

Série et transformée de Fourier

Dans ces quelques pages j'ai résumé des propriétés principales, sans développement rigoureux, de la série et la transformée de Fourier.

I. Série de Fourier

1. Définition

Une fonction $f(t)$ périodique avec une période T (donc, $f(t+T)=f(t)$) peut être représenté par la série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right] = c_n \sum_{n=1}^{\infty} e^{\left(\frac{2\pi i n t}{T}\right)}$$

Les coefficients sont calculés comme suite :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

$$\text{or : } c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{\left(\frac{-2\pi i n t}{T}\right)} dt$$

2. Propriétés

- La série de Fourier est définie seulement pour des fonctions périodiques.
- Les coefficients a_n , b_n sont des fonctions linéaires de $f(t)$.
- Le coefficient a_0 est la moyenne de $f(t)$ sur une période T .
- Si $f(t)$ est une fonctions impaire, tout les coefficients $a_n = 0$.
- Si $f(t)$ est une fonctions paire, tout les coefficients $b_n = 0$.

3. Transformations des quelques fonctions simples

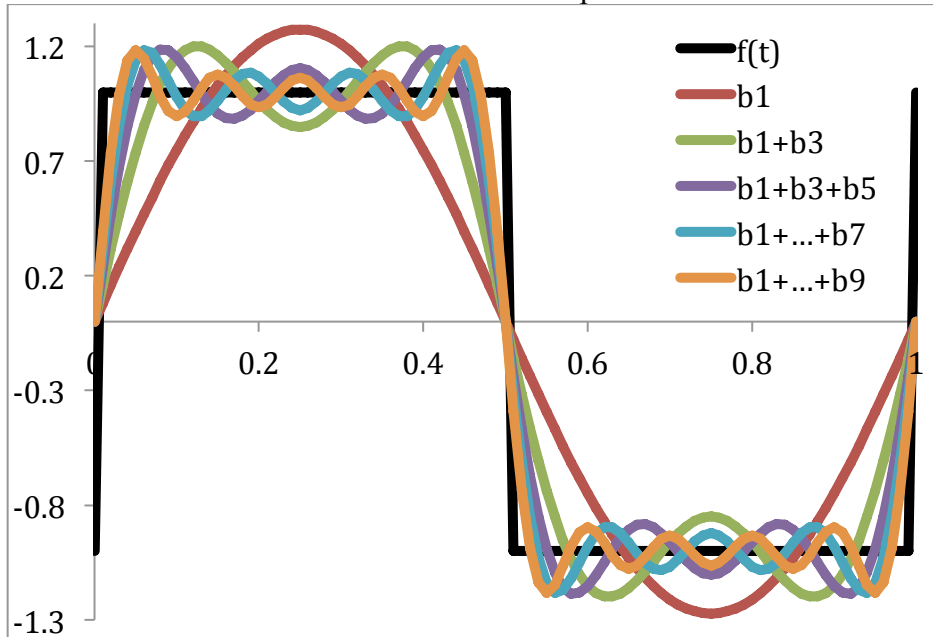
- Pour $f(t) = \cos(2\pi t/T)$, seul $a_1 = 1$, tout autres $a_n = 0$ ($n=0,2,3,\dots$)
- La même chose pour $f(t) = \sin(2\pi t/T)$: seul $b_1 = 1$, tout autres $b_n = 0$ ($n=2,3,\dots$)

$$\text{- Une fonction "carrée" (impaire): } f(t) = \begin{cases} -1, & mT \leq t < \left(m + \frac{1}{2}\right)T \\ 1, & \left(m + \frac{1}{2}\right)T \leq t < (m+1)T \end{cases}$$

est représentée par la série : $f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$,

donc : $a_n = 0$, $b_{2n} = 0$, $b_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)}$

Voici la construction de la fonction "carrée" par une somme des fonctions sinusoïdales successives :

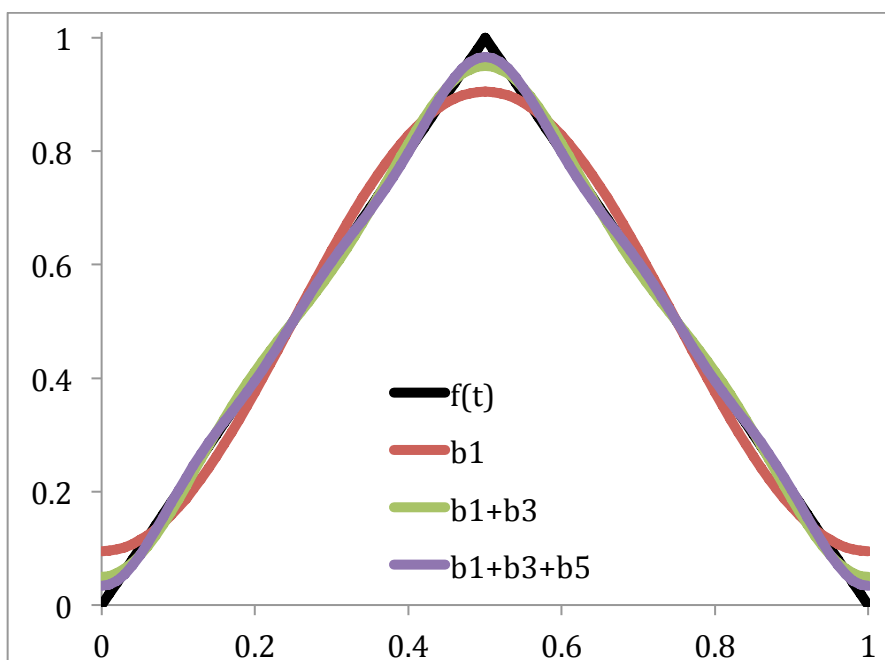


Il est intéressant de noter que, la convergence de la série $1/n$ étant très lente, la succession des termes de la série de Fourier s'approche à la fonction $f(t)$ au mieux vers $t=T/4$ et $t=3T/4$, tandis que les changements brutaux de $f(t)$ à $t=0$ et $t=T$ sont beaucoup plus difficile d'atteindre (l'erreur de l'approximation avec un nombre fini de termes est grand).

- Une fonction "triangulaire" (paire) : $f(t) = \begin{cases} x, & mT \leq t < (m + \frac{1}{2})T \\ -x, & (m + \frac{1}{2})T \leq t < (m + 1)T \end{cases}$

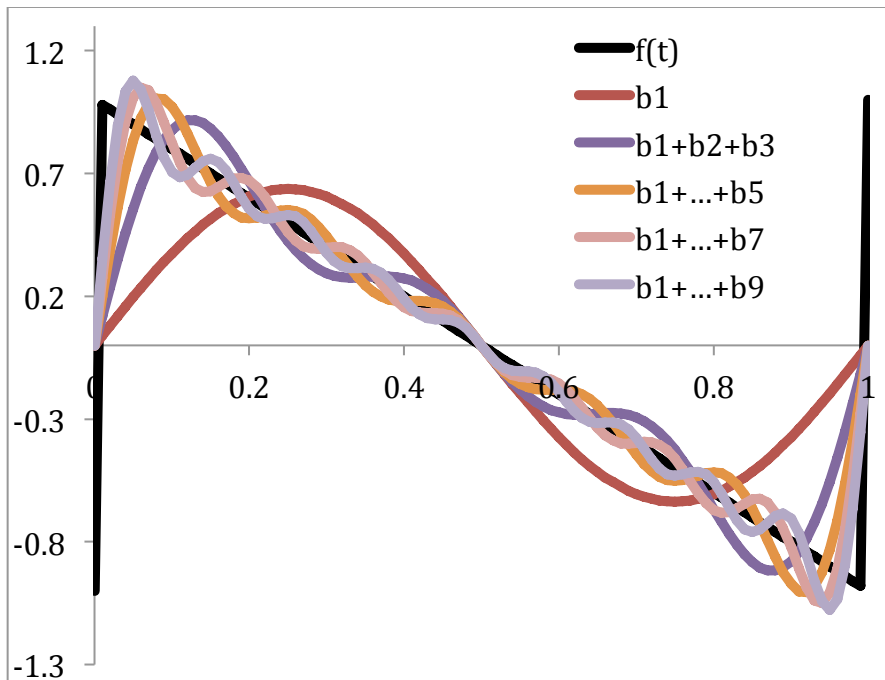
est représentée par la série : $f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$,

donc : $a_0 = \pi/2$, $a_{n \neq 0} = 0$, $b_{2n} = 0$, $b_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)^2}$



Ici la convergence est beaucoup plus rapide, car la série n'a que des termes $1/n^2$.

- Une fonction "dents de scie" (impaire) : $f(t) = 1 - x \quad mT \leq t < (m + 1)T$
 est représentée par la série : $f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$,
 donc : $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{\pi n}$

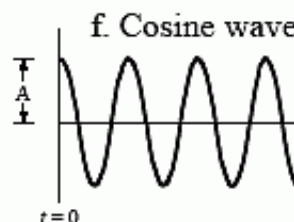
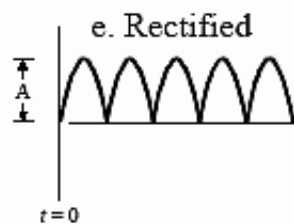
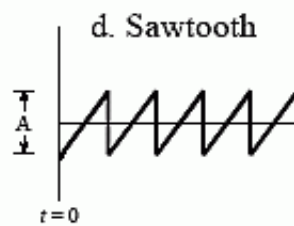
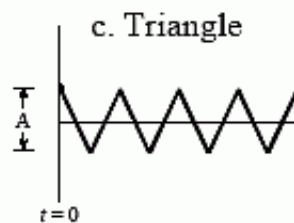
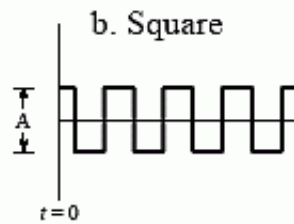
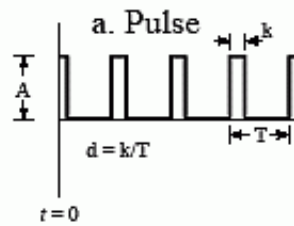


Ici la convergence est la plus lente, car on maintient tout les valeurs dans la série $1/n$. l'erreur est le plus grand vers $t=0$ et $t=T$, où il ne décroît que très lentement avec n .

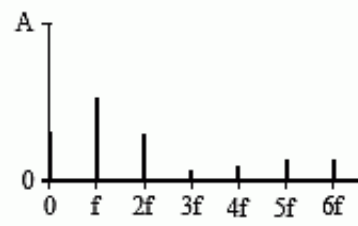
4. Domaine de fréquence

Si nous mettons en forme graphique les valeurs des coefficients de la série de Fourier, nous obtenons une série des points, un pour chaque valeur de n . Ce graphique est la représentation des composants sinusoïdaux de la série, donc un graphique de l'amplitude vs. La fréquence. On l'appelle le domaine de fréquence, et il a la forme des barreaux.

Time Domain



Frequency Domain

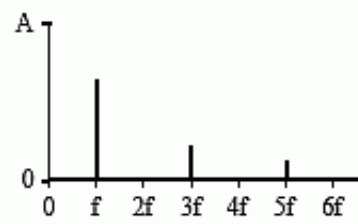


$$a_0 = A d$$

$$a_n = \frac{2A}{n\pi} \sin(n\pi d)$$

$$b_n = 0$$

($d = 0.27$ in this example)

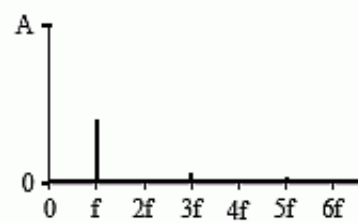


$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$b_n = 0$$

(all even harmonics are zero)

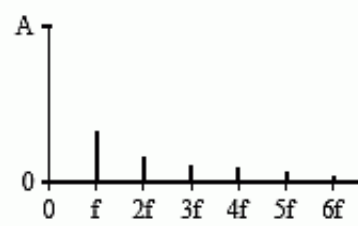


$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{4A}{(n\pi)^2}$$

$$b_n = 0$$

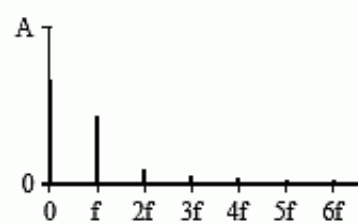
(all even harmonics are zero)



$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

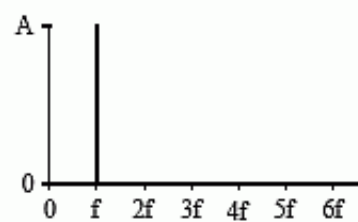
$$b_n = \frac{A}{n\pi}$$



$$a_0 = 2A/\pi$$

$$a_n = \frac{-4A}{\pi(4n^2 - 1)}$$

$$b_n = 0$$



$$a_1 = A$$

(all other coefficients are zero)

FIGURE 13-10

Examples of the Fourier series. Six common time domain waveforms are shown, along with the equations to calculate their "a" and "b" coefficients.

Source : Steven W. Smith, The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing, p.257

II. Transformée de Fourier

1. Définition

La transformation (ou transformée) de Fourier est une généralisation de la série pour des fonctions non-périodiques. Pour une fonction $f(t)$ elle est définie comme suite :

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

La transformation inverse est :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

La transformation suivie d'une transformation inverse résultent à un facteur 2π , alors on divise la transformation inverse par ce facteur. En physique, il est de souvent la coutume de "diviser" ce facteur entre la transformation et la transformation inverse, pour des raisons de symétrie :

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad \mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

2. Propriétés

La transformation de Fourier est linéaire : pour deux fonctions $f(t)$, $g(t)$, et constantes a , b , la transformation de : $h(t) = af(t) + bg(t)$ est :

$$\mathcal{H}(\omega) = a\mathcal{F}(\omega) + b\mathcal{G}(\omega)$$

La transformation de : $h(t) = af(t - \tau)$ est : $\mathcal{H}(\omega) = e^{-2\pi i\tau\omega}\mathcal{F}(\omega)$

La transformation de : $h(t) = f(at)$ est : $\mathcal{H}(\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

La transformation de : $h(t) = af(t - \tau)$ est : $\mathcal{H}(\omega) = e^{-2\pi i\tau\omega}\mathcal{F}(\omega)$

La transformation de l'intégral de convolution : $h(t) \equiv f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t + \tau)dt$ est une simple multiplication : $\mathcal{H}(\omega) = \mathcal{F}(\omega)\mathcal{G}(\omega)$

La transformation de la $n^{\text{ième}}$ dérivé $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ est : $(i\omega)^n \mathcal{F}(\omega)$

Le théorème de Parseval : $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(\omega)|^2 d\omega$

3. Transformations des quelques fonctions simples

Voici quelques transformations importantes :

$f(t)$	$\mathcal{F}(\omega)$
1	$\delta(\omega)$
$e^{i\omega_0 t}$	$\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$f(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & t \leq T/2 \\ 0, & t > T/2 \end{cases}$	$T \text{sinc}(\omega T/2) = \frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega}$
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}$

Représentation graphique de quelques transformations :

