(\ell+1)\hbar^2\psi \\ \vec{s}^2\psi &= s(s+1)\hbar^2\psi \\ \vec{j}^2\psi &= j(j+1)\hbar^2\psi \\ j_z\psi &= m\hbar\psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell &= 0, 1, 2, \dots \\ s &= \frac{1}{2} \\ j &= \ell \pm \frac{1}{2} \\ m &= -j, -j+1, \dots, j-1, j \end{aligned}$$

- Valeurs propres $\lambda_{\ell j}$ de $\vec{\ell} \cdot \vec{s}$: $\vec{\ell} \cdot \vec{s} \psi = \lambda_{\ell j} \psi$

$$\lambda_{\ell j} = \frac{1}{2} \hbar^2 [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] = \begin{cases} +\frac{1}{2} \hbar^2 \ell & \text{si } j = \ell + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \hbar^2 (\ell + 1) & \text{si } j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Couplage spin-orbite (suite)

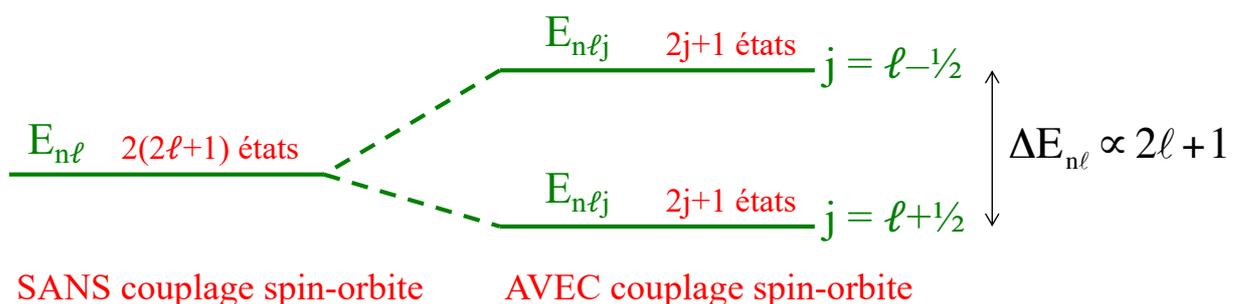
- Nouvelle équation radiale

$$\left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V(r) - \xi(r) \lambda_{\ell j}) - \ell(\ell+1) \right] R(r) = 0$$

- pour chaque $\ell > 0$, deux équations radiales différentes ($j = \ell + \frac{1}{2}$ et $j = \ell - \frac{1}{2}$)
- pour chaque couple ℓj , plusieurs solutions numérotées $n = 1, 2, \dots$ par ordre croissant d'énergie

$$\begin{cases} E \rightarrow E_{n\ell j} \\ R(r) \rightarrow R_{n\ell j}(r) \\ \psi \rightarrow \psi_{n\ell j m} \end{cases}$$

- « Splitting » (clivage) des niveaux pour $\ell > 0$:



Spectre d'énergie d'un nucléon

Notation des niveaux d'énergie:

$$n\ell j$$

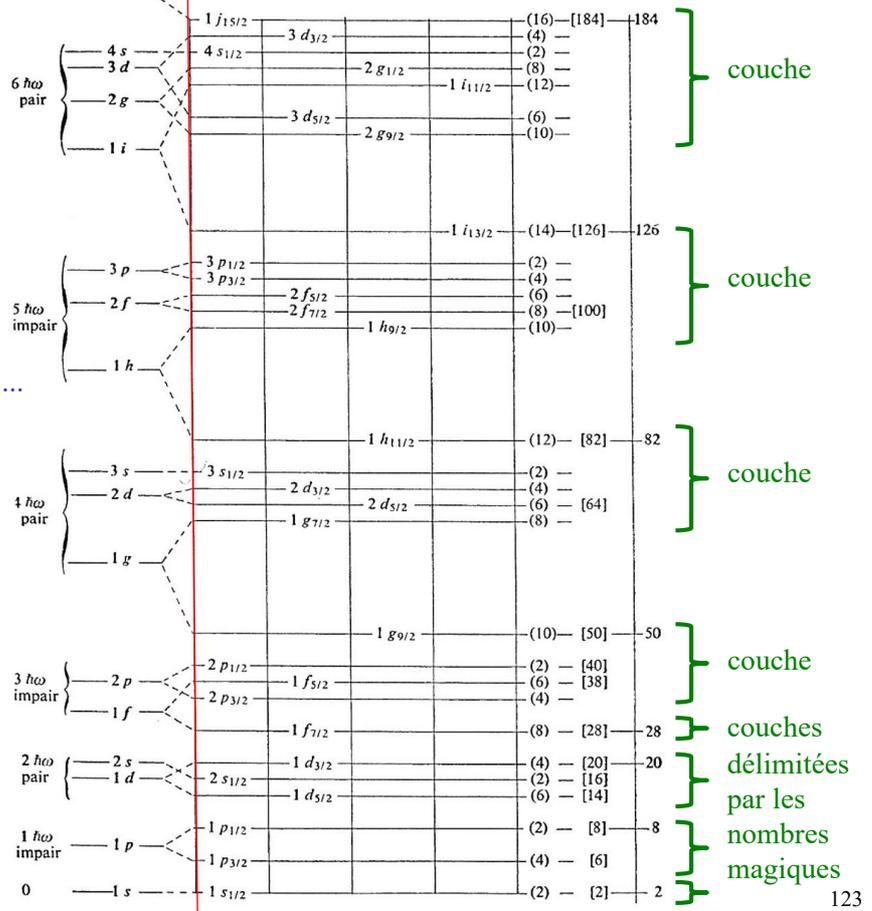
nombre quantique radial $n=1, 2, \dots$
moment cinétique orbital $\ell= s, p, d, \dots$
moment cinétique total $j=\ell \pm \frac{1}{2}$

Note:

- le spectre diffère légèrement pour les protons et les neutrons si l'on tient compte du potentiel de Coulomb
- le spectre dépend légèrement de A (extension radiale du potentiel)
- interversions possibles des niveaux dans les couches supérieures ($N, Z > 50$)

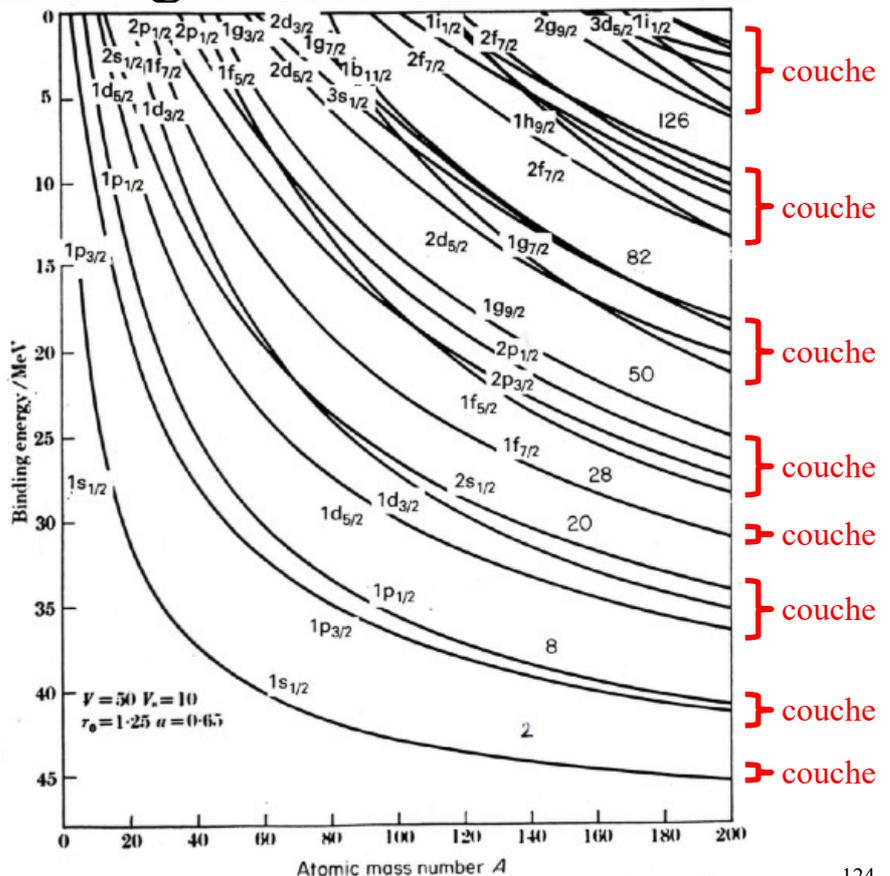
OS, 6 novembre 2024

SANS AVEC couplage spin-orbite



Niveaux d'énergie en fonction de A

- Le potentiel $V(r)$ dépend du rayon du noyau, donc de A
 - La séquence des niveaux d'énergie dépend de A, mais ...
 - ... les nombres magiques restent largement indépendants de A



OS, 6 novembre 2024

124

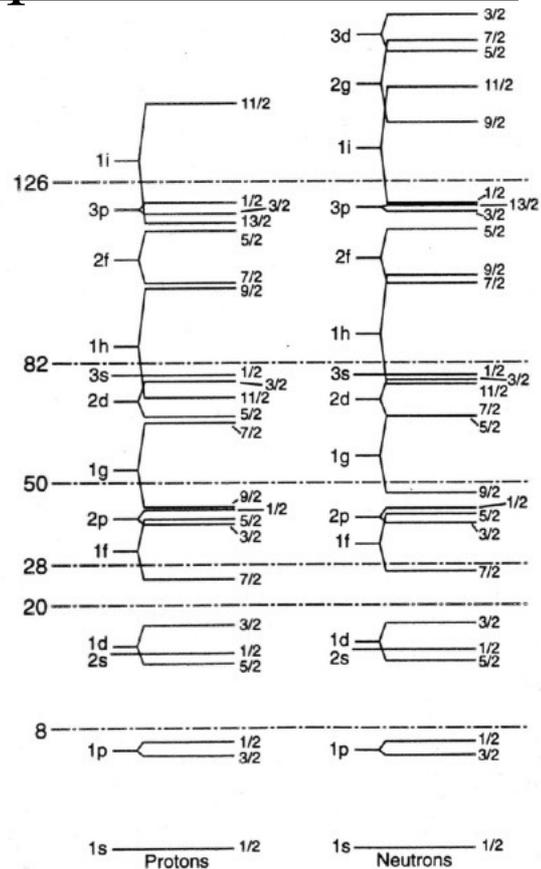
Spectre d'énergie: proton et neutron

- Pour les protons, répulsion Coulombienne:

$$H(r) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V_{\text{Saxon-Woods}}(r) + \left(I_3 + \frac{1}{2}\right) V_{\text{Coulomb}}(r) + \xi(r) \vec{\ell} \cdot \vec{s}$$

- $I_3 = 3^{\text{ème}}$ composante isospin (+1/2 proton, -1/2 neutron)

- Les spectres des protons et neutrons sont légèrement différents, mais les nombres magiques restent les mêmes



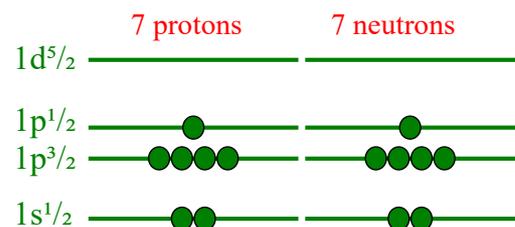
Configuration d'un noyau

- Remplissage des niveaux $n\ell j$ avec Z protons et N neutrons
 - au maximum $2j+1$ protons ou neutrons par niveau $n\ell j$ (dégénérescence par rapport à m et principe d'exclusion)

Configuration = donnée des nombres quantiques $n\ell j$ de chacun des nucléons du noyau

- NB: la configuration ne suffit pas à déterminer la fonction d'onde du noyau

- Exemple:
 - état fondamental (configuration d'énergie minimale) du noyau ^{14}N



- notation: $[p: (1s^{1/2})^2(1p^{3/2})^4(1p^{1/2})^1; n: (1s^{1/2})^2(1p^{3/2})^4(1p^{1/2})^1]$
- notation abrégée: $[p: (1p^{1/2})^1; n: (1p^{1/2})^1]$

Energie, parité et spin des noyaux

- Energie totale
(cinétique + potentielle)

$$E = \sum_{i=1}^A E_{n_i \ell_i j_i}$$

ne dépend
que de la
configuration

- Parité totale
= parité du noyau

$$P = \prod_{i=1}^A (-1)^{\ell_i} = (-1)^{\sum_{i=1}^A \ell_i}$$

ne dépend
que de la
configuration

- Moment cinétique total
= spin du noyau
= spin nucléaire

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^A \vec{j}_i = \sum_{i=1}^A (\vec{\ell}_i + \vec{s}_i)$$

- Pour trouver les valeurs possibles de J, il faut appliquer la règle de composition des moments cinétiques et l'antisymétrisation de la fonction d'onde totale des protons et des neutrons

Spin-parité des noyaux

- Niveau $n\ell j$ complet (occupé par $2j+1$ nucléons identiques)

$$P = \prod_{i=1}^{2j+1} (-1)^{\ell} = (-1)^{\ell(2j+1)} = +1$$

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^{2j+1} \vec{j}_i \quad M = \text{valeur propre de } J_z = \sum_{i=1}^{2j+1} m_i = \sum_{m=-j}^j m = 0$$

principe d'exclusion

→ état unique (non dégénéré), $J^P = 0^+$

- Ensemble de plusieurs niveaux complets

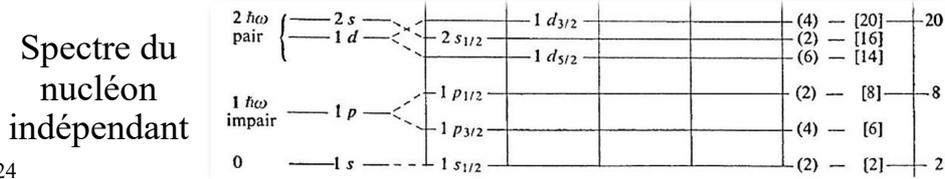
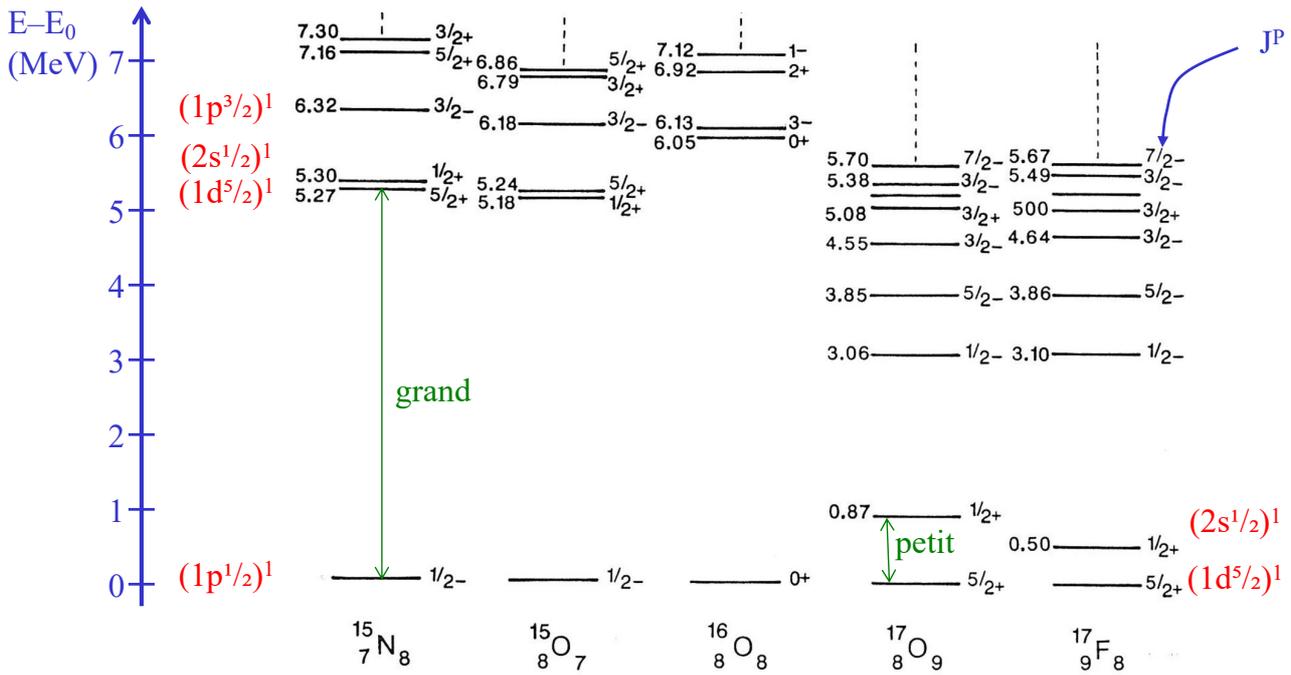
→ état unique (non dégénéré), $J^P = 0^+$

- Ensemble de plusieurs niveaux complets

+ un niveau $n\ell j$ occupé par un seul nucléon

→ état dégénéré $2j+1$ fois, $J = j$, $P = (-1)^{\ell}$

Spectres expérimentaux (^{15}N , ^{15}O , ^{16}O , ^{17}O , ^{17}F)



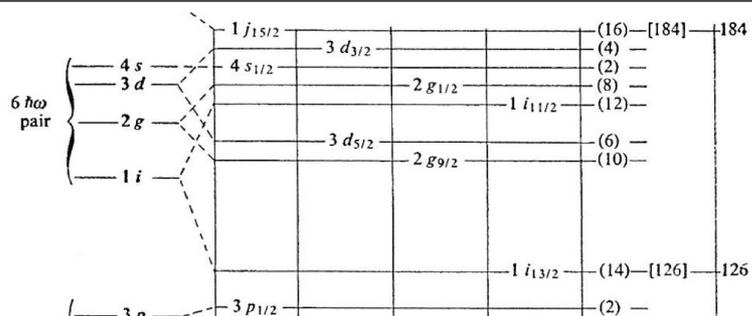
Spectre expérimental du $^{209}_{82}\text{Pb}$

- Couches complètes (82 protons et 126 neutrons) + 1 neutron tout seul dans la dernière couche ($6 \hbar\omega$)

- le spectre expérimental des premiers niveaux excités du noyau donne la séquence des niveaux individuels du neutron dans la dernière couche

J^π	$^{209}_{82}\text{Pb}$	E^* [MeV]	Config.
$1/2^-$		2,152	$(2g_{9/2})^2(3p_{1/2})$
$1/2^+$		2,032	$4s_{1/2}$
$5/2^+$		1,566	$3d_{5/2}$
$15/2^-$		1,422	$1j_{15/2}$
$11/2^+$		0,778	$1i_{11/2}$
$9/2^+$			$2g_{9/2}$

Spectre du nucléon indépendant



Niveau $n\ell j$ occupé par deux nucléons

- Exemple: noyau $^{18}_9\text{F}$ de configuration [p: $(1d^{5/2})^1$; n: $(1d^{5/2})^1$]
 - deux nucléons **différents** sur un même niveau avec $j = 5/2$
 - dénombrement des états et détermination de leurs valeurs de $M = m_1 + m_2$
 - tableau de Slater:

$m_1 \backslash m_2$	-5/2	-3/2	-1/2	1/2	3/2	5/2
-5/2	-5	-4	-3	-2	-1	0
-3/2	-4	-3	-2	-1	0	1
-1/2	-3	-2	-1	0	1	2
1/2	-2	-1	0	1	2	3
3/2	-1	0	1	2	3	4
5/2	0	1	2	3	4	5

- valeurs possibles pour J : 0, 1, 2, 3, 4, 5
- parité totale positive

Niveau $n\ell j$ occupé par deux nucléons

- Exemple: noyau $^{18}_8\text{O}$ de configuration [n: $(1d^{5/2})^2$]
 - deux nucléons **identiques** sur un même niveau avec $j = 5/2$
 - dénombrement des états et la détermination de leurs valeurs de $M = m_1 + m_2$
 - tableau de Slater:

$m_1 \backslash m_2$	-5/2	-3/2	-1/2	1/2	3/2	5/2
-5/2	-5	-4	-3	-2	-1	0
-3/2	-4	-3	-2	-1	0	1
-1/2	-3	-2	-1	0	1	2
1/2	-2	-1	0	1	2	3
3/2	-1	0	1	2	3	4
5/2	0	1	2	3	4	5

états indiscernables

principe d'exclusion

- valeurs possibles pour J : 0, 2, 4
- parité totale positive

Spectre expérimental du $^{210}_{84}\text{Po}$

- Configuration du $^{210}_{84}\text{Po}$ dans l'état fondamental: [p: (1h^{9/2})²]

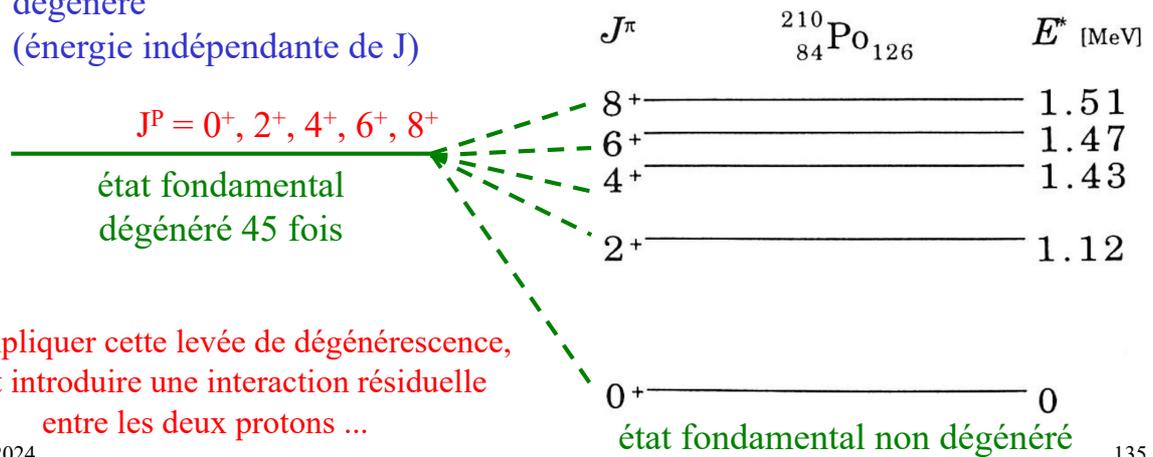
– prédictions du modèle en couches à particule indépendante pour le niveau fondamental

– spectre expérimental des premiers niveaux du $^{210}_{84}\text{Po}$

- valeurs possibles du spin-parité:

$$J^P = 0^+, 2^+, 4^+, 6^+, 8^+$$

- niveau fondamental totalement dégénéré (énergie indépendante de J)



OS, 6 novembre 2024

135

Appariement des nucléons identiques

- Fait d'expérience:

Tous les noyaux pair-pair ont $J^P = 0^+$

- On améliore donc le modèle:

– addition d'interactions résiduelles entre paires de nucléons identiques sur un même niveau $n\ell j$

$$H_{\text{noyau}} = \sum_{i=1}^A H_i + \sum_{\substack{j,k \\ j>k}}^{\text{niveaux incomplets}} V_{jk}$$

- on abandonne donc la stricte indépendance des nucléons

– l'interaction résiduelle V_{jk} est telle qu'une paire de nucléons identiques sur un même niveau $n\ell j$ est davantage liée si

$$\vec{J}_{\text{paire}} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{0}$$

– l'énergie d'appariement croît avec la valeur de ℓ

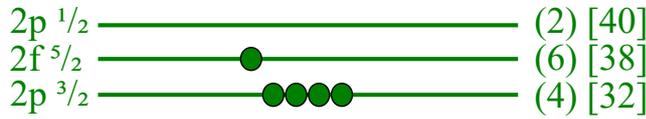
OS, 13 novembre 2024

136

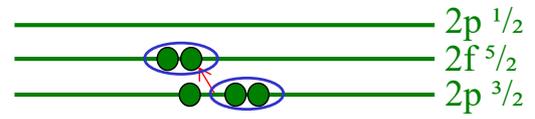
Energie d'appariement

- Exemple du $^{61}_{28}\text{Ni}$

– configuration de l'état fondamental pour les 33 neutrons



Prédiction sans appariement
 $J^P = 5/2^-$



Prédiction avec appariement
 $J^P = 3/2^-$

Valeur observée

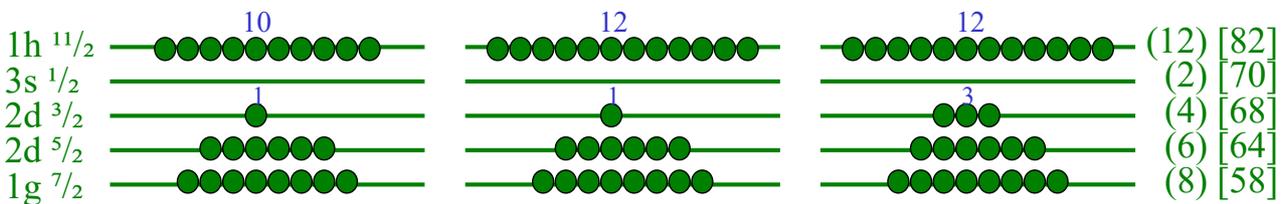
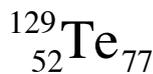
$J^P = 3/2^-$

en faveur du modèle avec appariement qui croît avec ℓ

Energie d'appariement

- Isotopes du $_{52}\text{Te}$ avec N impair

– prédictions du modèle avec appariement qui croît avec ℓ



N = 75

N = 77

N = 79

$J^P = 3/2^+$

$J^P = 3/2^+$

$J^P = 3/2^+$

Valeur observée
 $J^P = 3/2^+$

Valeur observée
 $J^P = 3/2^+$

Valeur observée
 $J^P = 3/2^+$

Modèle à nucléon(s) célibataire(s)

Modèle à nucléons célibataires
= modèle à nucléons indépendants + appariement

- Règles concernant J^P de l'état fondamental d'un noyau ${}^A_Z X_N$

- ① N et Z pairs
⇒ tous les nucléons appariés ⇒ $J^P = 0^+$
- ② A impair
⇒ un seul nucléon non-apparié sur niveau $n\ell j$ ⇒ $J = j, P = (-1)^\ell$
- ③ Energie d'appariement augmente avec ℓ
⇒ possible interversion de l'ordre de remplissage des niveaux
- ④ N et Z impairs
⇒ deux nucléons non-appariés sur les niveaux $n_1\ell_1 j_1$ et $n_2\ell_2 j_2$
⇒ $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2, P = (-1)^{\ell_1 + \ell_2}$

- les propriétés du noyau sont essentiellement déterminées par le(s) nucléon(s) non-appariés, appelés **nucléons célibataires**

Modèle à nucléon(s) célibataire(s)

- Règle 1:
– aucune exception !

- Règles 2 et 3:
– quelques rares exceptions (noyaux non-sphériques)

Noyau	J prédit	J observé
${}^{19}_9\text{F}$	5/2	1/2
${}^{21}_{11}\text{Na}$	5/2	3/2
${}^{23}_{11}\text{Na}$	5/2	3/2
${}^{55}_{25}\text{Mn}$	7/2	5/2

- Règle 4:
– très peu de noyaux stables avec Z et N impairs

Noyau	$n_p \ell_p j_p$	$n_n \ell_n j_n$	J^P prédit	J^P observé
${}^2_1\text{H}_1$	$1s^{1/2}$	$1s^{1/2}$	$0^+, 1^+$	1^+
${}^6_3\text{Li}_3$	$1p^{3/2}$	$1p^{3/2}$	$0^+, 1^+, 2^+, 3^+$	1^+
${}^{10}_5\text{B}_5$	$1p^{3/2}$	$1p^{3/2}$	$0^+, 1^+, 2^+, 3^+$	3^+
${}^{14}_7\text{N}_7$	$1p^{1/2}$	$1p^{1/2}$	$0^+, 1^+$	1^+

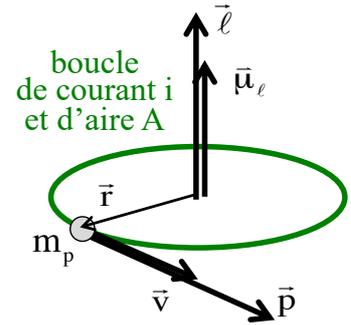
Moment magnétique dipolaire d'un nucléon

- **Contribution orbitale**

– classiquement, pour un proton

$$\|\vec{\mu}_\ell\| = iA = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2} = \frac{e}{2m_p} r p \Rightarrow \vec{\mu}_\ell = \frac{e}{2m_p} \vec{\ell}$$

$$\text{magnéton nucléaire} = \mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} \approx 3.15 \times 10^{-14} \text{ MeV/T}$$



$$\vec{\mu}_\ell = g_\ell \mu_N \frac{\vec{\ell}}{\hbar} \quad \text{où} \quad g_\ell = \begin{cases} 1 & \text{pour proton} \\ 0 & \text{pour neutron} \end{cases}$$

- **Contribution intrinsèque (due au spin)**

$$\vec{\mu}_s = g_s \mu_N \frac{\vec{s}}{\hbar} \quad \text{où} \quad g_s = \begin{cases} +5.5857 & \text{pour proton} \\ -3.8261 & \text{pour neutron} \end{cases}$$

g_s = facteurs de Landé

- **Moment magnétique dipolaire total**

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_\ell + \vec{\mu}_s$$

– énergie d'interaction dans champ magnétique: $W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

Moment magnétique de l'électron

- **Moment magnétique dipolaire intrinsèque de l'électron**

$$\vec{\mu} = g \mu_B \frac{\vec{s}}{\hbar} \Rightarrow \mu_z = \pm \frac{g}{2} \mu_B \Rightarrow \mu = \frac{g}{2} \mu_B \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \text{ magnéton de Bohr}$$

– Pour l'électron (particule de spin 1/2 sans structure interne), la théorie de Dirac implique $g \cong 2$ et donc $\mu \cong \mu_B$

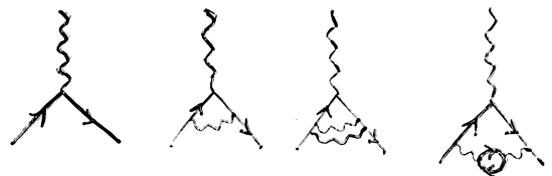
- Prédiction d'électrodynamique quantique (QED)

$$\frac{\mu}{\mu_B} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) - 0.328478966 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + 1.1765 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 - \dots = 1.00115965218279(771)$$

- Valeur mesurée:

$$\frac{\mu}{\mu_B} = 1.00115965218076(27)$$

– impressionnant test de la QED !



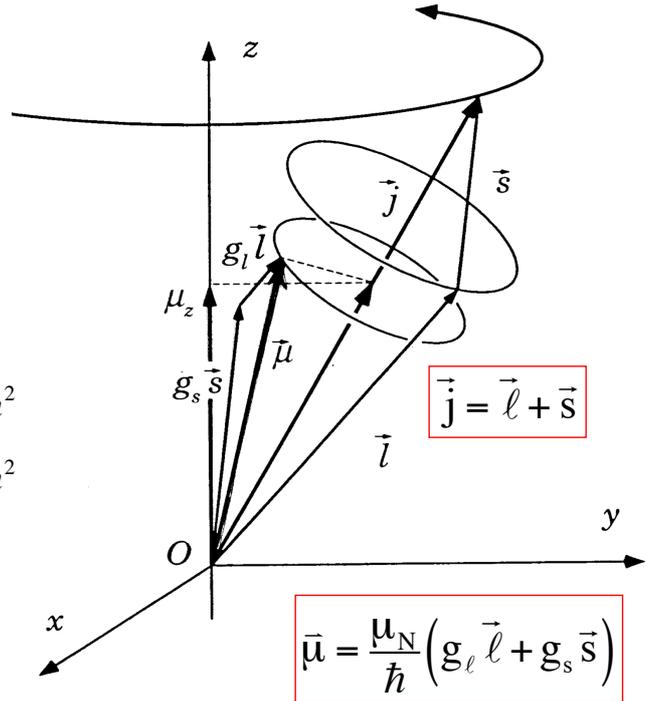
- Le fait que le proton et le neutron ont $g_s \neq 2$ prouve qu'ils ont une structure interne (les quarks !)

Moment magnétique d'un nucléon dans un état $n\ell jm$

• Valeurs moyennes:

$$\begin{aligned} \langle \vec{j}_x \rangle &= 0 \\ \langle \vec{j}_y \rangle &= 0 \\ \langle \vec{j}_z \rangle &= m\hbar \\ \langle \vec{j}^2 \rangle &= j(j+1)\hbar^2 \\ \langle \vec{\ell}^2 \rangle &= \ell(\ell+1)\hbar^2 \\ \langle \vec{s}^2 \rangle &= s(s+1)\hbar^2 \\ \langle \vec{\ell} \cdot \vec{j} \rangle &= \frac{1}{2}(j(j+1) + \ell(\ell+1) - s(s+1))\hbar^2 \\ \langle \vec{s} \cdot \vec{j} \rangle &= \frac{1}{2}(j(j+1) - \ell(\ell+1) + s(s+1))\hbar^2 \end{aligned}$$

- vecteur \vec{j} :
 - norme constante/fixe et angle constant/fixe avec l'axe z
- vecteur $\vec{\ell}$ ou \vec{s} ,
ou combinaison linéaire de $\vec{\ell}$ ou \vec{s} (par exemple moment magnétique $\vec{\mu}$):
 - norme constante/fixe et angle constant/fixe avec le vecteur \vec{j}



Moment magnétique d'un nucléon dans un état $n\ell jm$

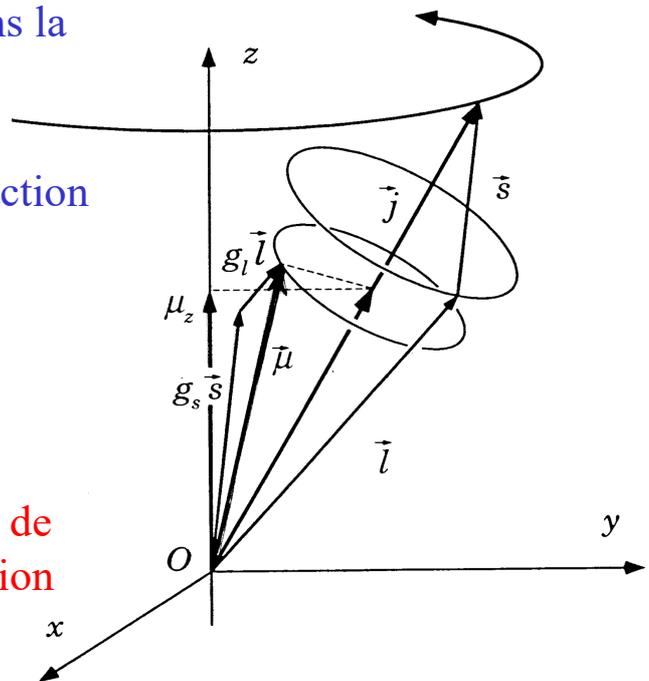
- Axe de quantification z choisi dans la direction du champ magnétique B extérieur
- On s'intéresse à l'énergie d'interaction

$$W = -\langle \vec{\mu} \cdot \vec{B} \rangle = -\langle \mu_z \rangle B_z$$

donc à la valeur moyenne de μ_z

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{\langle \vec{\mu} \cdot \vec{j} \rangle}{\langle \vec{j}^2 \rangle} \langle \vec{j}_z \rangle$$

théorème de la projection



valeur moyenne de $\mu_z =$ projection sur z de la projection de $\vec{\mu}$ sur \vec{j}

Moment magnétique d'un nucléon dans un état nℓjm

$$\bar{\mu} = \frac{\mu_N}{\hbar} (\mathbf{g}_\ell \vec{\ell} + \mathbf{g}_s \vec{s}) \Rightarrow \langle \mu_z \rangle = \frac{\langle \bar{\mu} \cdot \vec{j} \rangle}{\langle \vec{j}^2 \rangle} \langle j_z \rangle = \frac{\mu_N}{\hbar} \frac{\langle \mathbf{g}_\ell \vec{\ell} \cdot \vec{j} + \mathbf{g}_s \vec{s} \cdot \vec{j} \rangle}{\langle \vec{j}^2 \rangle} \langle j_z \rangle$$

$$\langle \mu_z \rangle = \begin{cases} \frac{\mu_N m}{2(j+1)} (\mathbf{g}_\ell (2j+3) - \mathbf{g}_s) & \text{si } j = \ell - 1/2 \\ \frac{\mu_N m}{2j} (\mathbf{g}_\ell (2j-1) + \mathbf{g}_s) & \text{si } j = \ell + 1/2 \end{cases} = m f(I_3, \ell, j)$$

$I_3 = 3^{\text{ème}}$ composante de l'isospin (+1/2 pour le proton, -1/2 pour le neutron)

- Moment magnétique total de deux nucléons identiques appariés ($J_{\text{paire}} = 0$, $M_{\text{paire}} = 0$) sur un même niveau nℓj:

$$\langle \mu_z^{\text{paire}} \rangle = \langle \mu_{z1} \rangle + \langle \mu_{z2} \rangle = (m_1 + m_2) f(I_3, \ell, j) = M^{\text{paire}} f(I_3, \ell, j) = 0$$

- Moment magnétique total d'un noyau de A nucléons: $\langle \mu_z^{\text{noyau}} \rangle = \sum_{i=1}^A \langle \mu_{zi} \rangle = \sum_{\text{nucléons célibataires}} \langle \mu_{zi} \rangle$

Moment magnétique dipolaire d'un noyau

- $\langle \mu_z^{\text{noyau}} \rangle$ dépend des valeurs de m des nucléons célibataires, donc de leur somme M
- On définit « le » moment magnétique μ d'un noyau de spin J:

$$\mu = \langle \mu_z^{\text{noyau}} \rangle \Big|_{M=J} = \langle J, M = J, \dots | \mu_z^{\text{noyau}} | J, M = J, \dots \rangle$$

- Pour un noyau pair-pair (sans nucléon célibataire)

$$\mu = 0 \quad \text{prédiction correcte dans tous les cas}$$

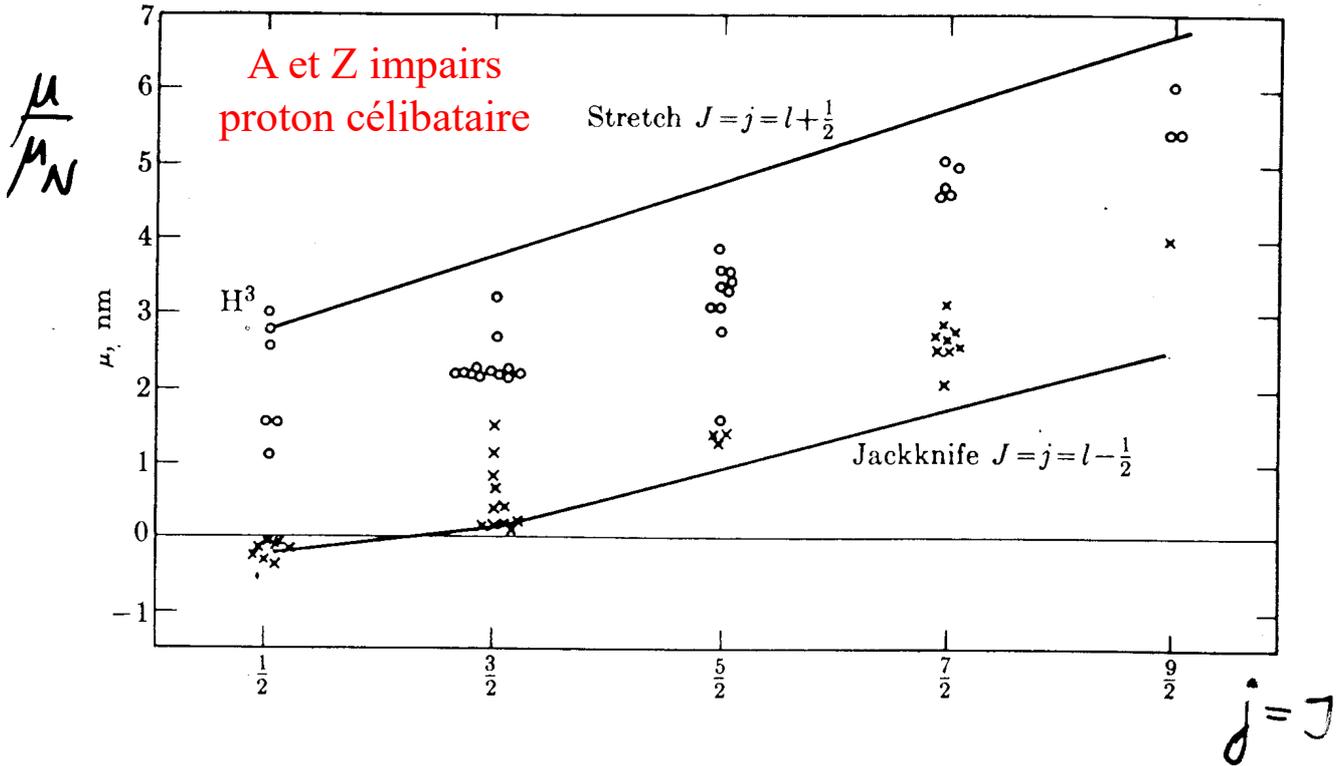
- Pour un noyau à un seul nucléon célibataire sur un niveau nℓj:

$$\mu = \langle \mu_z^{\text{célib}} \rangle \Big|_{m=j} = \begin{cases} \frac{\mu_N}{2} \frac{j}{(j+1)} (\mathbf{g}_\ell (2j+3) - \mathbf{g}_s) & \text{si } j = \ell - 1/2 \\ \frac{\mu_N}{2} (\mathbf{g}_\ell (2j-1) + \mathbf{g}_s) & \text{si } j = \ell + 1/2 \end{cases}$$

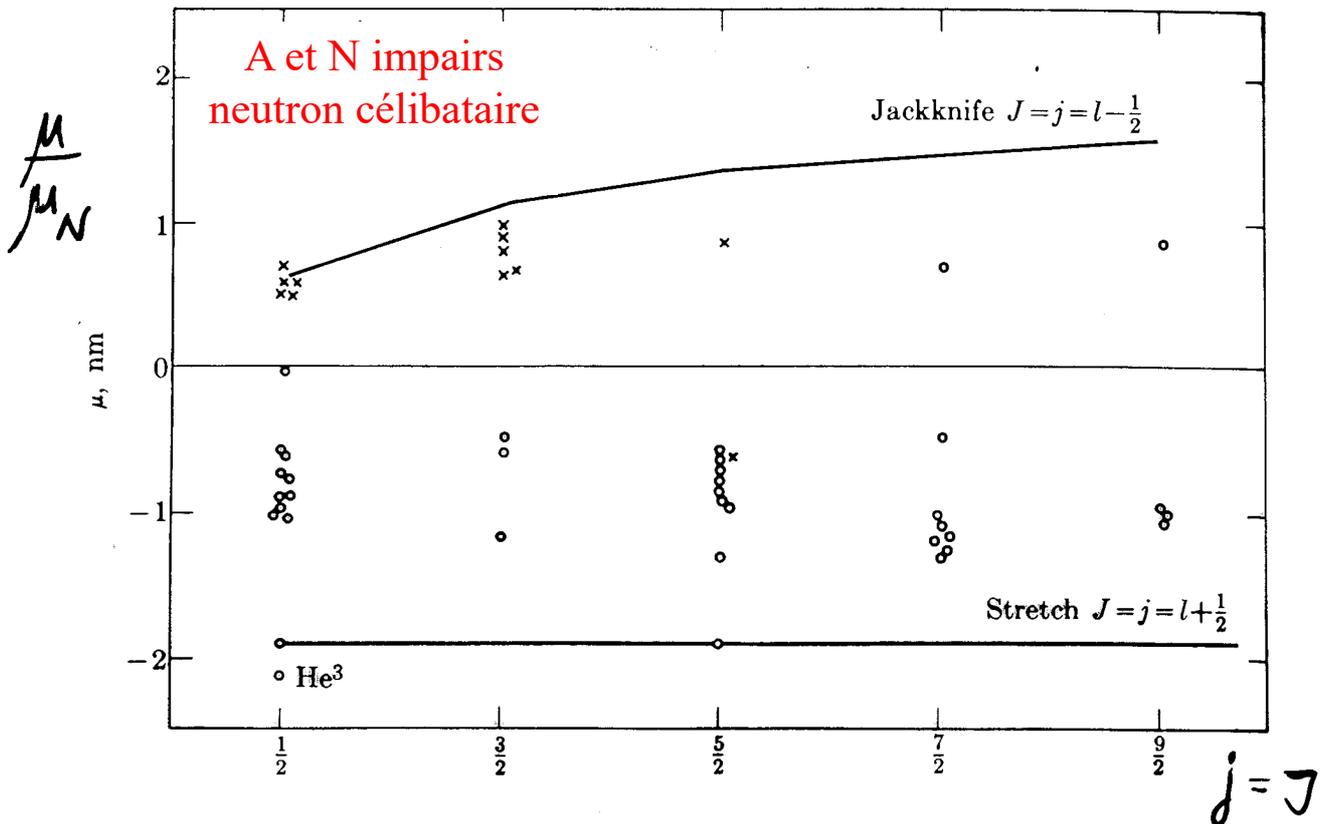
lignes de Schmidt

observations expérimentales tombent entre les deux lignes de Schmidt

Lignes de Schmidt



Lignes de Schmidt



Modèle en couches sans interaction résiduelle

- Hamiltonien du noyau non perturbé:

$$H_0 = \sum_{i=1}^A H_i \quad \text{où } H_i = \text{hamiltonien du nucléon } i \text{ indépendant}$$

- Etats stationnaires d'un nucléon i

$$|\psi_{n_i \ell_i j_i m_i}\rangle \quad \text{tel que} \quad H_i |\psi_{n_i \ell_i j_i m_i}\rangle = E_{n_i \ell_i j_i} |\psi_{n_i \ell_i j_i m_i}\rangle$$

- Etats stationnaires du noyau de moment cinétique total J et d'isospin total I définis

$$|\Psi_\Gamma^{(0)}\rangle \quad \text{tel que} \quad H_0 |\Psi_\Gamma^{(0)}\rangle = E_\Gamma^{(0)} |\Psi_\Gamma^{(0)}\rangle$$

Γ = ensemble des nombres quantiques décrivant l'état du noyau

= (a, J, M, I, M_I, ...) où a = configuration (n ℓ j de chaque nucléon)

$$E_\Gamma^{(0)} = E_a^{(0)} = \sum_{i=1}^A E_{n_i \ell_i j_i}$$

L'énergie du noyau ne dépend que de la configuration et pas de J

Modèle en couches avec interaction résiduelle

- On ajoute une "petite" interaction résiduelle H_1 à l'hamiltonien

$$H = H_0 + H_1$$

- Nouveaux états stationnaires du noyau de nombres quantiques Γ

$$|\Psi_\Gamma\rangle \quad \text{tel que} \quad H |\Psi_\Gamma\rangle = E_\Gamma |\Psi_\Gamma\rangle$$

- Au premier ordre de perturbation

$$|\Psi_\Gamma\rangle = |\Psi_\Gamma^{(0)}\rangle + |\Psi_\Gamma^{(1)}\rangle \quad \text{où } |\Psi_\Gamma^{(1)}\rangle \text{ est une petite correction}$$

$$E_\Gamma = E_\Gamma^{(0)} + E_\Gamma^{(1)} \quad \text{où } E_\Gamma^{(1)} \text{ est une petite correction}$$

$$E_\Gamma = \sum_{i=1}^A E_{n_i \ell_i j_i} + \langle \Psi_\Gamma^{(0)} | H_1 | \Psi_\Gamma^{(0)} \rangle$$

Les éléments diagonaux de H_1 (dans la base des états non perturbés) lèvent la dégénéscence par rapport à J (mais pas rapport à M)

Modèle en couches avec interaction résiduelle (2)

- En général:

$$H_1 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^A v_{ij} \quad v_{ij} = \text{interaction résiduelle} \\ \text{entre nucléons } i \text{ et } j$$

- On décompose alors le noyau en un coeur formé de niveaux d'énergie complets et de nucléons de valence (sur des niveaux incomplets)

- Exemple:

- le noyau $^{18}\text{O}_{10}$, dans son état fondamental, est formé de deux neutrons de valence sur le niveau $1d_{5/2}$ et d'un coeur inerte $^{16}\text{O}_8$ formé de niveaux complets

$$H = H_0 + H_1 = H_{\text{valence}} + H_{\text{coeur}} + H_{\text{coeur-valence}}$$

$$H_{\text{valence}} = \sum_{i=1}^2 H_i + v_{12}$$

$$H_{\text{coeur}} = \sum_{i=3}^A H_i + \sum_{\substack{i,j=3 \\ i < j}}^A v_{ij}$$

$$H_{\text{coeur-valence}} = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=3}^A v_{ik}$$

OS, 20 novembre 2024

151

Modèle en couches avec interaction résiduelle (3)

- Le coeur à $J=0$ (niveaux complets)
 - la fonction d'onde du coeur a une symétrie sphérique
 - le coeur n'a pas de direction privilégiée dans l'espace
 - l'interaction résiduelle entre le coeur et un nucléon de valence dans un état $n\ell jm$ ne peut pas dépendre de m
 - l'interaction résiduelle entre le coeur et les nucléons de valence ne dépend que de la configuration (constante additive)
- Ainsi, pour un noyau avec deux nucléons de valence identiques sur un niveau $n\ell j$ incomplet:

$$E_{\Gamma} = \sum_{i=1}^A E_{n_i \ell_i j_i} + \text{constante} + \langle \Psi_{\Gamma}^{(0)}(1,2) | v_{12} | \Psi_{\Gamma}^{(0)}(1,2) \rangle$$

(se généralise à un nombre quelconque de nucléons de valence)

OS, 20 novembre 2024

152

Modèle en couches avec interaction résiduelle de contact

- Avec

$$v_{12} = -V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \text{c'est-à-dire } v_{12} = 0 \text{ sauf si } \vec{r}_1 = \vec{r}_2$$

on peut calculer que, pour deux nucléons identiques sur un même niveau $n\ell j$ incomplet

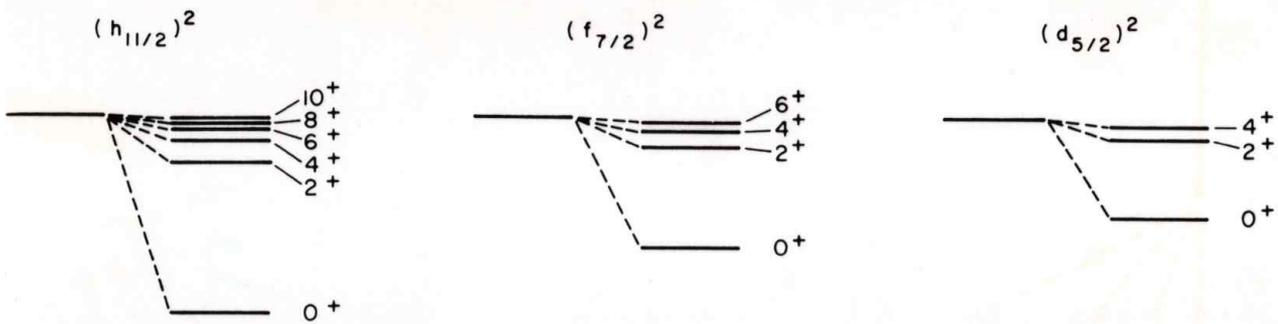
$$\Delta E_J = \left\langle \Psi_{JM}^{(0)}(1,2) \left| v_{12} \right| \Psi_{JM}^{(0)}(1,2) \right\rangle = -V_0 F(n, \ell, j) A(j, J)$$

- Tableau des valeurs de $A(j, J)$

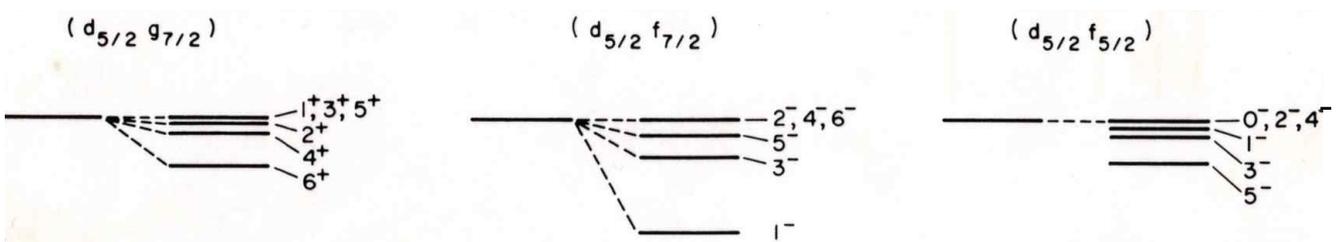
	$J = 0$	$J = 2$	$J = 4$	$J = 6$	$J = 8$
$j = \frac{1}{2}$	2				
$j = \frac{3}{2}$	4	$\frac{4}{5}$			
$j = \frac{5}{2}$	6	$\frac{48}{35}$	$\frac{4}{7}$		
$j = \frac{7}{2}$	8	$\frac{40}{21}$	$\frac{72}{77}$	$\frac{200}{429}$	
$j = \frac{9}{2}$	10	$\frac{80}{33}$	$\frac{180}{143}$	$\frac{320}{429}$	$\frac{980}{2431}$

Modèle en couches avec interaction résiduelle de contact (2)

- Pour deux nucléons identiques sur un même niveau $n\ell j$ incomplet

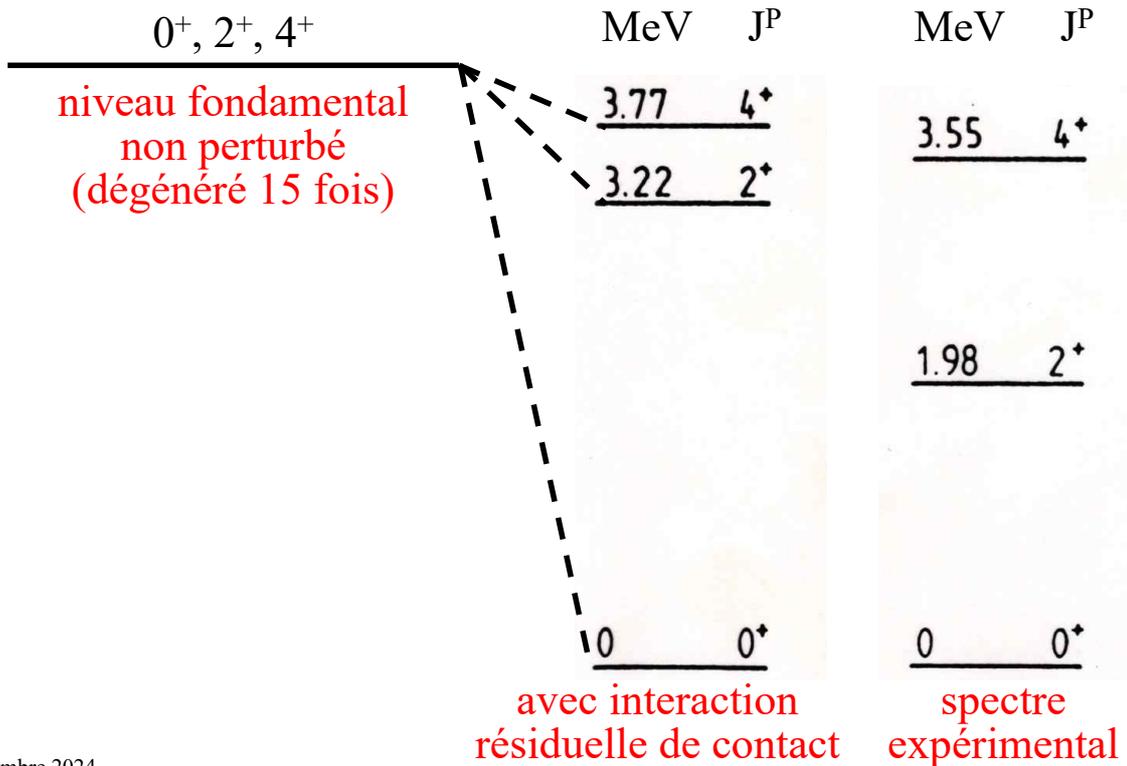


- Pour deux nucléons de valence identiques sur des niveaux différents



Premiers niveaux d'énergie de ^{18}O

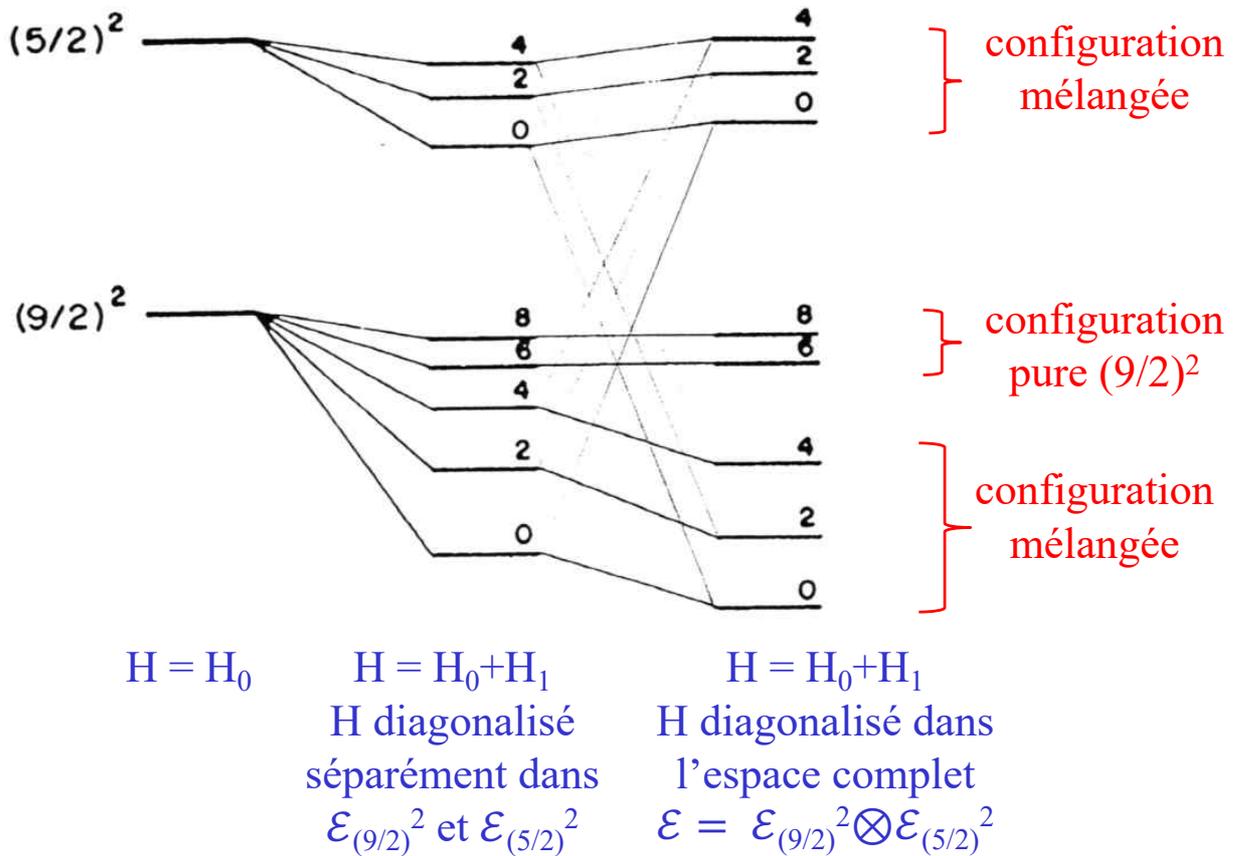
Configuration $[n: (1d_{5/2})^2] \rightarrow J^P = 0^+, 2^+, 4^+$



Mélange de configurations (1)

- Les éléments non diagonaux de H_1 peuvent coupler des états $|\Psi_\Gamma^{(0)}\rangle$ de différentes configurations
 - Les états propres de l'hamiltonien total H_0+H_1 deviennent des combinaisons linéaires des états non perturbés $|\Psi_\Gamma^{(0)}\rangle$ et ne correspondent plus nécessairement à des configurations définies !
- Ces éléments non diagonaux ne peuvent être non nuls qu'entre des états de même nombre quantique P, J, M, I, M_I , car H_1 doit être un vrai scalaire qui conserve la parité P , le moment cinétique total J et l'isospin total I
 - Précédemment on a réduit l'espace des états \mathcal{E} du noyau à un sous-espace \mathcal{E}_a correspondant à une configuration "a" avec deux nucléons de valence; dans ce cas H_1 n'avait pas d'élément non diagonal dans ce sous-espace

Mélange de configurations (2)



Cas simple: mélange de deux états (1)

- Deux états non perturbés $|\Psi_i^{(0)}\rangle$ ($i=1,2$):

$$H_0 |\Psi_i^{(0)}\rangle = E_i^{(0)} |\Psi_i^{(0)}\rangle$$

- Dans la base $\{|\Psi_i^{(0)}\rangle\}$:

$$H = H_0 + H_1 = \begin{pmatrix} E_1^{(0)} & 0 \\ 0 & E_2^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_1^{(1)} & A \\ A^* & E_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & A \\ A^* & E_2 \end{pmatrix}$$

$$H_1^\dagger = H_1 \quad H^\dagger = H$$

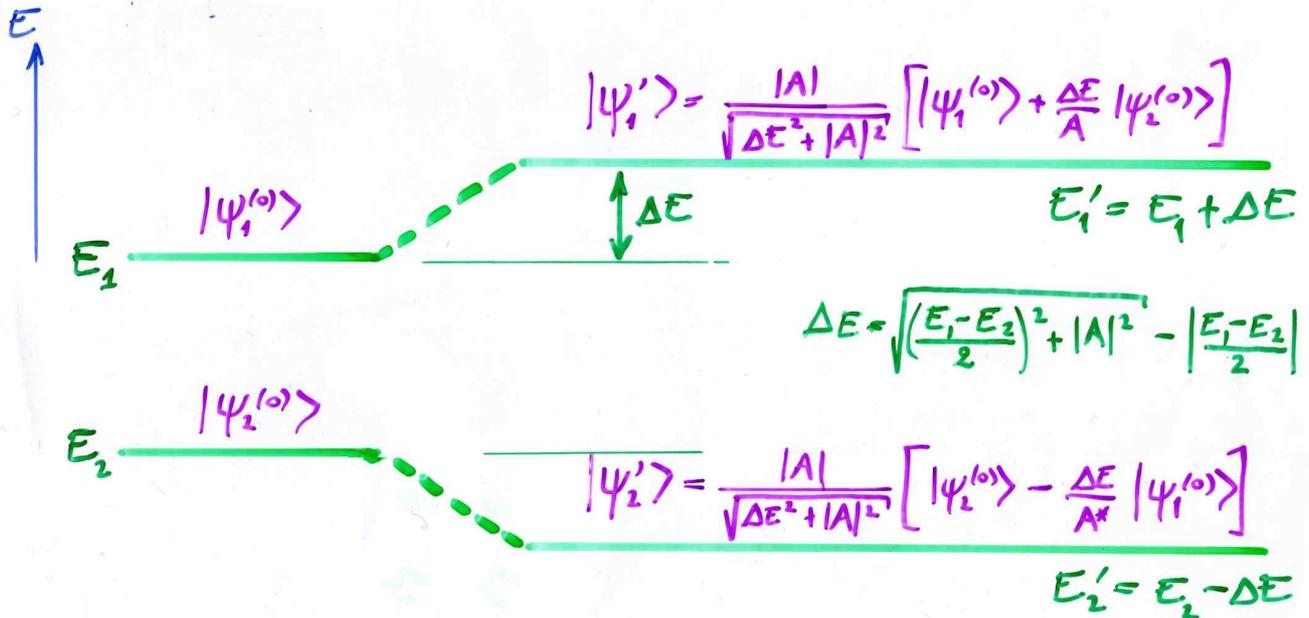
- Diagonalisation de H:**

– on cherche les états propres $|\Psi'\rangle$ et les valeurs propres E' de H

$$|\Psi'\rangle = a |\Psi_1^{(0)}\rangle + b |\Psi_2^{(0)}\rangle \quad \text{tel que} \quad H |\Psi'\rangle = E' |\Psi'\rangle$$

$$\begin{pmatrix} E_1 & A \\ A^* & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E' \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

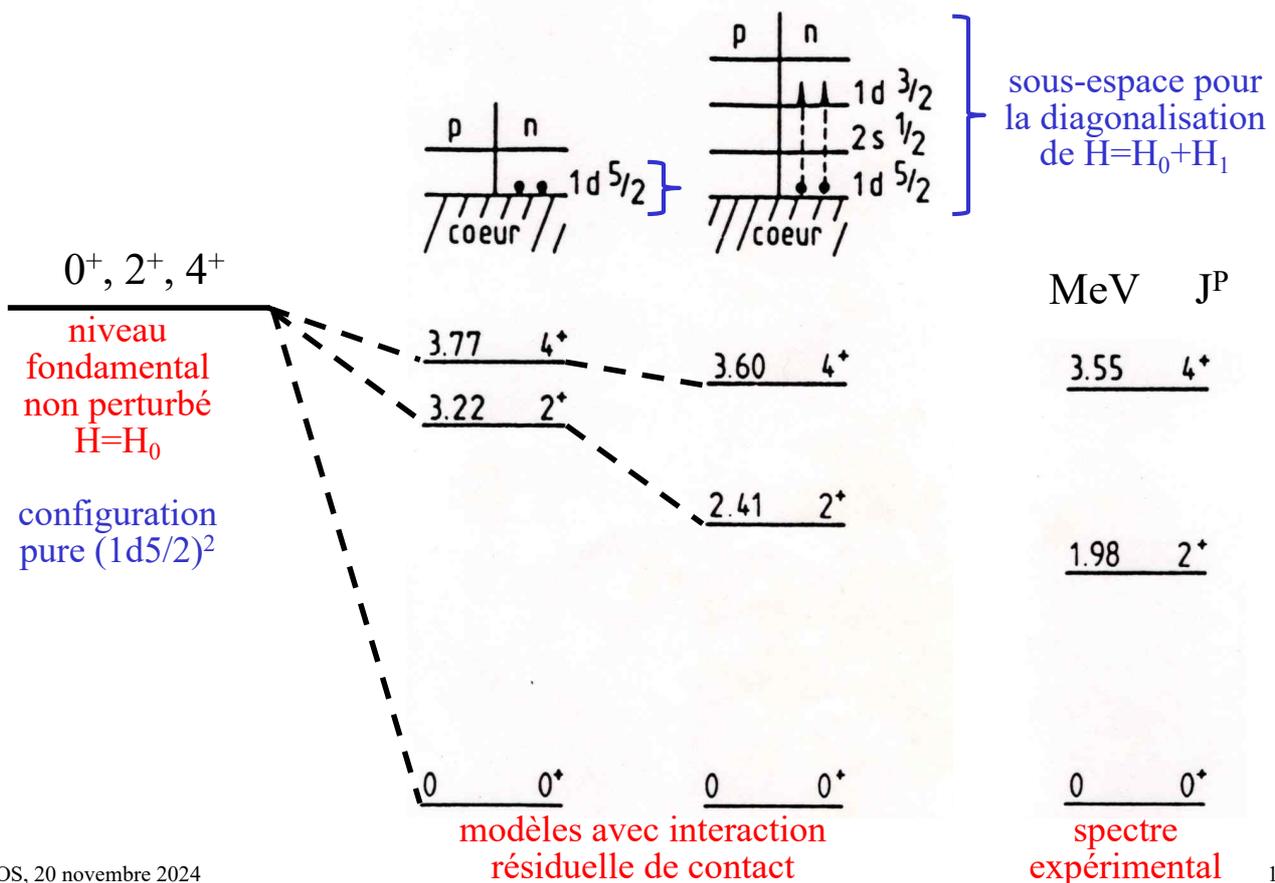
Cas simple: mélange de deux états (2)



Cas limites:

$E_1 - E_2 \ll |A| \Rightarrow \Delta E \approx |A|$ et $|\langle \psi_j' | \psi_i^{(0)} \rangle|^2 = \frac{1}{2}$
 $E_1 - E_2 \gg |A| \Rightarrow \Delta E \approx 0$ et $|\psi_j'\rangle \approx |\psi_j^{(0)}\rangle$

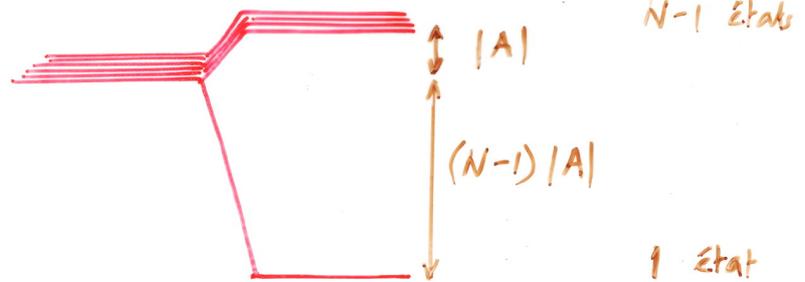
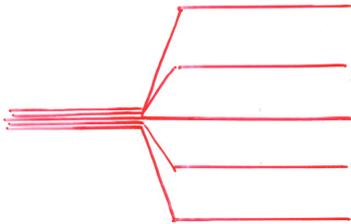
Premiers niveaux d'énergie de ^{18}O



Mélange de N états dégénérés

$$H = \begin{pmatrix} E & A & & & 0 \\ A^* & E & & & \\ & A^* & E & & \\ & & A^* & E & \\ 0 & & & & A^* & E & \dots \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} E & A & A & A & \dots \\ A^* & E & A & A & \\ A^* & A^* & E & A & \\ A^* & A^* & A^* & E & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$



$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} (|\Psi_1^{(0)}\rangle + |\Psi_2^{(0)}\rangle + \dots + |\Psi_N^{(0)}\rangle)$$

état mélangé symétrique (cohérence)
→ phénomène "collectif"

Moments électriques multipolaires

- Energie d'interaction d'un noyau dans un champ électrique extérieur

$$W = \int \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

$\rho(\vec{r})$ = densité de charge du noyau
 $\phi(\vec{r})$ = potentiel électrique extérieur

$$\int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = Ze$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{r}) = 0$$

- Décomposition sur la base des harmoniques sphériques

$$\phi(\vec{r}) = \phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} f_{\ell m}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \phi_{\ell m} r^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

- Moments électriques multipolaires

$$Q_{\ell m} = \int \rho(\vec{r}) r^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) d^3\vec{r}$$

$$W = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \phi_{\ell m} Q_{\ell m}$$

$Q_{\ell m}$ = coefficients caractérisant la distribution de charge
 $\phi_{\ell m}$ = coefficients caractérisant le potentiel extérieur

Moments électriques multipolaires

- Base des états du noyau:

$\{|J, M, \dots\rangle\}$ états propres de H, \vec{J}^2, J_z, \dots

$$Q_{\ell m} = e \sum_{i=1}^Z \langle J, M, \dots | r_i^\ell Y_\ell^m(\theta_i, \varphi_i) | J, M, \dots \rangle$$

- Propriétés des harmoniques sphériques:

$$\langle J, M, \dots | Y_\ell^m(\theta_i, \varphi_i) | J', M', \dots \rangle = 0 \quad \text{sauf si } M = m + M' \text{ et } |J - J'| \leq \ell \leq J + J'$$

- Donc:

$$Q_{\ell m} = 0 \quad \text{si } m \neq 0 \text{ ou si } \ell > 2J$$

- De plus: $\left. \begin{array}{l} |J, M, \dots\rangle \text{ de parité définie} \\ Y_\ell^m \text{ de parité } (-1)^\ell \end{array} \right\} \Rightarrow Q_{\ell 0} = 0 \text{ si } \ell \text{ impair}$

Moment électrique quadrupolaire

- Définition:

$$q = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} Q_{20}|_{M=J}$$

$$\begin{aligned} q &= \sum_{i=1}^Z \langle J, J, \dots | \sqrt{\frac{16\pi}{5}} r_i^2 Y_2^0(\theta_i, \varphi_i) | J, J, \dots \rangle \\ &= \sum_{i=1}^Z \langle J, J, \dots | r_i^2 (3 \cos^2 \theta_i - 1) | J, J, \dots \rangle \end{aligned}$$

dimension
d'une surface

- Classiquement:

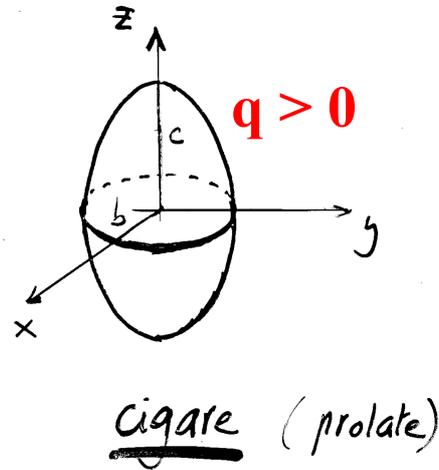
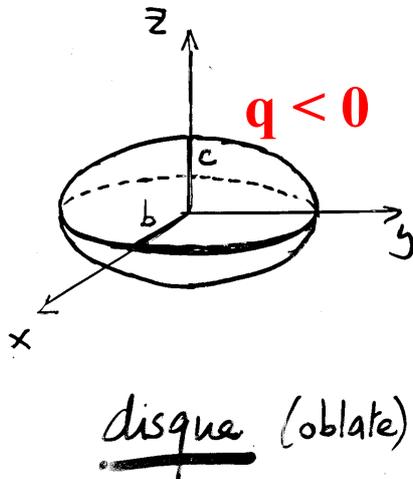
$$q = \frac{1}{e} \int r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

- cas d'une distribution de charge à symétrie sphérique:

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{e} \int r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \rho(r) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr \\ &= \frac{2\pi}{e} \int_{\cos \theta = -1}^{+1} (3 \cos^2 \theta - 1) d(\cos \theta) \int_{r=0}^{\infty} r^4 \rho(r) dr = 0 \end{aligned}$$

Ellipsoïde de révolution uniformément chargé

$$q = \frac{2}{5} Z (c^2 - b^2) = \frac{4}{5} Z \bar{R}^2 \frac{\delta R}{\bar{R}} \quad \text{avec } \bar{R} = \frac{c+b}{2} \text{ et } \delta R = c - b$$



- Moment électrique quadrupolaire réduit:
 - mesure de la déformation des noyaux, indépendante de la taille et de la charge totale

$$\frac{q}{ZR^2} = \frac{4}{5} \frac{\delta R}{\bar{R}}$$

Moment quadrupolaire: prédictions du modèle à nucléon célibataire

- Noyau avec Z pair et N pair:

$$J = 0 \Rightarrow \boxed{q = 0} \quad \text{prédiction correcte dans tous les cas}$$

- Noyau avec Z impair et N pair:

- un proton célibataire sur un niveau $n\ell j$ responsable du moment quadrupolaire

$$\boxed{q = -\langle r^2 \rangle_{n\ell j} \frac{2j-1}{2(j+1)}} \quad \begin{array}{l} q = 0 \quad \text{si } j = 1/2 \\ q < 0 \quad \text{si } j \geq 3/2 \end{array}$$

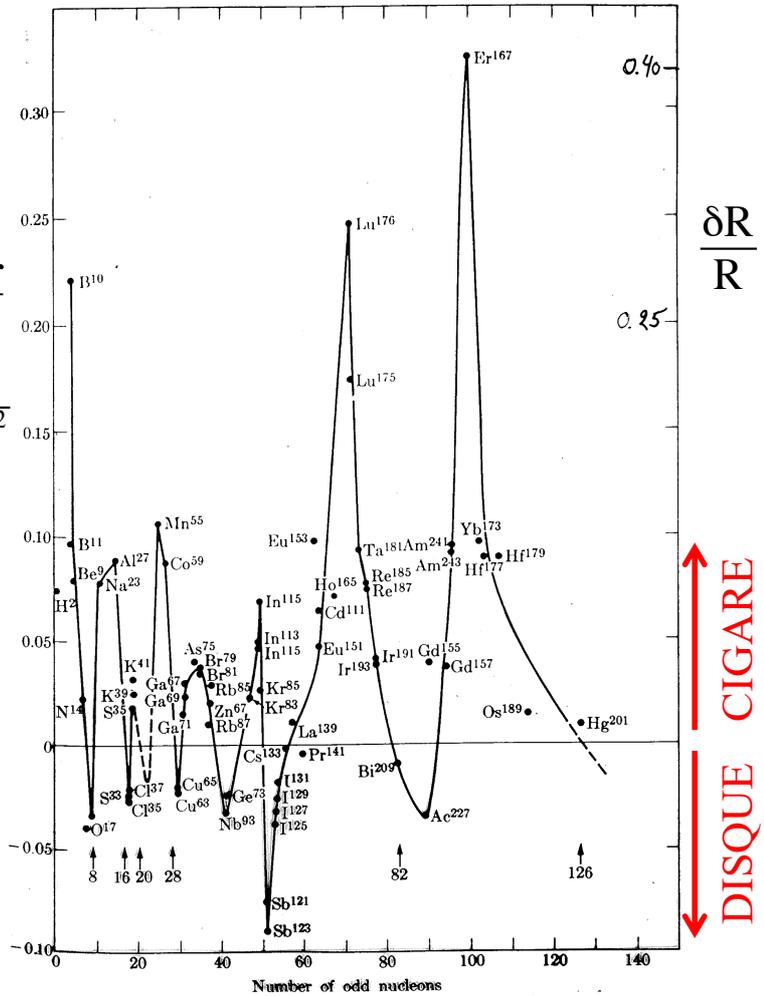
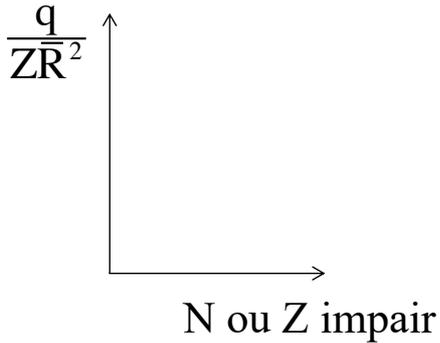
- ordre de grandeur pour un noyau de rayon R:

$$\left. \begin{array}{l} \langle r^2 \rangle \approx \frac{3}{5} R^2 \\ j \leq 11/2 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{2Z} \leq \frac{q}{ZR^2} \leq 0$$

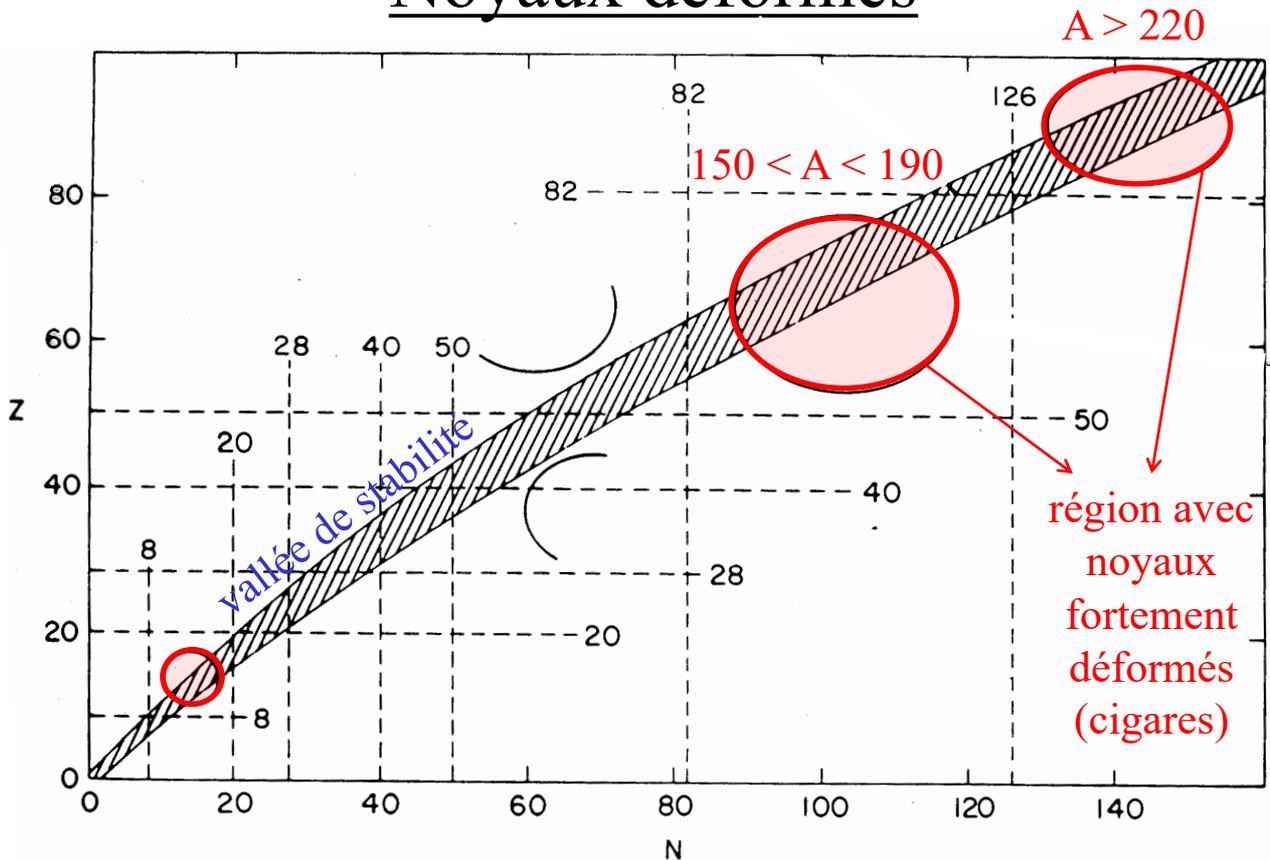
- Noyau avec Z pair et N impair

$$q \rightarrow \frac{Z}{(A-1)^2} q \Rightarrow -\frac{1}{2A^2} \leq \frac{q}{ZR^2} \leq 0$$

Moments électriques quadrupolaires réduits des états fondamentaux des noyaux de A impair



Noyaux déformés



Description des noyaux déformés

Noyau déformé = noyau ayant une déformation permanente par rapport à la symétrie sphérique

A. Approche microscopique

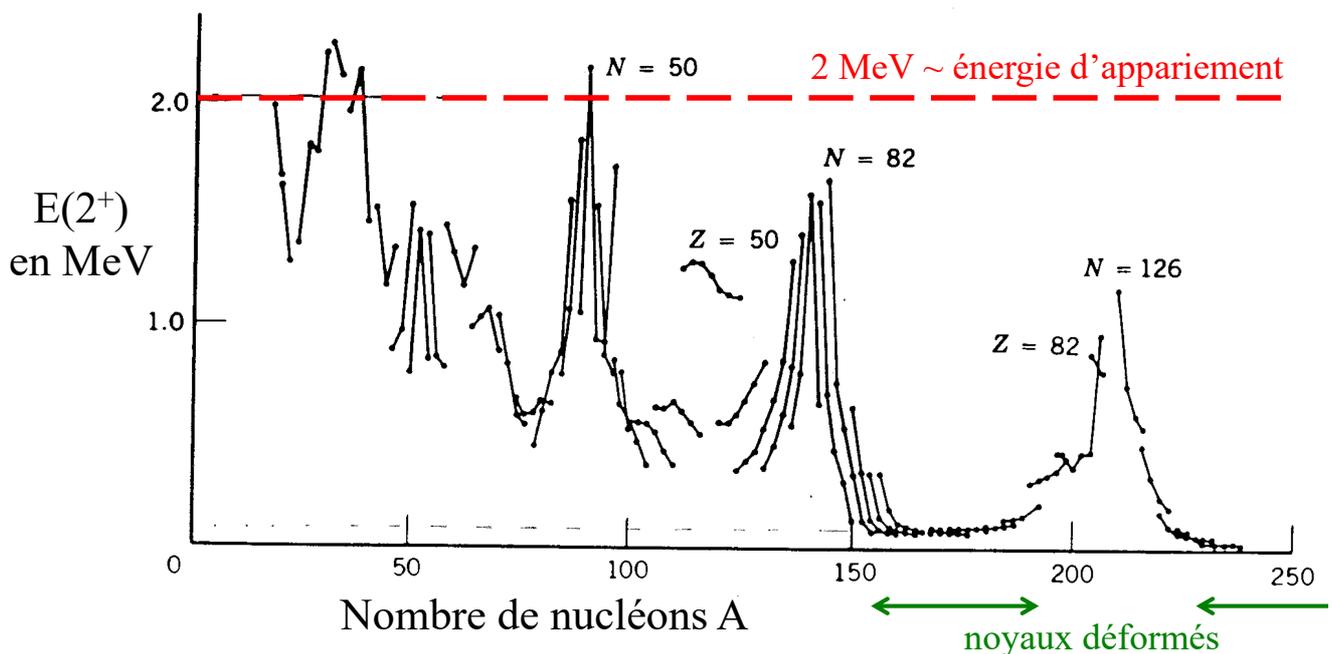
- approche du type « modèle en couches »
 - potentiel déformé, non sphérique
- modèle de Nilsson

A. Approche « macroscopique »

- abandon de la description du mouvement (ou de l'état) des nucléons individuels
 - description de phénomènes collectifs
- modèles collectifs

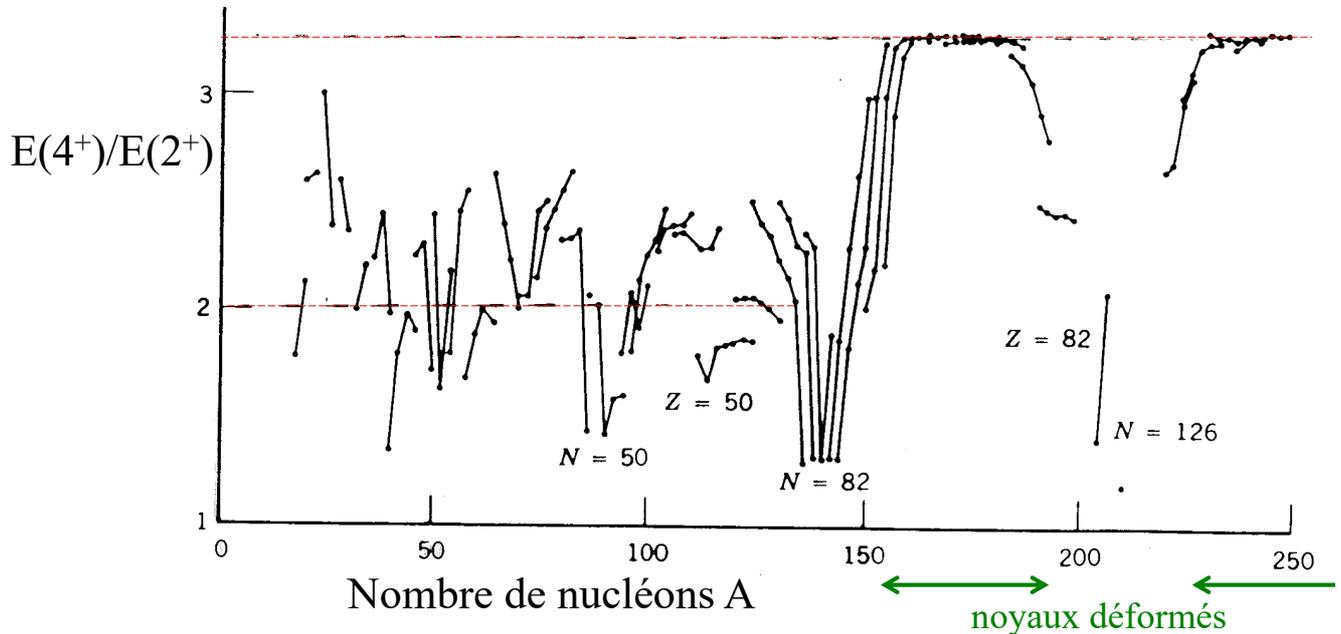
Energie d'excitation des noyaux pair-pair

- Energie d'excitation $E(2^+)$ du premier niveau avec $J^P = 2^+$ (au-dessus du niveau fondamental avec $J^P = 0^+$)



Energie d'excitation des noyaux pair-pair

- Rapport $E(4^+)/E(2^+)$ des énergies d'excitation des premiers niveaux avec $J^P = 4^+$ et $J^P = 2^+$ (au-dessus du niveau fondamental avec $J^P = 0^+$)



OS, 27 novembre 2024

171

Modèles collectifs

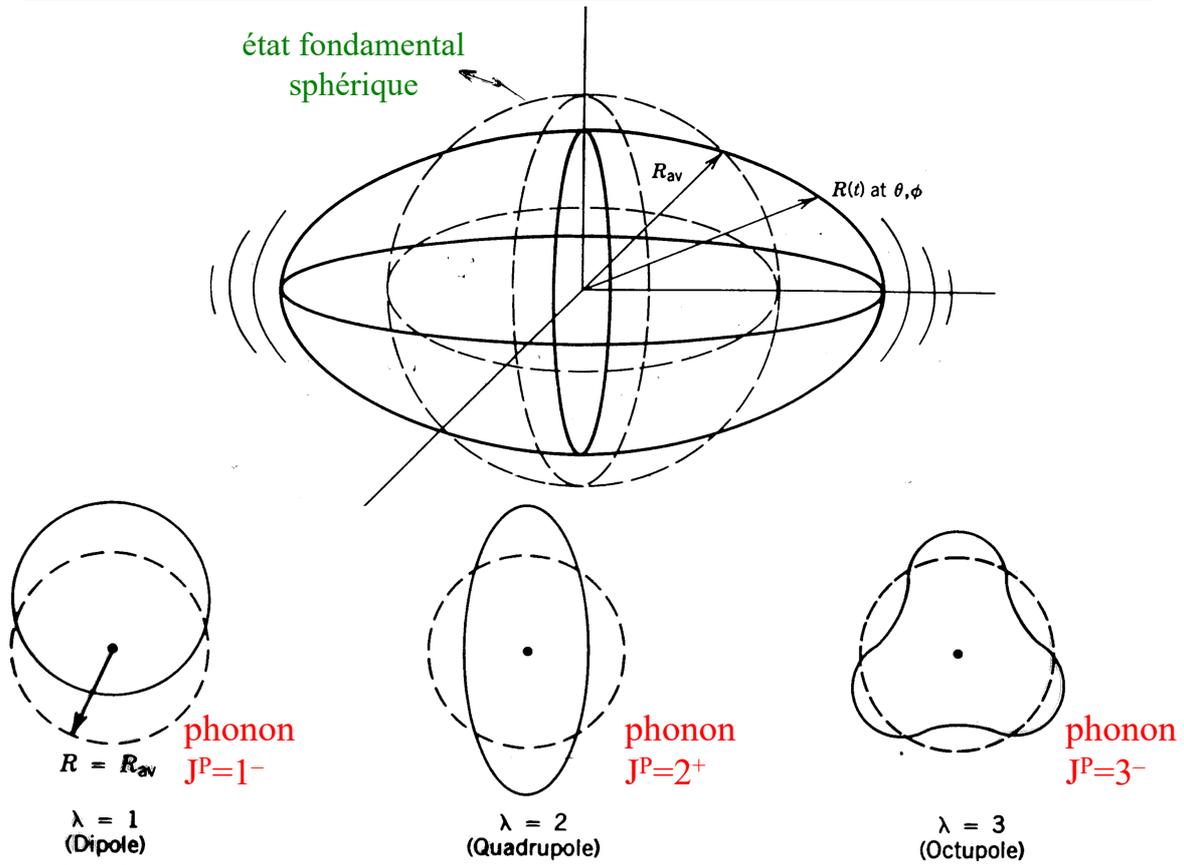
Introduits dès 1950 par A. Bohr, B.R. Mottelson, J. Rainwater (prix Nobel 1975)

- Excitations collectives
 - 1) dans les **noyaux sphériques** pair-pair
 - **vibrations collectives:**
 - oscillations de la surface du noyau (comme pour une goutte liquide)
 - description à l'aide de phonons
 - 2) dans les **noyaux avec une déformation statique** ($150 < A < 190$ ou $A > 220$)
 - **rotations collectives**

OS, 27 novembre 2024

172

Excitations vibrationnelles collectives



OS, 27 novembre 2024

173

Spectre vibrationnel (prédiction)

$3 \hbar\omega$ 3 phonons quadrupolaires
 $J^P = 0^+, 1^+, 1^+, 1^+, 2^+, 2^+, 2^+, 2^+, 2^+, 3^+, 3^+, 3^+, 3^+, 4^+, 4^+, 4^+, 5^+, 5^+, 6^+$

$2 \hbar\omega$ 2 phonon quadrupolaires
 $J^P = 0^+, 1^+, 2^+, 3^+, 4^+$

L'état doit être symétrique sous l'échange de deux phonons (bosons)

Prédiction $E(4^+)/E(2^+) = 2$

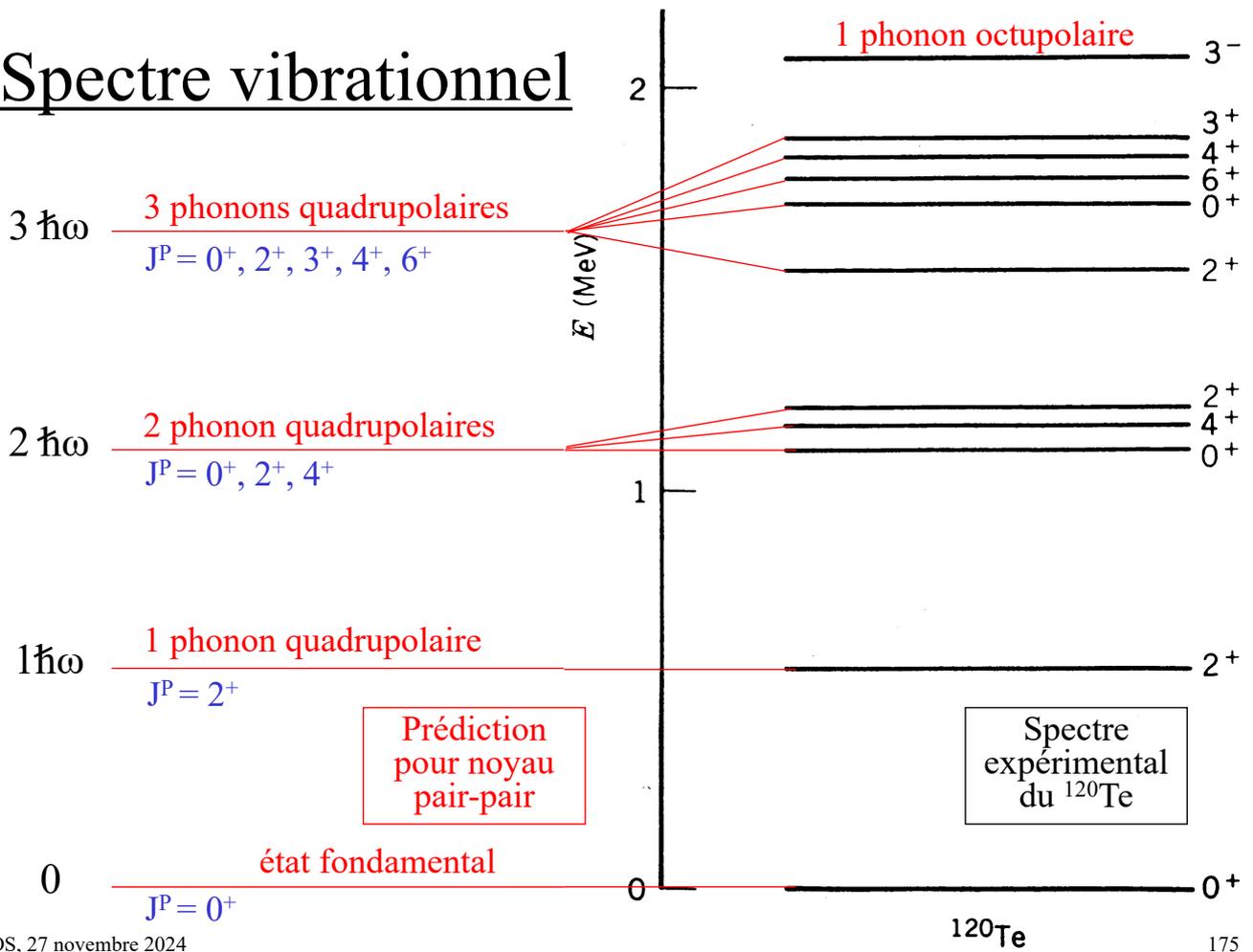
$1 \hbar\omega$ 1 phonon quadrupolaire
 $J^P = 2^+$

0 état fondamental noyau pair-pair
 $J^P = 0^+$

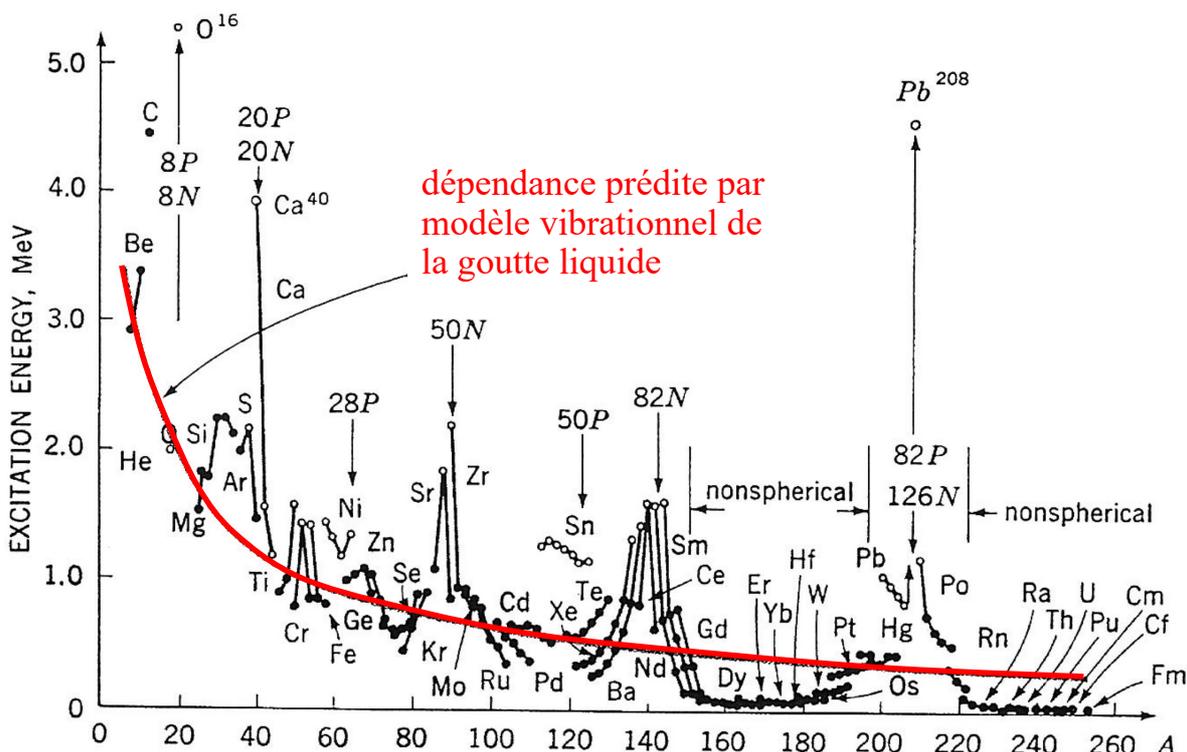
OS, 27 novembre 2024

174

Spectre vibrationnel

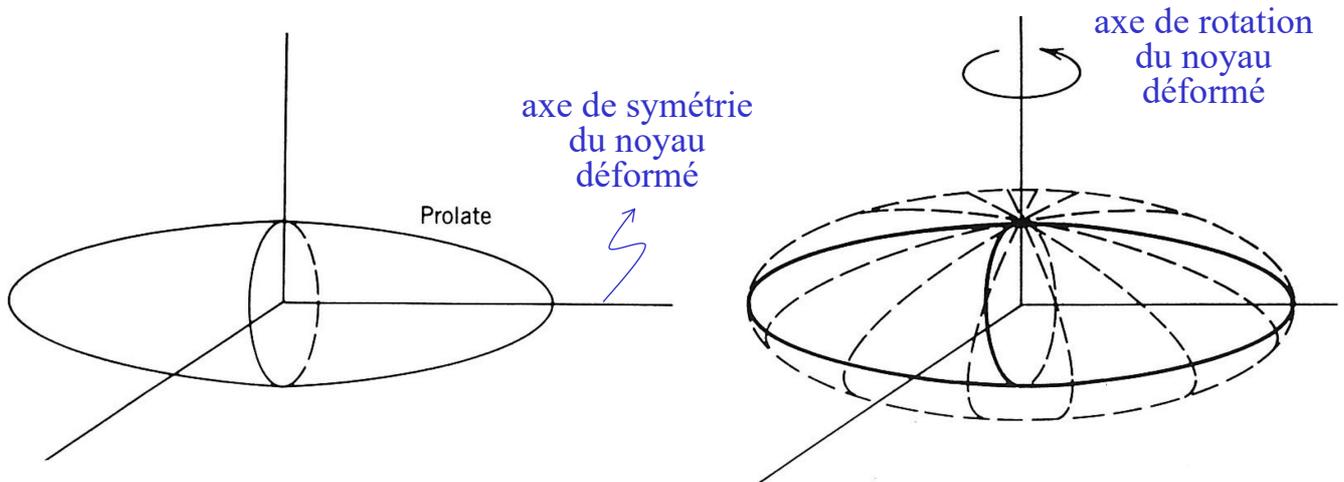


Energie d'excitation du premier niveau excité des noyaux pair-pair



Rotation d'un noyau déformé

Seule une rotation autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de symétrie de révolution du noyau est physique



	Etat fondamental	Etat excité de rotation
Forme du noyau	« cigare »	« disque »
Moment électrique quadrupolaire	$q > 0$	$q < 0$

→ bien vérifié pour le premier état excité des noyaux pair-pair

Energie cinétique de rotation

- Classiquement:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \bar{\omega}^2 = \frac{\bar{L}^2}{2I}$$

I = moment d'inertie du noyau
 $\bar{\omega}$ = vitesse angulaire de rotation
 $\bar{L} = I \bar{\omega}$ = moment cinétique du noyau

- En mécanique quantique:

$$H_{\text{rot}} = \frac{\vec{J}_{\text{rot}}^2}{2I}$$

hamiltonien

$$Y_{J_{\text{rot}}}^M$$

fonctions propres

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} J_{\text{rot}} (J_{\text{rot}} + 1)$$

valeurs propres avec J_{rot} entier

- Prédictions pour noyau pair-pair:

	Etat fondamental	Etats excités de rotation
Spin du noyau	0	J pair > 0
Energie (au-dessus du niveau fondamental)	0	$\frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$

$$E(4^+)/E(2^+) = [4(4+1)] / [2(2+1)] = 20/6 = 3.333$$

Bandes de rotation

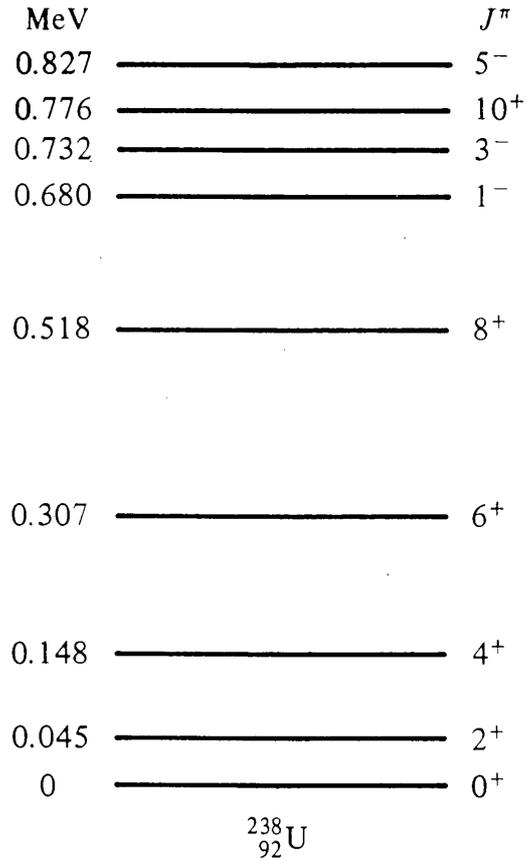
- Spectre expérimental du noyau ^{238}U**

- bande de rotation construite sur le niveau fondamental 0^+ :

- $0^+, 2^+, 4^+, 6^+, 8^+, 10^+, \dots$

- autre bande de rotation construite sur un niveau excité 1^- :

- $1^-, 3^-, 5^-, \dots$



Bandes de rotations

- Modèle empirique:**

$$E_x = C_1 J(J+1) + C_2 J^2(J+1)^2$$

- ^{176}Yb :

- $C_1 = 13.91 \text{ keV}$
- $C_2 = -0.009 \text{ keV}$

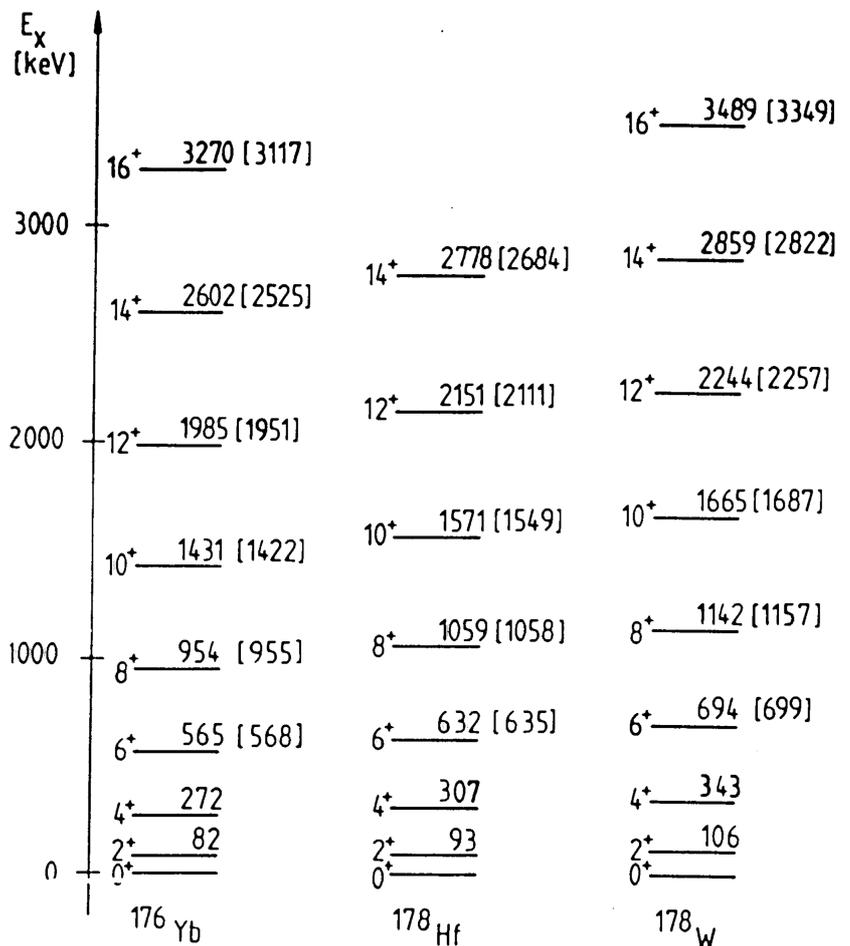
- ^{178}Hf :

- $C_1 = 15.70 \text{ keV}$
- $C_2 = -0.014 \text{ keV}$

- ^{178}W :

- $C_1 = 17.40 \text{ keV}$
- $C_2 = -0.019 \text{ keV}$

- Modèle rotation OK, avec I qui augmente légèrement avec J (force centrifuge)**



Moments d'inertie

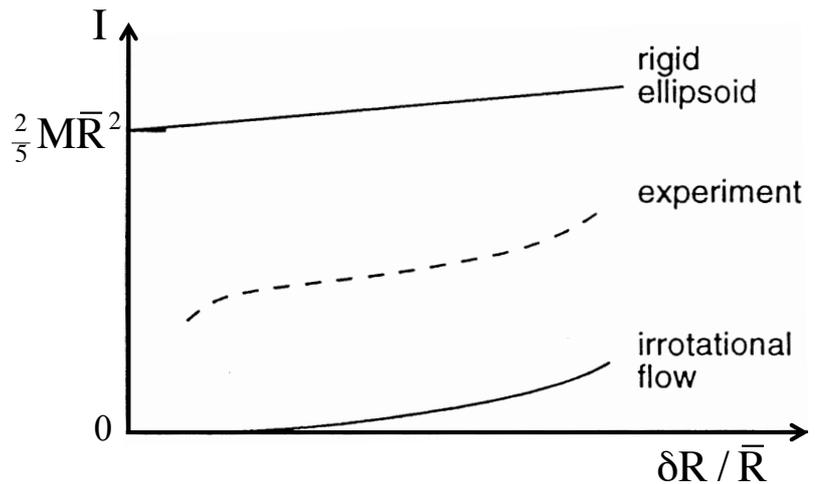
- Ellipsoïde parfaitement rigide

$$I_{\text{rigide}} \approx \frac{2}{5} M \bar{R}^2 \left(1 + 0.31 \frac{\delta R}{\bar{R}} \right)$$

- Fluide irrotationnel
 - fluide non visqueux dans une coquille ellipsoïdale

$$I_{\text{fluide}} \approx \frac{9}{8\pi} M (\delta R)^2$$

- Pour tous les noyaux déformés ont observé un moment d'inertie I tel que $I_{\text{fluide}} < I < I_{\text{rigide}}$

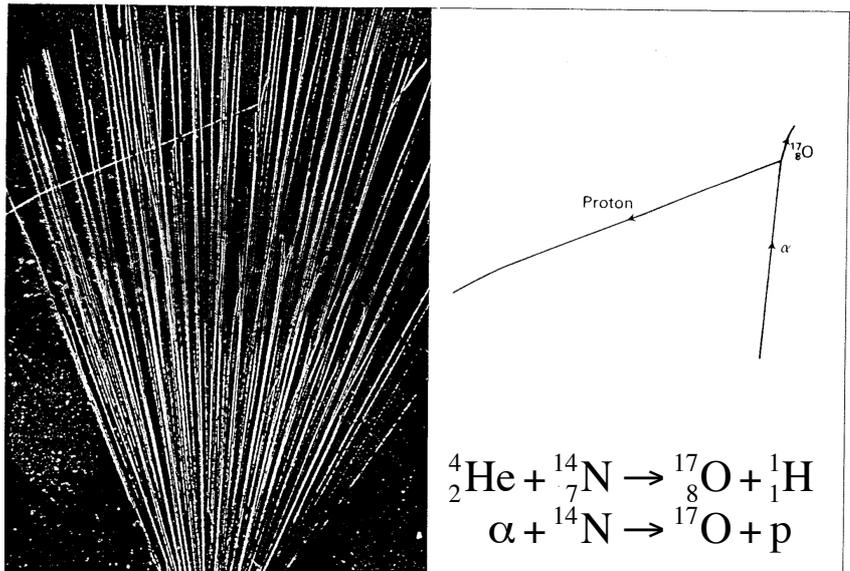


OS, 27 novembre 2024

181

Dernier chapitre : réactions nucléaires

- Sommaire
 - Introduction
 - Cinématique non-relativiste
 - Description quantique de la diffusion
 - Résonances
 - Modèle du noyau composé de Bohr

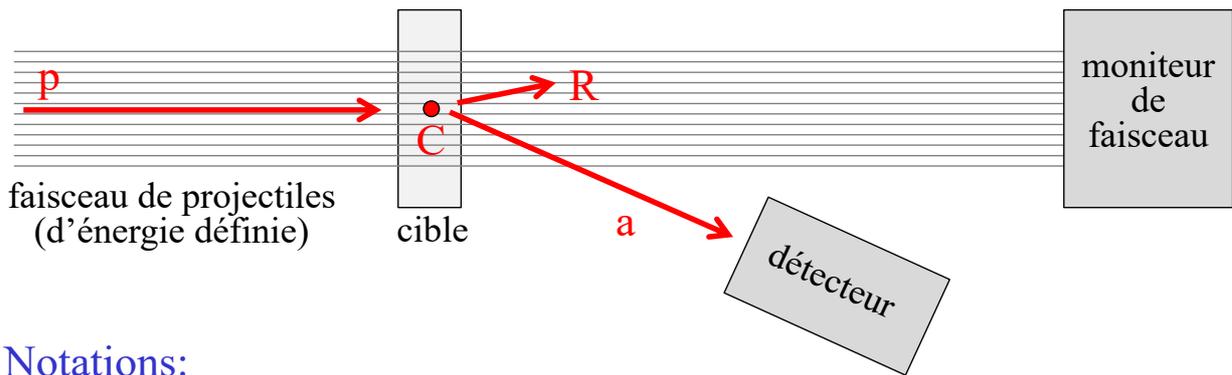


Première réaction nucléaire observée en 1919 par Rutherford (et photographiée en 1925 par Blackett avec une chambre à brouillard)

OS, 4 décembre 2024

182

Réactions nucléaires



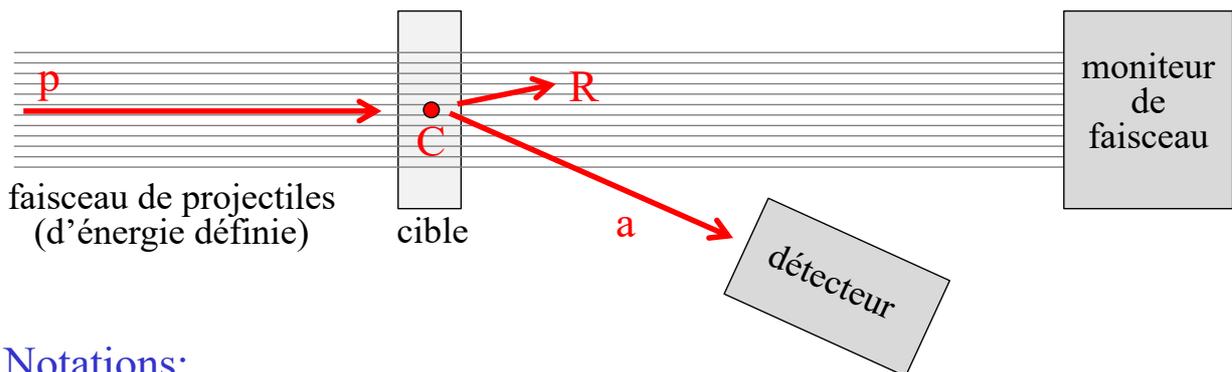
- Notations:



p = projectile (noyau, pion, électron, ...), $E > 1$ MeV si chargé positivement
 C = cible (noyau au repos)
 a = particule détectée
 R = noyau de recul

– exemple: $^{14}\text{N}(\alpha, p)^{17}\text{O}$

Réactions nucléaires



- Notations:



p = projectile (noyau, pion, électron, ...), $E > 1$ MeV si chargé positivement
 C = cible (noyau au repos)
 a = particule détectée
 R = noyau de recul

– exemples: $^{14}_7\text{N}(\alpha, p)^{17}_8\text{O}$
 $^9_4\text{Be}(\alpha, n)^{12}_6\text{C}$

Réactions nucléaires: définitions

- Energie libérée dans une réaction: $Q = (m_p + m_C - m_a - m_R)c^2 = T_a + T_R - T_p$
- Réaction exoergique $\Leftrightarrow Q > 0$
- Réaction endoergique $\Leftrightarrow Q < 0$
 - seuil d'une réaction: $T_p > T_{\text{seuil}} = -Q \left(1 + \frac{m_p}{m_C} \right)$
- Diffusion:
 - réaction où on retrouve le projectile dans l'état final par ex. ${}^7\text{Li}(p,pT){}^4\text{He}$
- Diffusion élastique ($\Rightarrow Q = 0$)
 - réaction où les particules finales sont les mêmes que les particules initiales (et dans le même état d'énergie interne) par ex. ${}^{12}\text{C}(n,n){}^{12}\text{C}$
- Diffusion inélastique par ex. ${}^{12}\text{C}(n,n){}^{12}\text{C}^*$
- Réaction nucléaire (sans diffusion) par ex. ${}^9\text{Be}(\alpha,n){}^{12}\text{C}$

Qu'apprend-on en étudiant les réactions nucléaires ?

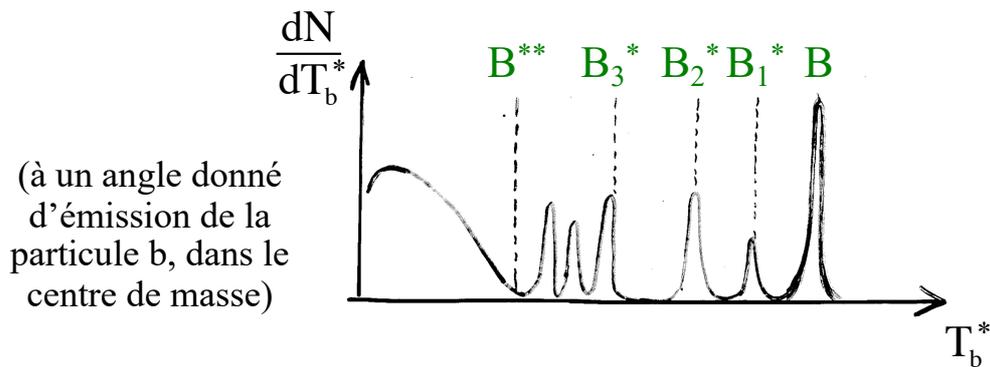
- **Masses, niveaux d'énergie, spins et parités, ... des noyaux**
 - mesure des valeurs de Q
 - spectroscopie nucléaire
- **Taille et structure des noyaux**
 - découverte du noyau (Rutherford)
 - diffusion de neutrons (ou d'électrons)
 - distribution de matière (ou de charge) dans les noyaux
- **Nucléosynthèse en astrophysique et cosmologie**
 - abondance naturelle des isotopes
 - « fonctionnement » des étoiles
- **Production d'énergie et d'isotopes artificiels**
 - centrales nucléaires
 - isotopes pour applications industrielles ou médicales

Spectroscopie nucléaire

- Réaction



- Le noyau B peut aussi être produit dans un état excité B_i^* ou B^{**}



Description quantique de la diffusion (1)

- Diffusion élastique $a + A \rightarrow a + A$
- Equation de Schrödinger stationnaire

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_a} \vec{\nabla}_a^2 - \frac{\hbar^2}{2m_A} \vec{\nabla}_A^2 + V(\vec{r}_a - \vec{r}_A) \right] \psi_{\text{tot}}(\vec{r}_a, \vec{r}_A) = T_{\text{tot}} \psi_{\text{tot}}(\vec{r}_a, \vec{r}_A)$$

– changement de coordonnées $(\vec{r}_a, \vec{r}_A) \rightarrow (\vec{r}, \vec{R})$

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_a - \vec{r}_A & \text{coordonnées relatives} \\ \vec{R} = \frac{m_a \vec{r}_a + m_A \vec{r}_A}{m_a + m_A} & \text{coordonnées du centre de masse} \end{cases}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}_r^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_R^2 + V(\vec{r}) \right] \psi_{\text{tot}}(\vec{r}, \vec{R}) = T_{\text{tot}} \psi_{\text{tot}}(\vec{r}, \vec{R})$$

– avec $\begin{cases} \mu = \frac{m_a m_A}{m_a + m_A} & \text{masse réduite} \\ M = m_a + m_A & \text{masse totale} \end{cases}$

Description quantique de la diffusion (2)

- Séparation des variables $\psi_{\text{tot}}(\vec{r}, \vec{R}) = \psi(\vec{r})\psi_{\text{CM}}(\vec{R})$
- L'équation de Schrödinger devient, après division par ψ_{tot}

$$\underbrace{\frac{1}{\psi(\vec{r})} \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}_r^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r})}_{= \text{constante} = T} + \underbrace{\frac{1}{\psi_{\text{CM}}(\vec{R})} \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_R^2 \right] \psi_{\text{CM}}(\vec{R})}_{= \text{constante} = T_{\text{CM}}} = T_{\text{tot}}$$

- On obtient deux équations:

- mouvement de la particule relative dans un potentiel $V(\vec{r})$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}_r^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = T \psi(\vec{r})$$

- mouvement du centre de masse (« particule » libre)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_R^2 \right] \psi_{\text{CM}}(\vec{R}) = T_{\text{CM}} \psi_{\text{CM}}(\vec{R})$$

Description quantique de la diffusion (3)

- Etats stationnaires asymptotiques, pour r grand tel que $V(\vec{r})=0$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}^2 \right] \psi_{\text{libre}}(\vec{r}) = T \psi_{\text{libre}}(\vec{r})$$

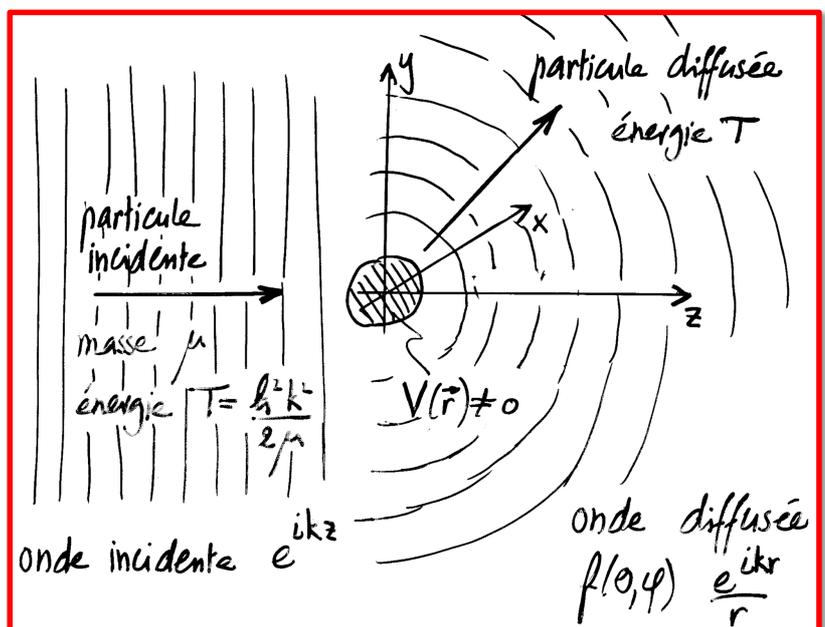
- Solutions physiques

- particule incidente
 - onde plane se propageant selon Oz

$$\psi_{\text{inc}}(\vec{r}) \rightarrow \exp(ikz)$$

- particule diffusée
 - onde sphérique sortante

$$\psi_{\text{diff}}(\vec{r}) \rightarrow \underbrace{f(\theta, \varphi)}_{\text{amplitude de diffusion}} \frac{\exp(ikr)}{r}$$



Description quantique de la diffusion (4)

- Onde totale

$$\psi(\vec{r}) = \psi_{\text{inc}}(\vec{r}) + \psi_{\text{diff}}(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \exp(ikz) + f(\theta, \varphi) \frac{\exp(ikr)}{r}$$

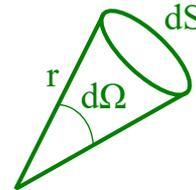
- Calcul section efficace élastique

– flux incident: $F_{\text{inc}} = C |\psi_{\text{inc}}|^2 v = C \frac{\hbar k}{\mu}$

– flux diffusé: $F_{\text{diff}} = C |\psi_{\text{diff}}|^2 v = C \frac{\hbar k}{\mu} \frac{|f(\theta, \varphi)|^2}{r^2}$

- nombre dn de particules diffusées élastiquement

dans $d\Omega$ par unité de temps: $dn = F_{\text{diff}} dS = F_{\text{diff}} r^2 d\Omega \Rightarrow d\sigma_{\text{el}} = \frac{dn}{F_{\text{inc}}} = |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$



- Section efficace élastique différentielle

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2$$

Hypothèse pour la suite:
projectile et cible
non polarisés
 $\Rightarrow f(\theta, \varphi) = f(\theta)$

Décomposition en ondes partielles (1)

- Equation de Schrödinger stationnaire d'une particule libre

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}^2 \right] \psi_{\text{libre}}(\vec{r}) = T \psi_{\text{libre}}(\vec{r}) \Leftrightarrow [\vec{\nabla}^2 + k^2] \psi_{\text{libre}}(\vec{r}) = 0, \quad T = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$$

- les solutions de moment cinétique orbital ℓ défini

$$\psi_{k\ell m}(\vec{r}) = R_{k\ell}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \quad \begin{array}{l} k = \text{« nombre quantique radial » (continu)} \\ Y_{\ell}^m = \text{harmonique sphérique} \end{array}$$

forment une base des fonctions d'onde stationnaires

- Décomposition de l'onde plane incidente sur cette base

$$\exp(ikz) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} c_{k\ell m} \psi_{k\ell m}(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{k\ell 0} \psi_{k\ell 0}(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{k\ell 0} R_{k\ell}(r) Y_{\ell}^0(\theta)$$

car $\exp(ikz)$ est une fonction propre de L_z pour la valeur propre $m = 0$:

$$L_z \exp(ikz) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \exp(ikr \cos \theta) = 0$$

Décomposition en ondes partielles (2)

- Comportement asymptotique de l'onde incidente:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{inc}}(\vec{r}) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \exp(ikz) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{k\ell 0} R_{k\ell}(r) Y_{\ell}^0(\theta) \\ &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\pi(2\ell+1)} \frac{i^{\ell}}{ik} \left[\underbrace{\frac{\exp\left(i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right)}{r}}_{\text{onde sphérique sortante}} - \underbrace{\frac{\exp\left(-i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right)}{r}}_{\text{onde sphérique entrante}} \right] Y_{\ell}^0(\theta) \end{aligned}$$

- Le potentiel ne peut affecter que les ondes sphériques sortantes
→ comportement asymptotique de l'onde totale:

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\pi(2\ell+1)} \frac{i^{\ell}}{ik} \left[\eta_{\ell} \frac{\exp\left(i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right)}{r} - \frac{\exp\left(-i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right)}{r} \right] Y_{\ell}^0(\theta)$$

coefficients complexes décrivant l'action du potentiel, c'est-à-dire l'interaction entre le projectile et la cible

Décomposition en ondes partielles (3)

- Comportement asymptotique de l'onde diffusée:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{diff}}(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) - \psi_{\text{inc}}(\vec{r}) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\pi(2\ell+1)} \frac{i^{\ell}}{ikr} (\eta_{\ell} - 1) \exp\left(i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right) Y_{\ell}^0(\theta) \\ &= \frac{\exp(ikr)}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\pi(2\ell+1)} \frac{i^{\ell}}{k} (1 - \eta_{\ell}) Y_{\ell}^0(\theta) \\ &= \text{amplitude de diffusion} = f(\theta) \end{aligned}$$

- On définit l'amplitude d'onde partielle: $T_{\ell} = \frac{i}{2}(1 - \eta_{\ell})$

- Amplitude de diffusion: $f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} T_{\ell} Y_{\ell}^0(\theta)$

Décomposition en ondes partielles (4)

- Section efficace différentielle élastique:

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sqrt{2\ell+1} \sqrt{2\ell'+1} (1-\eta_{\ell})(1-\eta_{\ell'}^*) Y_{\ell}^0(\theta) Y_{\ell'}^{0*}(\theta)$$

- Section efficace élastique:

$$\sigma_{\text{el}} = \int \frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} d\Omega = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) |1-\eta_{\ell}|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) |T_{\ell}|^2$$

ou bien $\sigma_{\text{el}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{\text{el}}^{(\ell)}$

$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell+1) |1-\eta_{\ell}|^2 = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell+1) |T_{\ell}|^2$$

section efficace partielle dans l'onde ℓ

Décomposition en ondes partielles (5)

$$\eta_{\ell} = 1 + 2i T_{\ell} \Leftrightarrow T_{\ell} = \frac{i}{2} (1 - \eta_{\ell})$$

- Section efficace élastique

$$\sigma_{\text{el}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{\text{el}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell+1) |1-\eta_{\ell}|^2 = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell+1) |T_{\ell}|^2$$

- Section efficace inélastique

$$\sigma_{\text{inel}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{\text{inel}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell+1) (1 - |\eta_{\ell}|^2)$$

- Section efficace totale

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}}$$

$$\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)} = \sigma_{\text{el}}^{(\ell)} + \sigma_{\text{inel}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{tot}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{\text{tot}}^{(\ell)}$$

$$\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)} = \frac{2\pi}{k^2} (2\ell+1) (1 - \text{Re}(\eta_{\ell})) = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell+1) \text{Im}(T_{\ell})$$

expressions invariantes sous $\eta_{\ell} \leftrightarrow \eta_{\ell}^*$ et $T_{\ell} \leftrightarrow -T_{\ell}^*$

Théorème optique

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f(0))$$

σ_{tot} = section efficace totale
 $f(0)$ = amplitude de diffusion élastique vers l'avant ($\theta = 0$)
 k = nombre d'onde du projectile relativement à la cible

- Validité tout à fait générale
- Démonstration (exercice):
 - évaluer $f(0)$ à partir de $f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} T_{\ell} Y_{\ell}^0(\theta)$
 - puis utiliser $\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \text{Im}(T_{\ell})$

Inelasticité et déphasage

- On pose

$\eta_{\ell} = \rho_{\ell} \exp(2i\delta_{\ell})$

ρ_{ℓ} = inelasticité dans l'onde ℓ ($\rho_{\ell} \geq 0$)
 δ_{ℓ} = déphasage dans l'onde ℓ ($\delta_{\ell} \geq 0$)

- Propriétés:

– $\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} \geq 0 \Rightarrow |\eta_{\ell}| = \rho_{\ell} \leq 1$

– cas purement élastique:

$\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = 0 \Leftrightarrow \rho_{\ell} = 1$

– si $\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} > 0$ alors $\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} > 0$

– $\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = 0$ pour $\eta_{\ell} = +1$

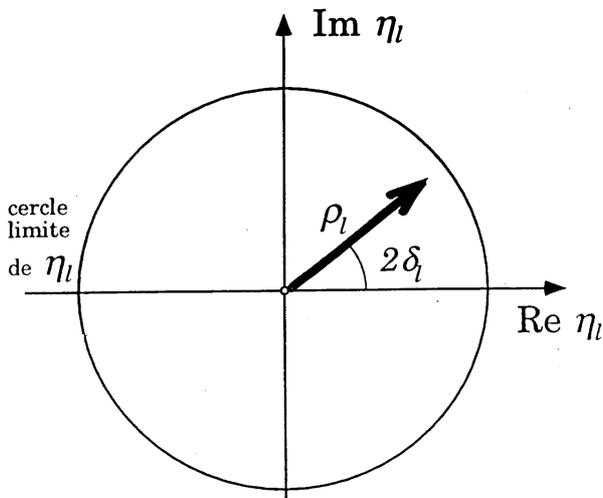
– $\sigma_{\text{el}}^{(\ell)}$ maximale pour $\eta_{\ell} = -1$, $\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)}$ maximale pour $\eta_{\ell} = 0$

η_{ℓ}	$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)}$	$\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)}$	$\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)}$
+1	0	0	0
-1	$\frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)$	0	$\frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)$
0	$\frac{\pi}{k^2}(2\ell+1)$	$\frac{\pi}{k^2}(2\ell+1)$	$\frac{2\pi}{k^2}(2\ell+1)$

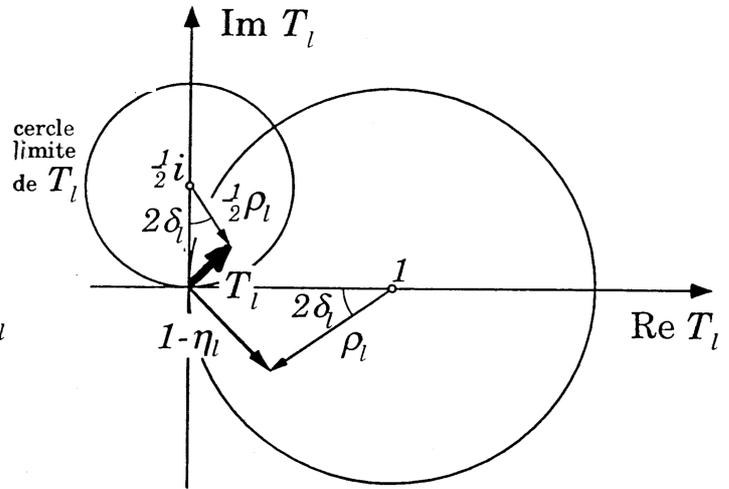
Rappel: $\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2}(2\ell+1)|1-\eta_{\ell}|^2$, $\sigma_{\text{inel}}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2}(2\ell+1)(1-|\eta_{\ell}|^2)$, $\sigma_{\text{tot}}^{(\ell)} = \frac{2\pi}{k^2}(2\ell+1)(1-\text{Re}(\eta_{\ell}))$

Diagrammes d'Argand

cercle limite \Leftrightarrow collisions purement élastiques



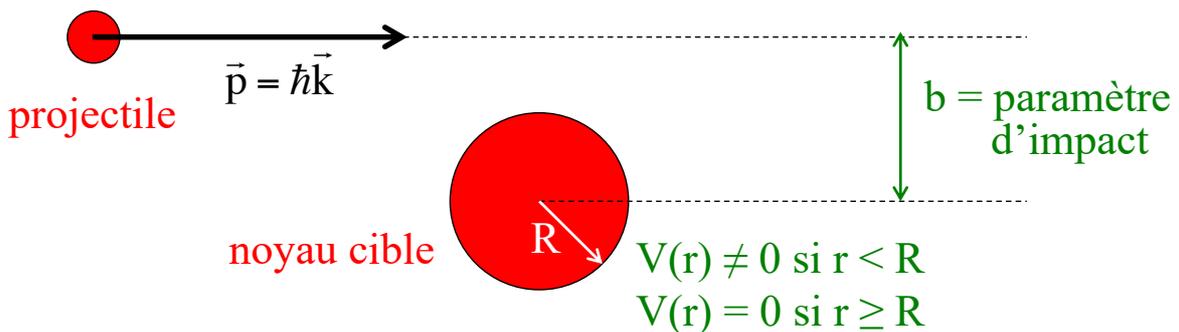
coefficient η_ℓ représenté dans le plan complexe



amplitude d'onde partielle T_ℓ représentée dans le plan complexe

$$\eta_\ell = \rho_\ell \exp(2i\delta_\ell) \quad \eta_\ell = 1 + 2iT_\ell \Leftrightarrow T_\ell = \frac{i}{2}(1 - \eta_\ell)$$

Intérêt du développement en ondes partielles (1)

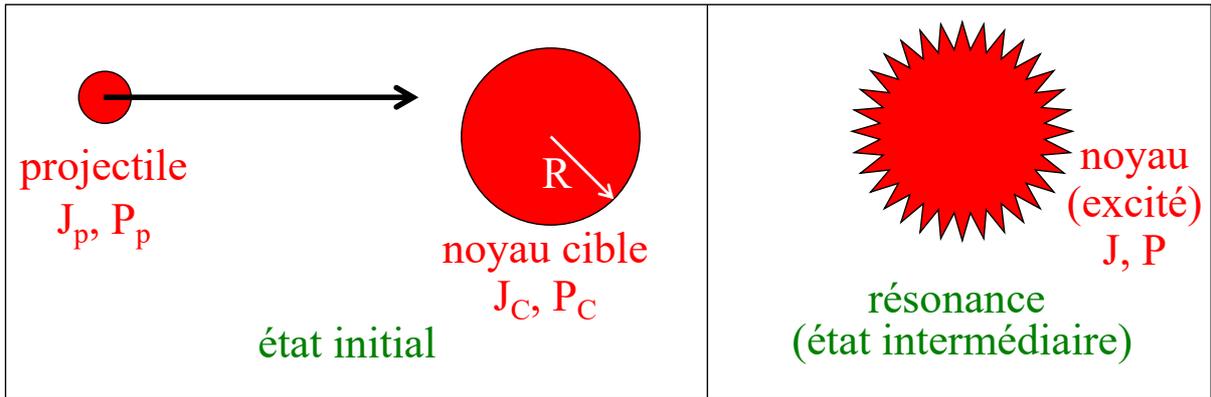


- Interaction uniquement si $b < R$, c'est-à-dire si le moment cinétique $L = pb$ est tel que $L < pR$

- Seules les ondes partielles avec $\ell \leq \ell_{\max} = \frac{L_{\max}}{\hbar} = \frac{pR}{\hbar} = kR$ contribuent à la section efficace:

$$\sigma = \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}=kR} \sigma^{(\ell)}$$

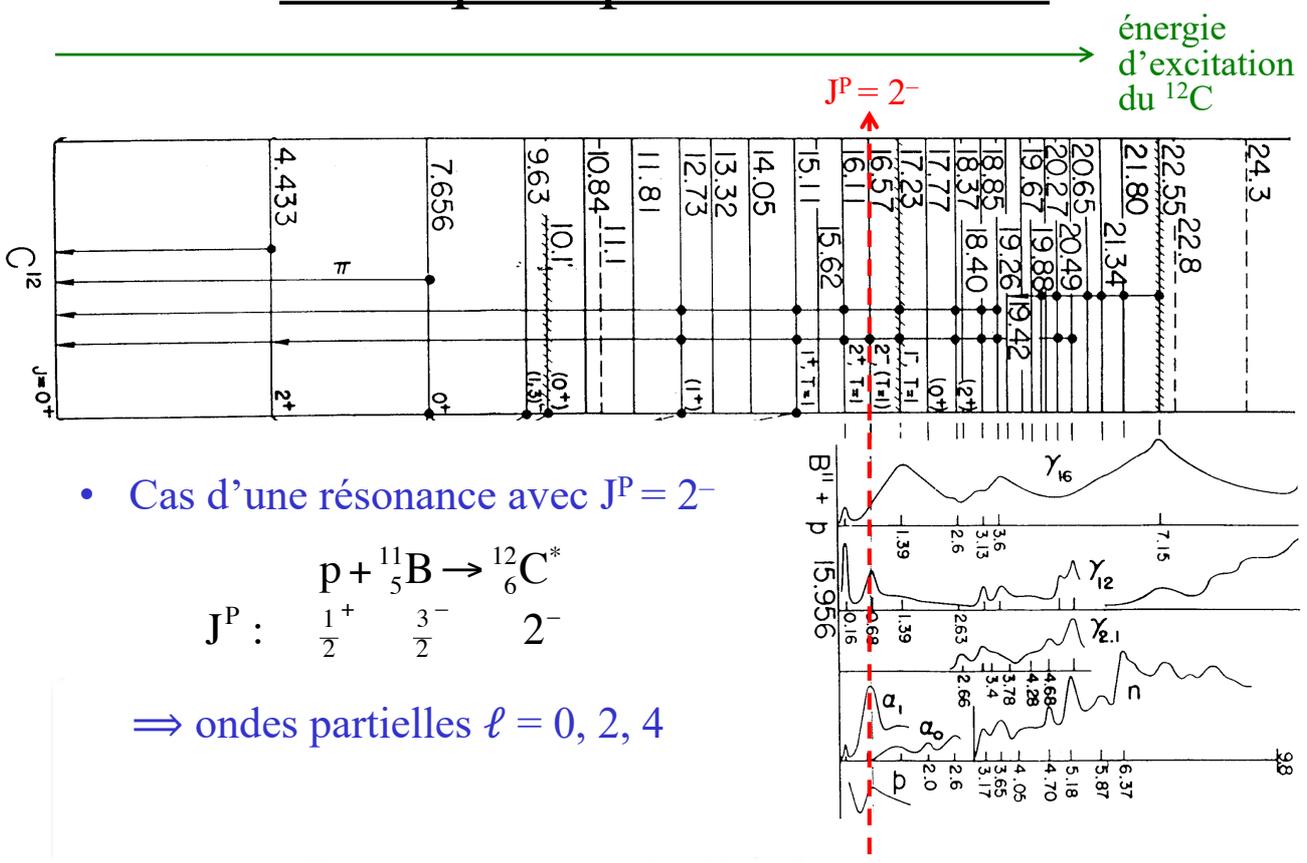
Intérêt du développement en ondes partielles (2)



- Souvent, un phénomène de résonance est observé (formation d'un état métastable composé de la cible et du projectile)
- La résonance a des nombres quantiques (spin J et parité P) définis
- Les lois de conservation restreignent les valeurs des ondes partielles ℓ contribuant à la formation de la résonance

$$\begin{aligned} \text{moment cinétique : } \vec{J} &= \vec{J}_p + \vec{J}_C + \vec{\ell} \\ \text{parité : } P &= P_p P_C (-1)^\ell \end{aligned}$$

Exemple: $p + {}^{11}\text{B} \rightarrow {}^{12}\text{C}^*$



- Cas d'une résonance avec $J^P = 2^-$

$$p + {}^{11}_5\text{B} \rightarrow {}^{12}_6\text{C}^*$$

$$J^P : \begin{matrix} 1^+ & 3^- & 2^- \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix}$$

\Rightarrow ondes partielles $\ell = 0, 2, 4$

Collisions purement élastiques

- Pour tout ℓ tel que $|\eta_\ell|=1$:

$$T_\ell = \frac{i}{2}(1 - \eta_\ell) = \frac{i}{2}(1 - e^{2i\delta_\ell}) = e^{i\delta_\ell} \frac{i}{2}(e^{-i\delta_\ell} - e^{i\delta_\ell}) = e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_\ell$$

NB: T_ℓ (donc δ_ℓ) et k dépendent de l'énergie totale E du système dans le centre de masse

$$\Rightarrow \sigma_{\text{el}}^{(\ell)} \text{ passe par un maximum pour } \delta_\ell = \frac{\pi}{2} \text{ à une certaine énergie } E_0$$

- Développement limité autour de $E=E_0$, c'est-à-dire $\cotg \delta_\ell=0$:

$$T_\ell = \frac{\sin \delta_\ell}{e^{-i\delta_\ell}} = \frac{1}{\cotg \delta_\ell - i} \approx \frac{1}{C(E - E_0) - i} \quad \text{où } C = \left. \frac{d(\cotg \delta_\ell(E))}{dE} \right|_{E=E_0}$$

$$|T_\ell|^2 \approx \frac{1}{C^2(E - E_0)^2 + 1} = \frac{1/C^2}{(E - E_0)^2 + 1/C^2} = \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

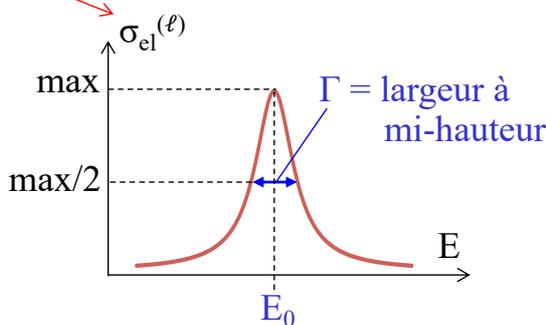
$$\text{où } \Gamma = \frac{2}{|C|}$$

Comportement au voisinage d'une résonance

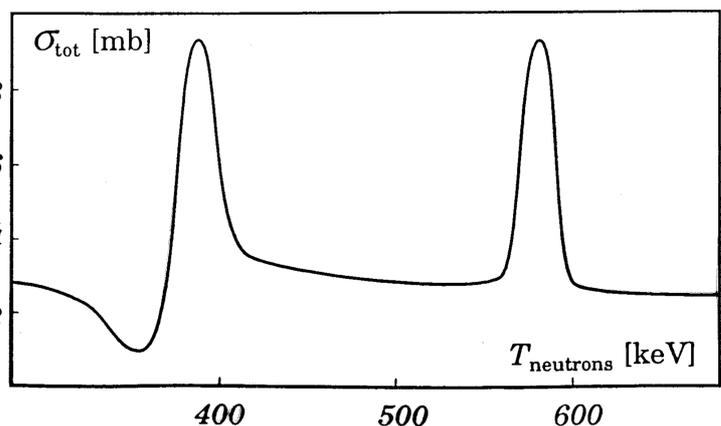
$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) |T_\ell|^2 \quad \text{avec } T_\ell \approx \frac{\Gamma/2}{(E - E_0) - i\Gamma/2} \quad \text{ou } T_\ell \approx \frac{-\Gamma/2}{(E - E_0) + i\Gamma/2}$$

$$\sigma_{\text{el}}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

courbe de Breit-Wigner



$\tau = \hbar/\Gamma = \text{durée de vie moyenne}$

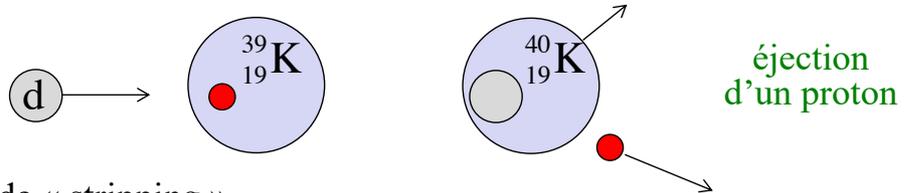


Résonances observées dans la diffusion élastique $^{32}\text{S}(n,n)^{32}\text{S}$

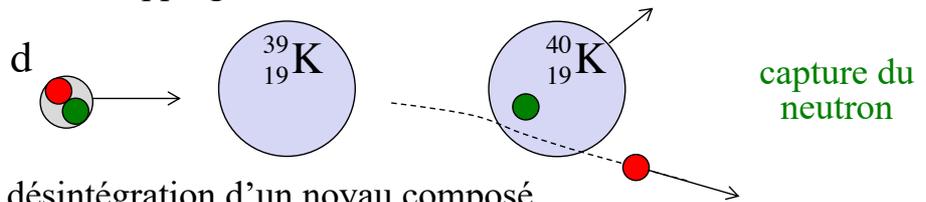
Description des réactions nucléaires

- Exemple: $d + {}^{39}\text{K} \rightarrow p + {}^{40}\text{K}$
 - que se passe-t-il au juste au cours de cette réaction ?
- Trois points de vue extrêmes:

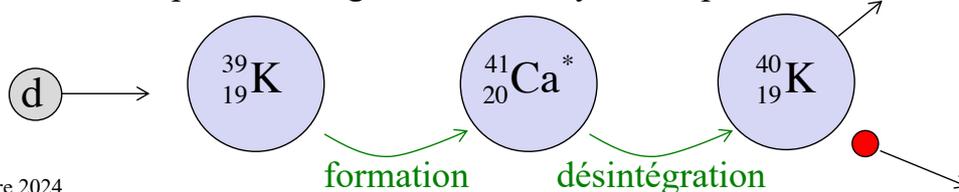
① Réaction directe de « knock-out »



② Réaction directe de « stripping »



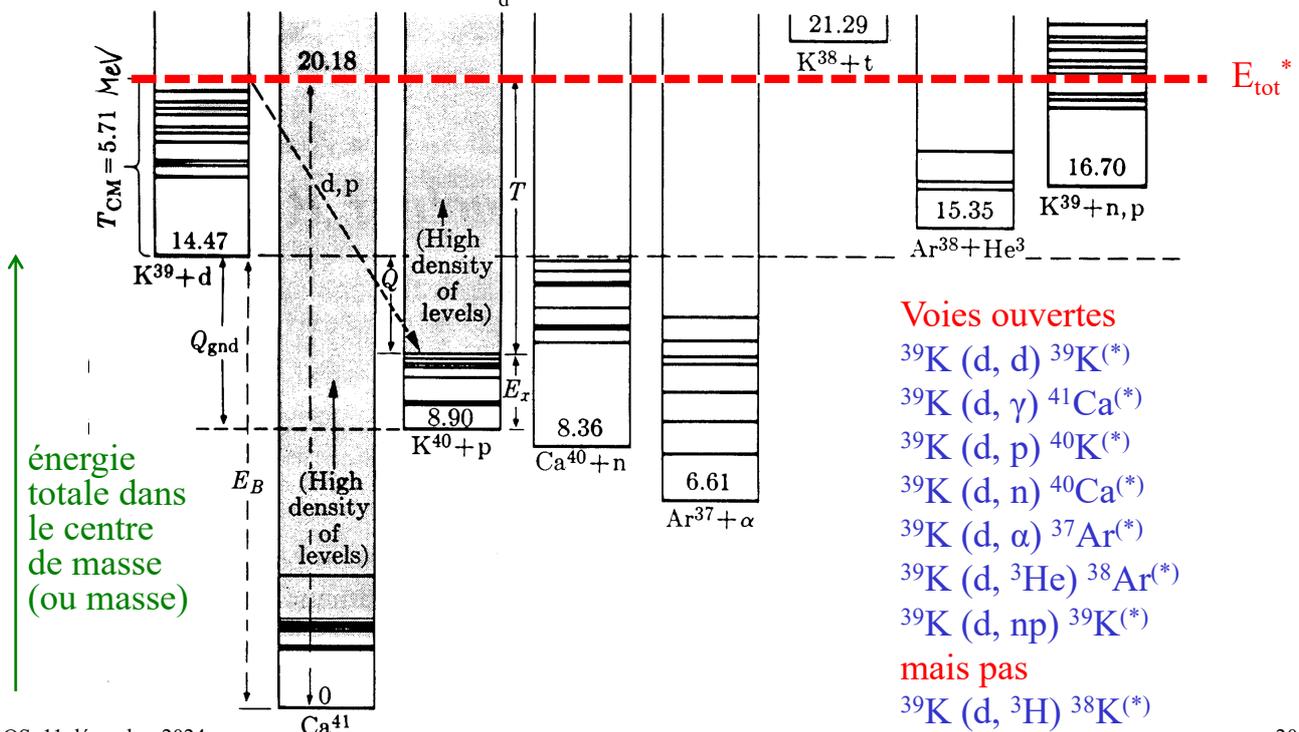
③ Formation puis désintégration d'un noyau composé



Modes de partition du ${}^{41}\text{Ca}^*$

formé par la réaction $d + {}^{39}\text{K} \rightarrow {}^{41}\text{Ca}^*$ avec $T_d = 6 \text{ MeV}$

$$T_{\text{CM}} = T_d^* + T_{{}^{39}\text{K}}^* = \frac{1}{2} \mu v_d^2 = \frac{\mu}{m_d} T_d = 5.71 \text{ MeV}$$

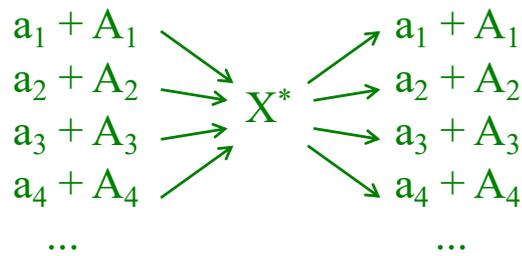


Modèle du noyau composé (1)

N. Bohr (1936)

- Résonance X^*

- pouvant se former et se désintégrer dans plusieurs canaux
- de largeur à mi-hauteur Γ



- Hypothèse du modèle: $\sigma_{i \rightarrow j} = \sigma_i F_j$

$\sigma_{i \rightarrow j} = \sigma(a_i + A_i \rightarrow a_j + A_j)$ = section efficace de la réaction $a_i + A_i \rightarrow a_j + A_j$

$\sigma_i = \sigma(a_i + A_i \rightarrow X^*)$ = section efficace de formation de X^* par le canal i

F_j = probabilité de désintégration de X^* dans le canal j

$$\sum_j F_j = 1$$

- On définit la largeur partielle Γ_j dans le canal j

$$\Gamma_j = F_j \Gamma \quad \text{avec} \quad \sum_j \Gamma_j = \Gamma$$

OS, 11 décembre 2024

207

Modèle du noyau composé (2)

- Réactions inverses l'une de l'autre

- $a_i + A_i \rightarrow a_j + A_j$, de section efficace $\sigma_{i \rightarrow j}$
 - k_i = nombre d'onde du projectile a_i par rapport à la cible A_i
- $a_j + A_j \rightarrow a_i + A_i$, de section efficace $\sigma_{j \rightarrow i}$
 - k_j = nombre d'onde du projectile a_j par rapport à la cible A_j

- Théorème (démontrable en mécanique quantique)

- pour une même énergie totale E dans le centre de masse:

$$k_i^2 \sigma_{i \rightarrow j} = k_j^2 \sigma_{j \rightarrow i}$$

relation du bilan détaillé

- On a ainsi

$$k_i^2 \sigma_i F_j = k_j^2 \sigma_j F_i \Rightarrow \frac{k_i^2 \sigma_i}{F_i} = \frac{k_j^2 \sigma_j}{F_j} = C(E) = \text{fonction de } E \text{ indépendante de } i \text{ ou } j$$

$$\sigma_{i \rightarrow j}(E) = \sigma_i(E) F_j = \frac{C(E) F_i F_j}{k_i^2(E)} = \frac{1}{k_i^2(E)} \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{\Gamma^2} C(E)$$

- Cas d'une résonance dans l'onde ℓ avec un seul mode de désintégration (donc d'une diffusion élastique avec $F_1=1$, $\Gamma_1=\Gamma$, $k_1=k$):

$$\sigma_{i \rightarrow i}^{(\ell)}(E) = \sigma_{el}^{(\ell)}(E) = \frac{1}{k^2} C(E) \Rightarrow C(E) = \pi(2\ell + 1) \frac{\Gamma^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

OS, 11 décembre 2024

208

Modèle du noyau composé (3)

- Pour une résonance formée dans l'onde ℓ

$$\sigma_{i \rightarrow j}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k_i^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4} \quad a_i + A_i \rightarrow X^* \rightarrow a_j + A_j$$

- valable dans le cas particulier d'une résonance de spin ℓ formée dans le canal i à l'aide d'un projectile de spin 0 sur une cible de spin 0 et se désintégrant dans le canal j

- Cas plus général tenant compte des spins

$$\sigma_{i \rightarrow j}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k_i^2} \frac{(2J + 1)}{(2s_i + 1)(2S_i + 1)} \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

où $\vec{J} = \vec{s}_i + \vec{S}_i + \vec{\ell}$ \vec{J} = spin de la résonance X^*
 \vec{s}_i = spin du projectile a_i
 \vec{S}_i = spin de la cible A_i

- valable dans le cas où les particules de l'état initial ne sont pas polarisées et où on ne mesure pas l'état de spin dans l'état final

Modèle du noyau composé (4)

- Pour une réaction $a+A$ donnant un état final quelconque ayant passé par une résonance dans l'onde ℓ

$$\sigma_{el}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_a^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

$$\sigma_{inel}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_a (\Gamma - \Gamma_a)}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

$$\sigma_{tot}^{(\ell)} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_a \Gamma}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

en remplaçant $(2\ell + 1)$ par le facteur de spin donné à la page précédente

Γ_a = largeur partielle de la résonance dans le canal $a+A$

Γ = largeur totale de la résonance

E_0 = énergie centrale de la résonance

E = énergie totale de la collision dans le centre de masse

$k = k(E)$ = nombre d'onde du projectile a par rapport à la cible A

$\Gamma = \hbar/\tau$, où τ est la durée de vie moyenne de la résonance

Diagramme d'Argand (1)

$$T_\ell = \frac{-\Gamma_a/2}{(E - E_0) + i\Gamma/2}$$

de sorte que

$$\sigma_{el}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) |T_\ell|^2 = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_a^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

$$\phi_\ell = -\arctan\left(\frac{E - E_0}{\Gamma/2}\right)$$

– Evolution de ϕ_ℓ en fonction de E au voisinage de la résonance:

$$\begin{aligned} E \ll E_0 - \Gamma/2 &\Rightarrow \phi_\ell \cong \pi/2 \\ E = E_0 &\Rightarrow \phi_\ell = 0 \\ E \gg E_0 + \Gamma/2 &\Rightarrow \phi_\ell \cong -\pi/2 \end{aligned}$$

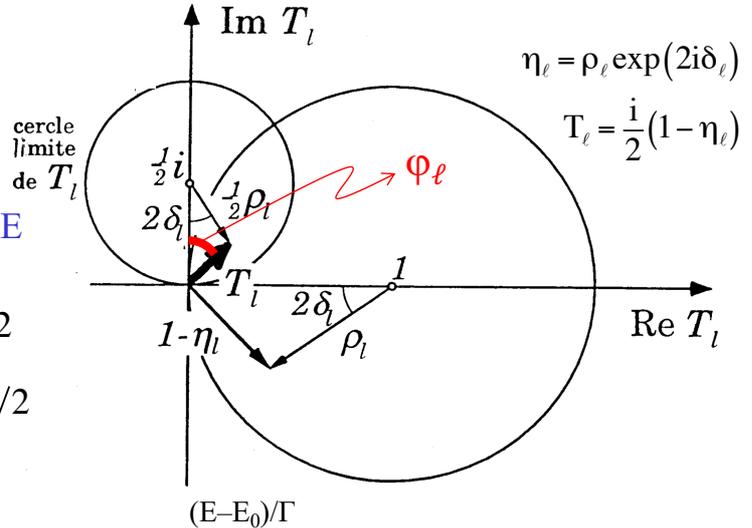
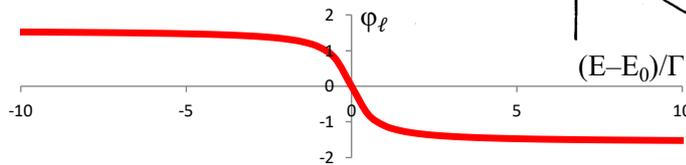
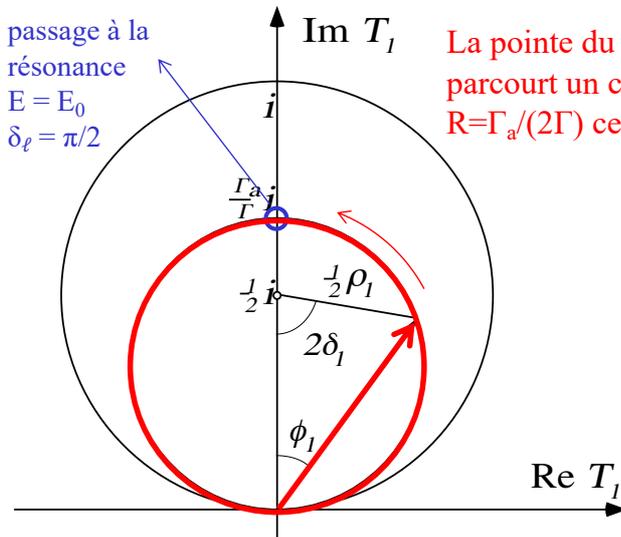


Diagramme d'Argand (2)

$$T_\ell = \frac{-\Gamma_a/2}{(E - E_0) + i\Gamma/2}$$

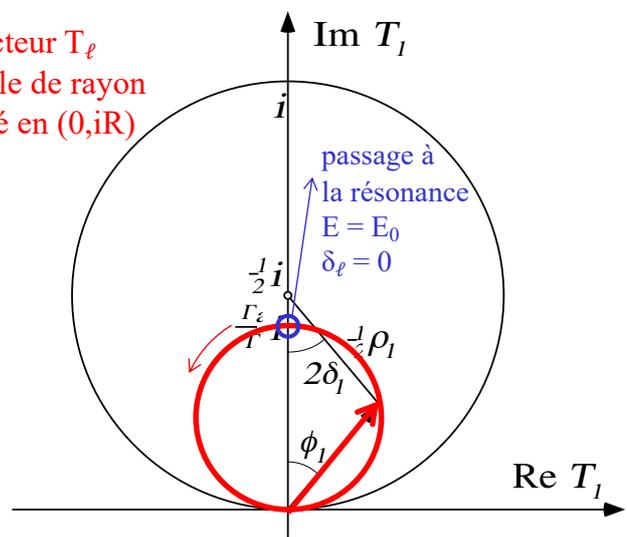
de sorte que

$$\sigma_{el}^{(\ell)} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) |T_\ell|^2 = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma_a^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$



cas avec peu d'inelasticité

La pointe du vecteur T_ℓ parcourt un cercle de rayon $R = \Gamma_a/(2\Gamma)$ centré en $(0, iR)$



cas avec beaucoup d'inelasticité

Description d'une résonance selon Wigner (1)

- Comportement asymptotique de la fonction d'onde dans le cas d'une résonance dans l'onde $\ell=0$

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} & \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{\pi(2\ell+1)} \frac{i^\ell}{ikr} \left[\eta_\ell \exp\left(i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right) - \exp\left(-i\left(kr - \frac{\pi}{2}\ell\right)\right) \right] Y_\ell^0(\theta) \\ & = \frac{\sqrt{\pi}}{ikr} \left[\eta_0 \exp(ikr) - \exp(-ikr) \right] Y_0^0(\theta) \quad \text{avec } \eta_0 = \eta = \rho \exp(2i\delta) \end{aligned}$$

- Potentiel de portée finie a: $\begin{cases} V(r) \neq 0 & \text{si } r < a \\ V(r) = 0 & \text{si } r \geq a \end{cases}$

– la fonction d'onde radiale $R(r) = u(r)/r$ doit être continue et dérivable en $r=a$

$$\begin{cases} u(r) = \text{sol. de l'éq. de Schrödinger} & \text{si } r < a \\ u(r) = \frac{\sqrt{\pi}}{ik} \left[\eta \exp(ikr) - \exp(-ikr) \right] Y_0^0 & \text{si } r \geq a \end{cases}$$

- dérivée logarithmique en $r=a$

$$f = \left[r \frac{d}{dr} \log_e u(r) \right]_{r=a} = \left[\frac{r}{u(r)} \frac{du(r)}{dr} \right]_{r=a} \rightarrow \eta = \frac{f + ika}{f - ika} \exp(-2ika)$$

Description d'une résonance selon Wigner (2)

- Section efficace élastique ($\ell=0$)

$$\sigma_{el}^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} |1 - \eta|^2 = \frac{\pi}{k^2} |A_{pot} + A_{res}|^2$$

$$\begin{aligned} A_{pot} &= \exp(2ika) - 1 \\ A_{res} &= \frac{-2ika}{f - ika} \end{aligned}$$

amplitude potentielle
amplitude résonante

- cas particulier:

- diffusion à basse énergie ($ka \ll 1$) sur une petite sphère « dure » (ou « parfaitement réfléchissante »)

$$\begin{aligned} V(r) &= \infty \quad \text{pour } r < a \\ u(r) &= 0 \quad \text{pour } r < a \\ \Rightarrow f &= \infty \\ \Rightarrow A_{res} &= 0 \quad \Rightarrow \sigma_{el}^{(0)} = 4\pi a^2 \end{aligned}$$

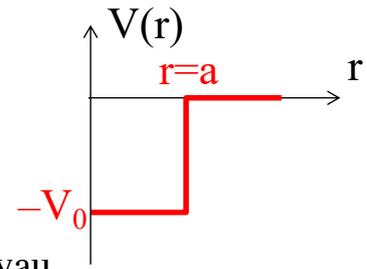
- Section efficace inélastique ($\ell=0$)

$$\sigma_{inel}^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} (1 - |\eta|^2) = \frac{\pi}{k^2} (1 - |1 - A_{res}|^2) = \frac{\pi}{k^2} \frac{-4ka \operatorname{Im} f}{|f - ika|^2} \quad \text{avec } \operatorname{Im} f \leq 0$$

$$\operatorname{Im} f = 0 \quad (f \text{ réel}) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{inel}^{(0)} = 0 \quad (\text{cas purement élastique})$$

Réaction quasi-purement inélastique ($\ell=0$)

- Pour un neutron incident, on peut supposer un puits de potentiel rectangulaire de profondeur V_0



$$\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = T = \text{énergie cinétique du projectile loin du noyau}$$

$$\frac{\hbar^2 K^2}{2\mu} = T + V_0 = \text{énergie cinétique du projectile dans le noyau}$$

- Si on admet que tout projectile en $r=a$ est absorbé, la fonction d'onde radiale dans le noyau est une onde sphérique entrante uniquement

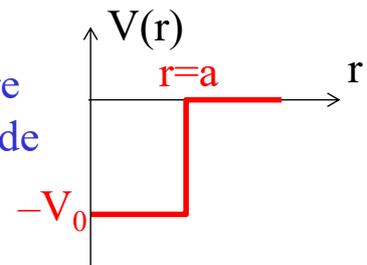
$$R(r) \propto \frac{\exp(-iKr)}{r} \text{ pour } r \leq a \Rightarrow f = -iKa \Rightarrow \sigma_{\text{inel}}^{(0)} = \frac{4\pi K}{k(k+K)^2} \text{ monotone décroissante avec } T$$

- pour un projectile très lent, $T \ll V_0$ et $k \ll K$:

$$\sigma_{\text{inel}}^{(0)} \propto \frac{1}{k} \propto \frac{1}{\text{vitesse du projectile}}$$

Réaction purement élastique ($\ell=0$)

- Si on admet que tout projectile arrivant en $r=a$ pénètre dans le noyau puis en ressort sans perdre d'énergie (diffusion élastique), la fonction d'onde radiale dans le noyau est



$$R(r) \propto \frac{\exp(i(Kr + 2\xi))}{r} - \frac{\exp(-iKr)}{r}$$

$2\xi =$ déphasage de l'onde sortante par rapport à l'onde entrante

- La dérivée logarithmique f s'annule pour certaines valeurs de E

$$f = Ka \cot(Ka + \xi) \text{ réel}$$

$$f(E_0) = 0 \Leftrightarrow \text{passage à la résonance d'énergie } E_0$$

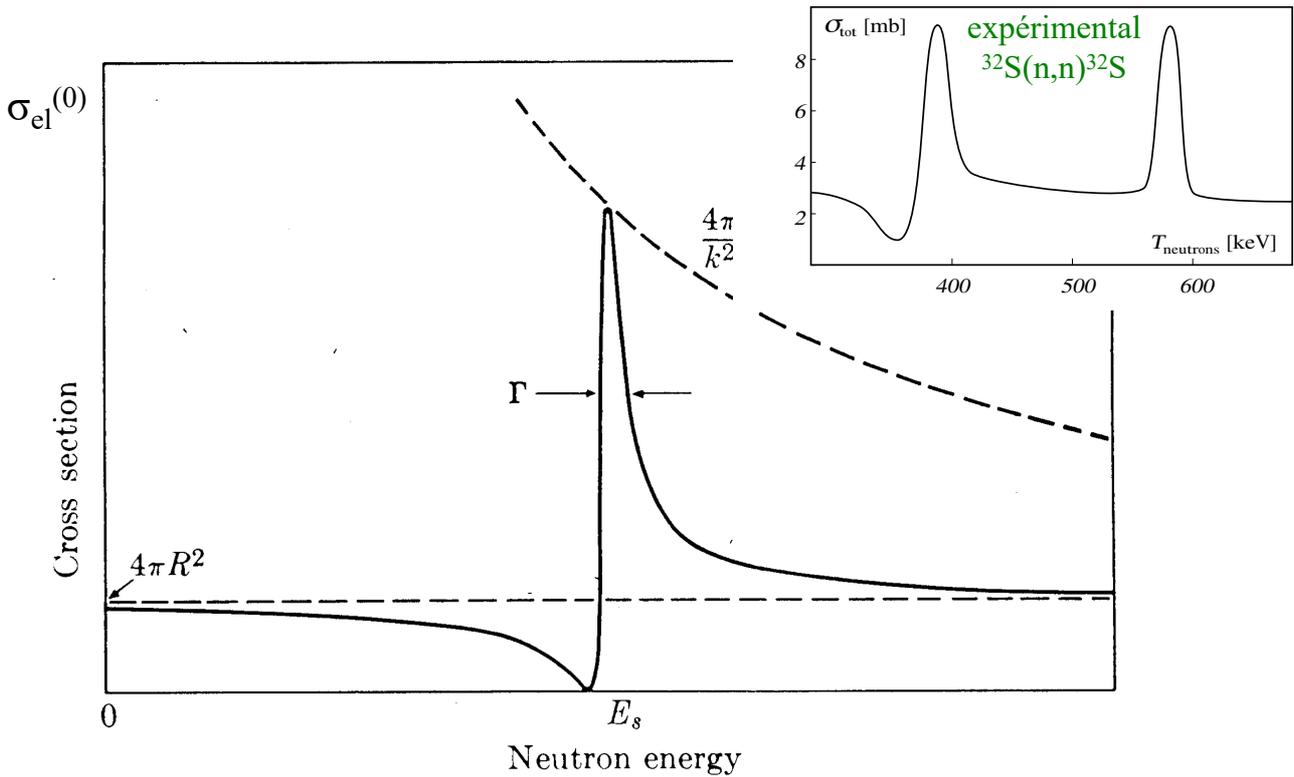
car, si f est réel, $|A_{\text{res}}|^2$ est max. quand $f=0$

- Au voisinage de la résonance

$$\sigma_{\text{el}}^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} \left| \underbrace{\exp(2ika)}_{A_{\text{pot}}} - 1 + \frac{i\Gamma_{\text{el}}}{E - E_0 + i\Gamma/2} \right|^2$$

$A_{\text{pot}} \quad A_{\text{res}}$

Section efficace de diffusion élastique de neutrons au voisinage d'une résonance dans l'onde $\ell=0$



Diffusion élastique dans l'onde $\ell=0$ (diag. d'Argand)

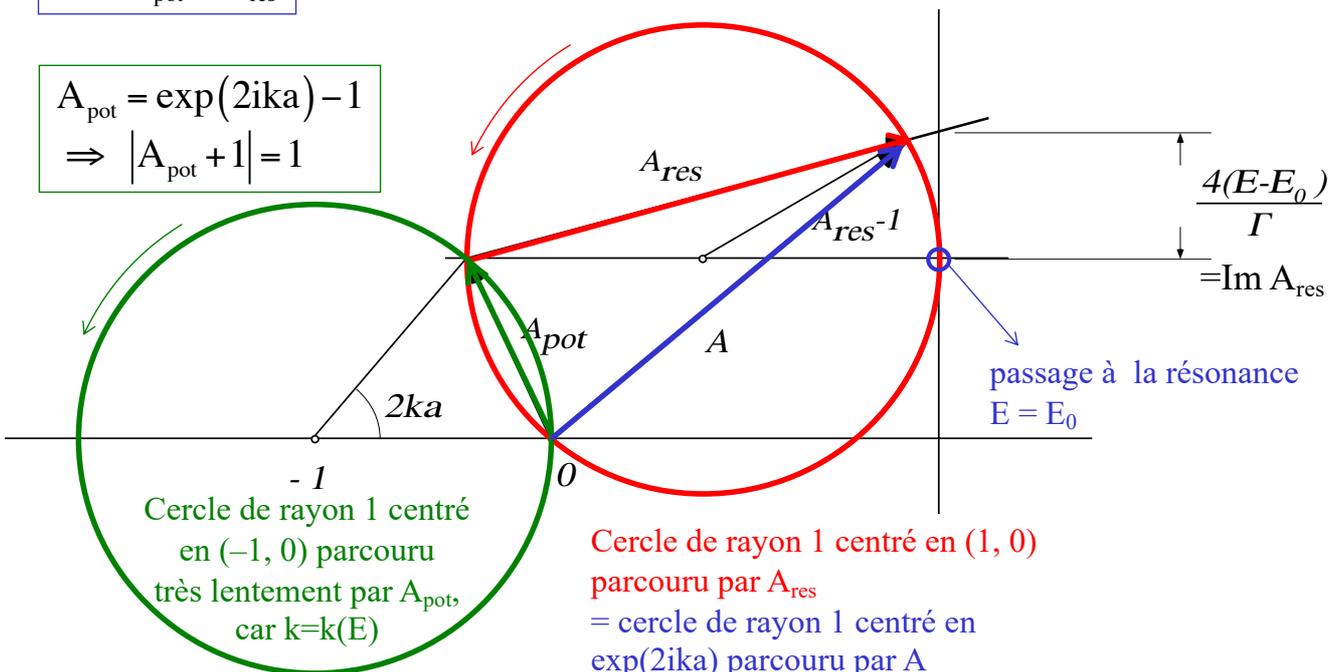
$$\sigma_{el}^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} |A|^2$$

$$A = A_{pot} + A_{res}$$

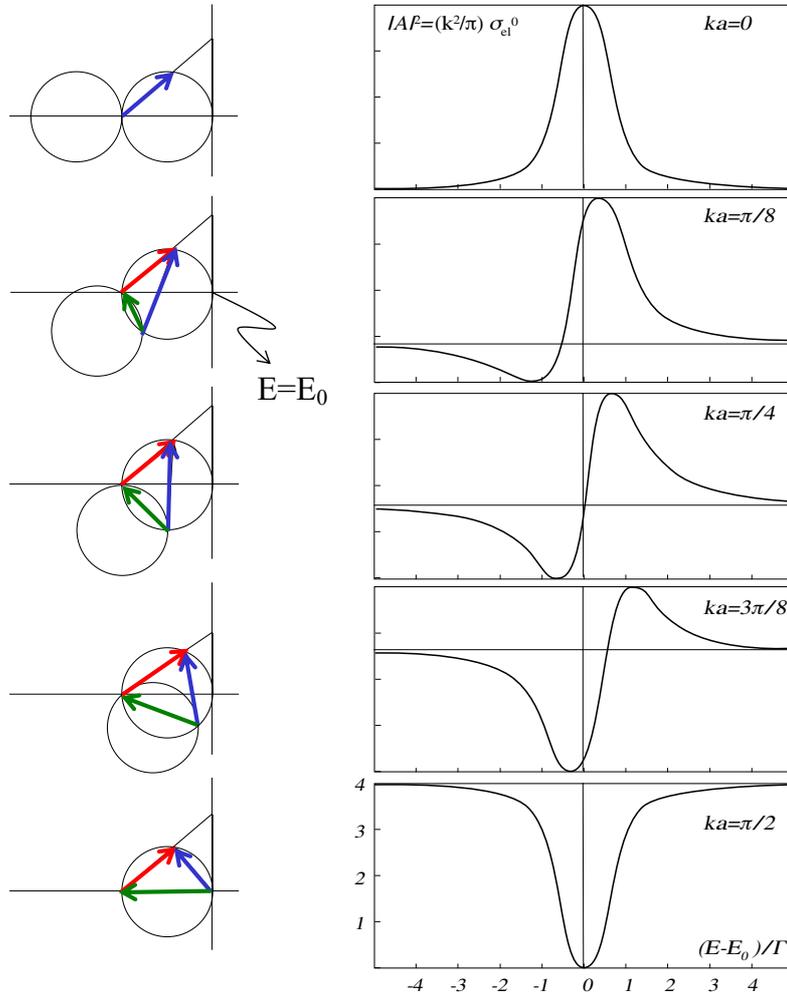
$$A_{res} = \frac{i\Gamma}{E - E_0 + i\Gamma/2} \Rightarrow |A_{res} - 1| = 1$$

$$A_{pot} = \exp(2ika) - 1$$

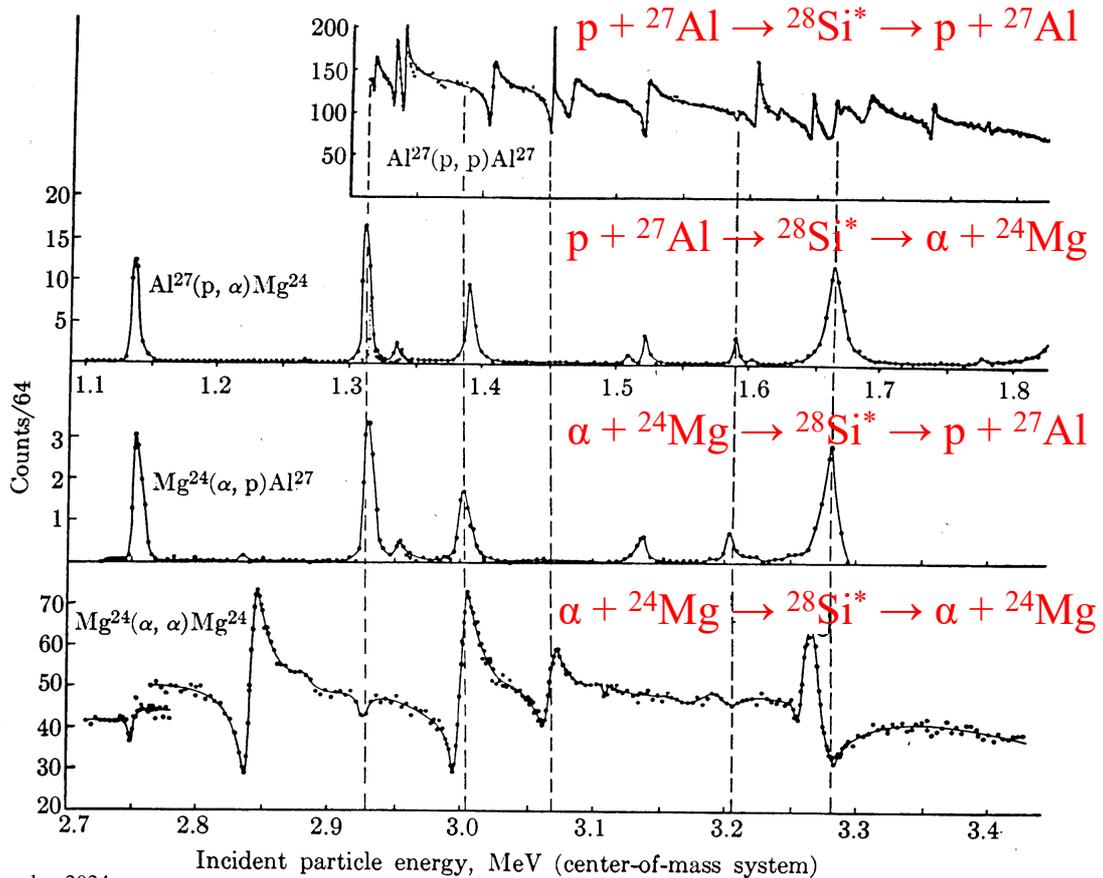
$$\Rightarrow |A_{pot} + 1| = 1$$



$$A = A_{\text{pot}} + A_{\text{res}}$$



Résonances correspondants aux niveaux excités du ^{28}Si



Résonances correspondants aux niveaux excités du ^{28}Si

