

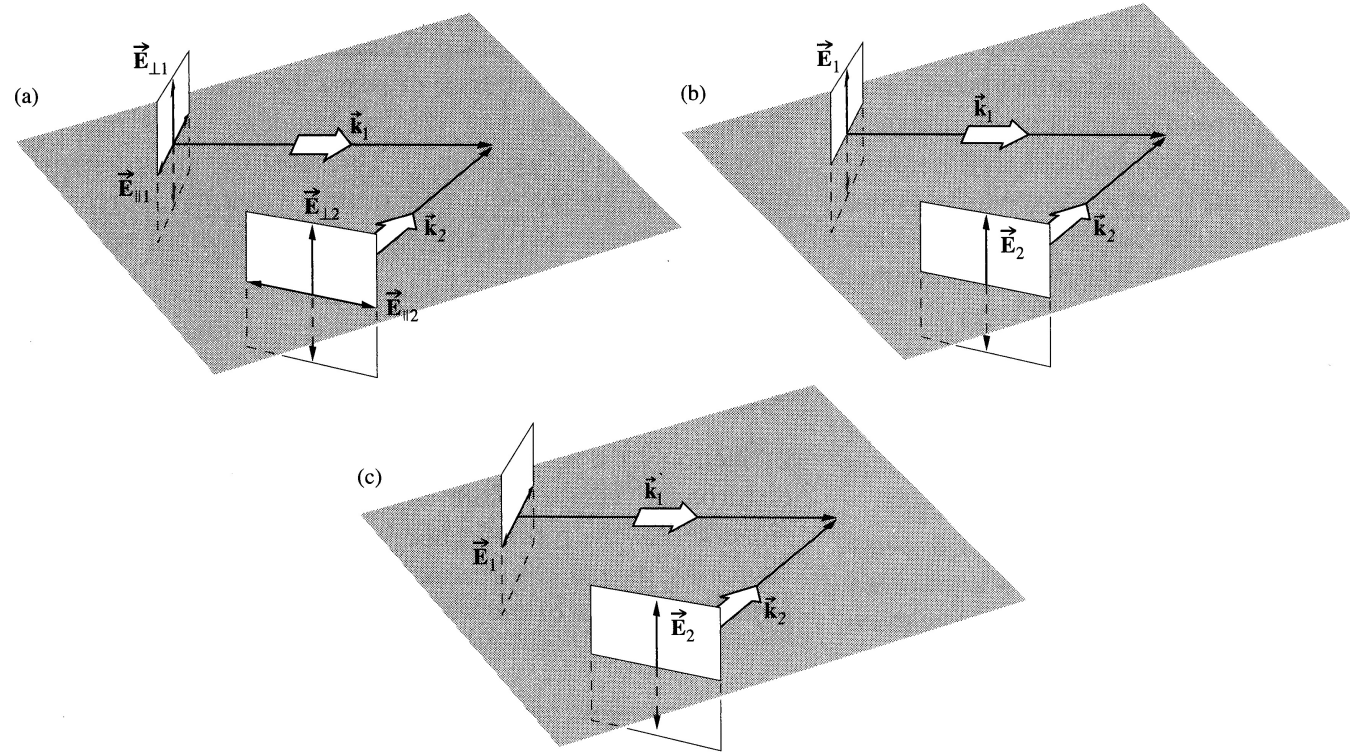
Ch. 6: La superposition des ondes

Principes généraux

- Les équations de Maxwell et les équations d'ondes sont **linéaires** => Le **principe de superposition**:
- Si des champs Ψ_i (p. ex. $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$) sont des solution de l'équation d'onde: $\nabla^2 \Psi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi = 0$, $\Psi = \sum_{i=0}^N a_i \Psi_i$ en est aussi une solution (a_i = constantes).
- Des exceptions: les matériaux avec susceptibilité non-linéaire.
- **MAIS**: L'intensité mesurée (par l'œil ou par un détecteur) est proportionnelle à **la moyenne temporelle du carré** de champ total: $I = nc\varepsilon_0 \langle E_{tot}^2 \rangle_T$! Donc, l'intensité mesuré **n'est pas** une somme simple des intensités des sources.
- Ici nous allons simplifier et écrire $I \propto \langle E_{tot}^2 \rangle_T$.
- L'intensité mesuré est donc: $I_{Tot} \propto \langle E_{tot}^2 \rangle_T = \left\langle \left(\sum_{i=0}^N a_i E_i \right)^2 \right\rangle_T \neq \sum_{i=0}^N \langle (a_i E_i)^2 \rangle_T$.
- Par la suite, nous allons traiter séparément le cas $N=2$ et le cas $N \rightarrow \infty$.
- Les solutions de l'équation d'onde ont la forme: $\Psi = \Psi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$, nous allons donc traiter ces trois éléments:
 - $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$: donne lieu à des **interférences** (ch. 7).
 - ωt : donne lieu à des **battements** (traité ici).
 - ϕ : est lié à la **cohérence** (ch.7).

Les effets de la polarisation

- Dans la somme: $\Psi = \sum_{i=0}^N a_i \Psi_i$, Ψ_i est un vecteur (p. ex. le champ électrique $\mathbf{E}$).
- Il faut donc utiliser toujours la somme vectorielle des champs.
- Si les champs ont tous une direction de propagation $\mathbf{z}$: $\Psi_i = E_{xi}\hat{\mathbf{e}}_x + E_{yi}\hat{\mathbf{e}}_y$, la somme est: $\Psi = \sum_{i=0}^N E_{xi}\hat{\mathbf{e}}_x + \sum_{i=0}^N E_{yi}\hat{\mathbf{e}}_y$, et l'intensité est: $I \propto \Psi^2 = \left\langle \left(\sum_{i=0}^N E_{xi} \right)^2 \right\rangle_T + \left\langle \left(\sum_{i=0}^N E_{yi} \right)^2 \right\rangle_T$.
- Pour deux champs perpendiculaires ($\mathbf{E}_1 = E_1\hat{\mathbf{e}}_x$, $\mathbf{E}_2 = E_2\hat{\mathbf{e}}_y$), nous avons: $I \propto E^2 = E_1^2 + E_2^2$, donc: $I = I_1 + I_2$.
- Si la direction des champs n'est pas la même, il faut prendre la projection des champs sur les axes x, y .
- Dans la suite, nous allons toujours supposer que les **polarisations** de tous les champs sont **parallèles**.



- (a) Le champ électrique peut être décomposé en deux polarisations, parallèle et perpendiculaire au plan.
- (b) Interférence des champs perpendiculaires (ou parallèle): l'interférence est maximale.
- (c) Interférence entre champ parallèle et champ perpendiculaire: il n'y a pas d'interférence.

Superposition de deux ondes planes: calculs

- Nous traitons l'interférence entre deux ondes planes, que nous pouvons calculer de deux manières, en utilisant toujours la définition: $\varphi_j \equiv \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t + \phi_j$ ($j=1,2$) et: $\Delta\varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2 = ((\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})_1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})_2) + (\omega_1 - \omega_2)t + (\phi_1 - \phi_2)$

1. En utilisant des fonctions réelles: $E_j = E_{0j} \cos \varphi_j$ (l'intensité est: $I_j \propto \langle E_j^2 \rangle_T = \frac{1}{2} E_{0j}^2$):

$$I \propto \langle (E_{01} \cos \varphi_1 + E_{02} \cos \varphi_2)^2 \rangle_T = \langle (E_{01} \cos \varphi_1)^2 \rangle_T + \langle (E_{02} \cos \varphi_2)^2 \rangle_T + 2 \langle E_{01} E_{02} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \rangle_T = E_{01}^2 \langle \cos^2 \varphi_1 \rangle_T + E_{02}^2 \langle \cos^2 \varphi_2 \rangle_T + E_{01} E_{02} \langle \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle_T = \frac{1}{2} E_{01}^2 + \frac{1}{2} E_{02}^2 + E_{01} E_{02} \langle \cos(\Delta\varphi) \rangle_T = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\Delta\varphi) \rangle_T.$$

- A cause de la haute fréquence, la moyenne temporelle des composants avec des phases contenant: ω_1 , ω_2 , ou $\omega_1 + \omega_2$, est nulle: $\langle \cos \omega t \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t dt = \frac{1}{\omega T} [\sin \omega t]_0^T \leq \frac{2}{\omega T} \ll 1$. En conséquence: $\langle \cos^2 \varphi_i \rangle_T = \left\langle \frac{1 + \cos 2\varphi_i}{2} \right\rangle_T = \frac{1}{2}$, et: $\langle \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \rangle_T = 0$. L'intensité ne dépend que de $\Delta\varphi$!

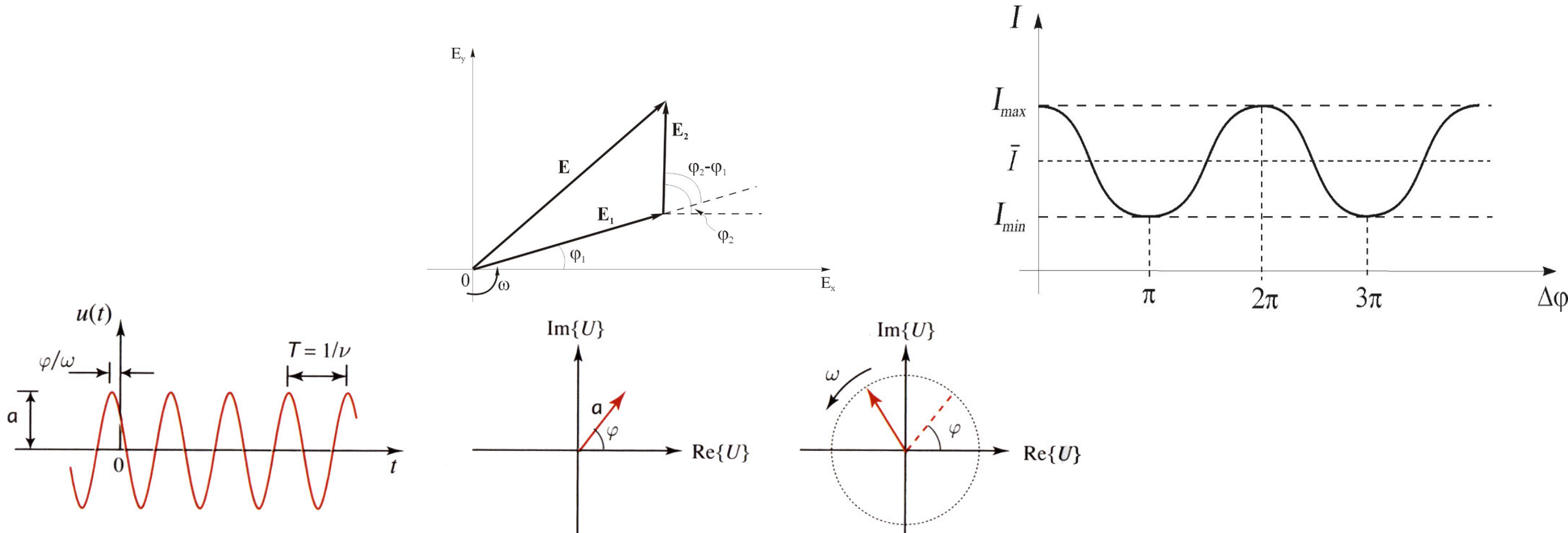
2. En utilisant des fonctions complexes: $E_j = \Re(\mathcal{E}_{0j} e^{i\varphi_j}) = \frac{1}{2} (\mathcal{E}_{0j} e^{i\varphi_j} + \mathcal{E}_{0j}^* e^{-i\varphi_j})$, (l'intensité est: $I_j \propto \langle E_j^2 \rangle_T = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{0j}^2$):

$$I \propto \left\langle \left(\Re(\mathcal{E}_{01} e^{i\varphi_1} + \mathcal{E}_{02} e^{i\varphi_2}) \right)^2 \right\rangle_T = \frac{1}{4} \left\langle \left(\mathcal{E}_{01} e^{i\varphi_1} + \mathcal{E}_{01}^* e^{-i\varphi_1} + \mathcal{E}_{02} e^{i\varphi_2} + \mathcal{E}_{02}^* e^{-i\varphi_2} \right)^2 \right\rangle_T = \frac{1}{4} \left\langle \left(\mathcal{E}_{01}^2 e^{2i\varphi_1} + \mathcal{E}_{01}^{*2} e^{-2i\varphi_1} + \mathcal{E}_{02}^2 e^{2i\varphi_2} + \mathcal{E}_{02}^{*2} e^{-2i\varphi_2} \right) + 2\mathcal{E}_{01}^2 + 2\mathcal{E}_{02}^2 + 2\mathcal{E}_{01} \mathcal{E}_{02} e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} + 2\mathcal{E}_{01} \mathcal{E}_{02}^* e^{i\Delta\varphi} + 2\mathcal{E}_{01}^* \mathcal{E}_{02} e^{-i\Delta\varphi} + 2\mathcal{E}_{01}^* \mathcal{E}_{02}^* e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)} \right\rangle_T = \frac{1}{2} (\mathcal{E}_{01}^2 + \mathcal{E}_{02}^2) + \frac{1}{2} \langle \mathcal{E}_{01} \mathcal{E}_{02}^* e^{i\Delta\varphi} + \mathcal{E}_{01}^* \mathcal{E}_{02} e^{-i\Delta\varphi} \rangle_T = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\Delta\varphi) \rangle_T.$$

- A cause de la haute fréquence, la moyenne temporelle des composants avec des phases autres que $\Delta\varphi$ est nulle.

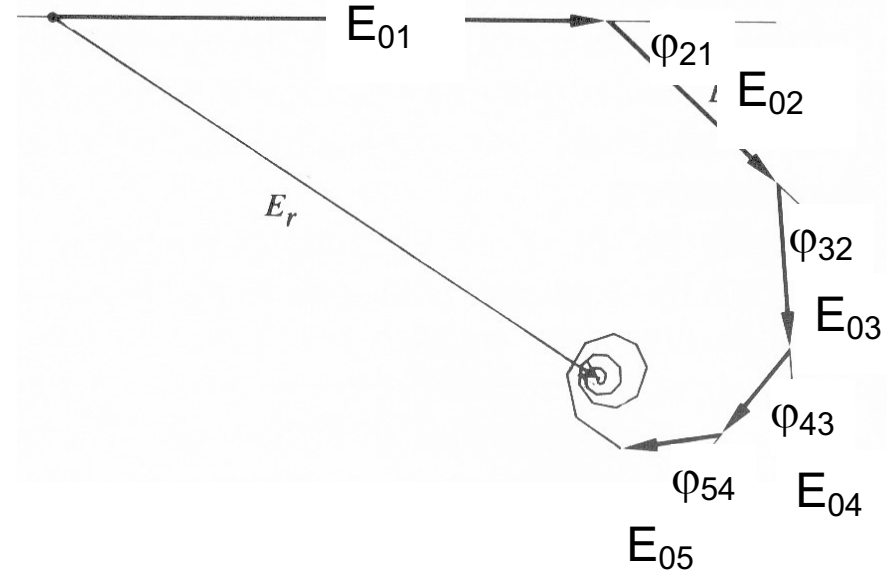
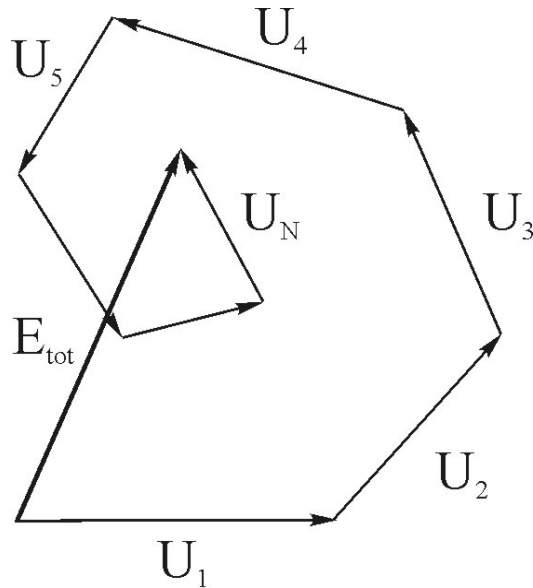
Superposition de deux ondes planes: résultats

- L'intensité de la superposition de deux ondes planes: $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\Delta\varphi) \rangle_T$
- Si $I_1 = I_2 = I_0$, et $\omega_1 = \omega_2$, $\langle \cos(\Delta\varphi) \rangle_T = \cos(\Delta\varphi)$ et: $I = 2I_0(1 + \cos(\Delta\varphi)) = 4I_0 \cos^2(\Delta\varphi/2)$
- Le maximum – quand $\Delta\varphi = 2\pi m$ ($m=0,1,2,\dots$): $I_{max} = (E_{01} + E_{02})^2$; Si $I_1 = I_2 = I_0$, $I_{max} = 4I_0$
- Le minimum – quand $\Delta\varphi = \pi(2m + 1)$ ($m=0,1,2,\dots$): $I_{min} = (E_{01} - E_{02})^2$; Si $I_1 = I_2 = I_0$, $I_{min} = 0$
- On peut représenter l'interférence des ondes par la somme des vecteurs de phase (**phasors**):



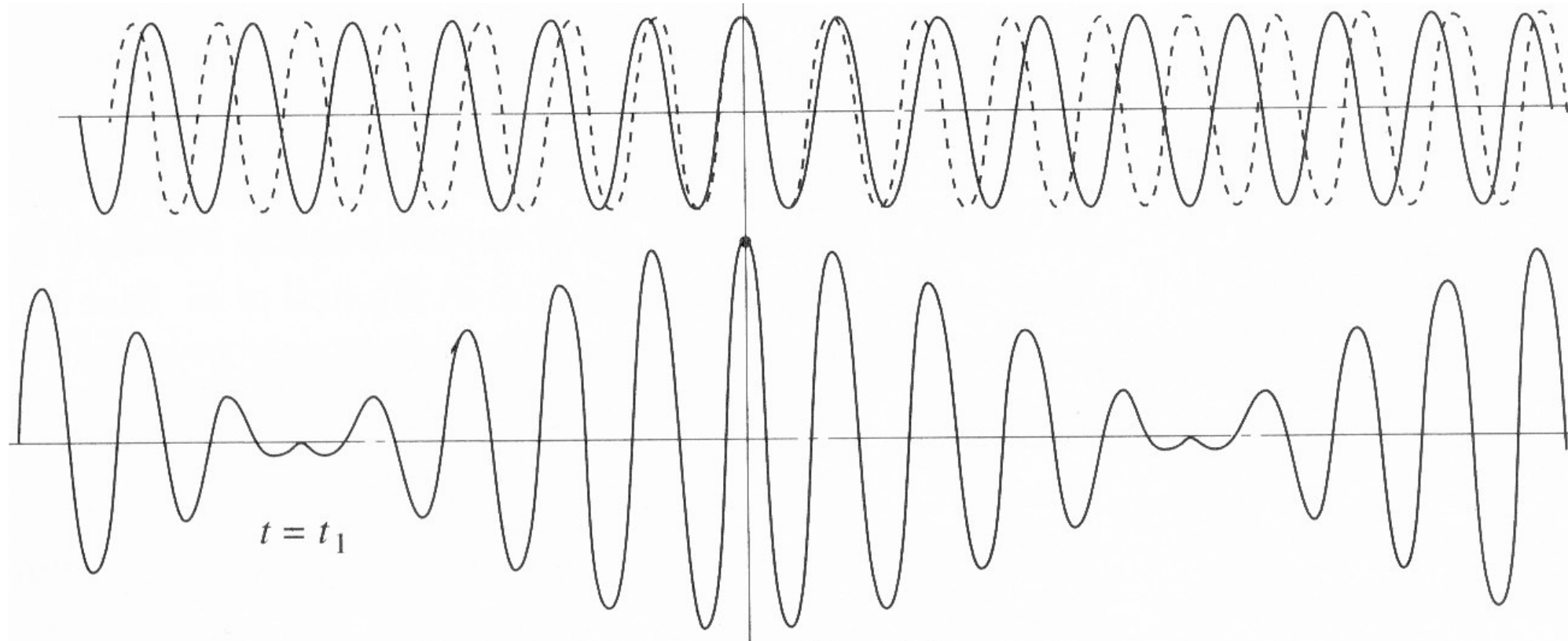
Superposition de N ondes planes

- Avec N ondes planes $E_j = E_{0j} \cos \varphi_j$, la somme des champs donne: $E = \sum_{j=1}^N E_{0j} \cos \varphi_j$
- L'intensité est: $I \propto \langle |E|^2 \rangle_T = \left\langle \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N E_{0j} \cos \varphi_j E_{0k} \cos \varphi_k \right\rangle_T = \left\langle \sum_{j=1}^N E_{0j}^2 \cos^2 \varphi_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j}^N E_{0j} E_{0k} [\cos(\varphi_j + \varphi_k) + \cos(\varphi_j - \varphi_k)] \right\rangle_T = \sum_{j=1}^N I_j + \left\langle \sum_{j=1}^N \sum_{k > j}^N E_{0j} E_{0k} \cos \Delta\varphi_{jk} \right\rangle_T$, avec :
 $\Delta\varphi_{jk} \equiv \varphi_j - \varphi_k$
- Si toutes les phases φ_j sont égales (superposition **cohérente**), $\Delta\varphi_{jk} = 0$ et nous avons: $I \propto \left(\sum_{j=1}^N E_{0j} \right)^2$.
 Si les champs sont aussi identiques: $I \propto N^2 I_0$
- Si toutes les phases φ_j sont aléatoires (superposition **incohérente**), nous avons: $I \propto \sum_{j=1}^N E_{0j}^2 = \sum_{j=1}^N I_j$. Si les champs sont aussi identiques: $I \propto N I_0$

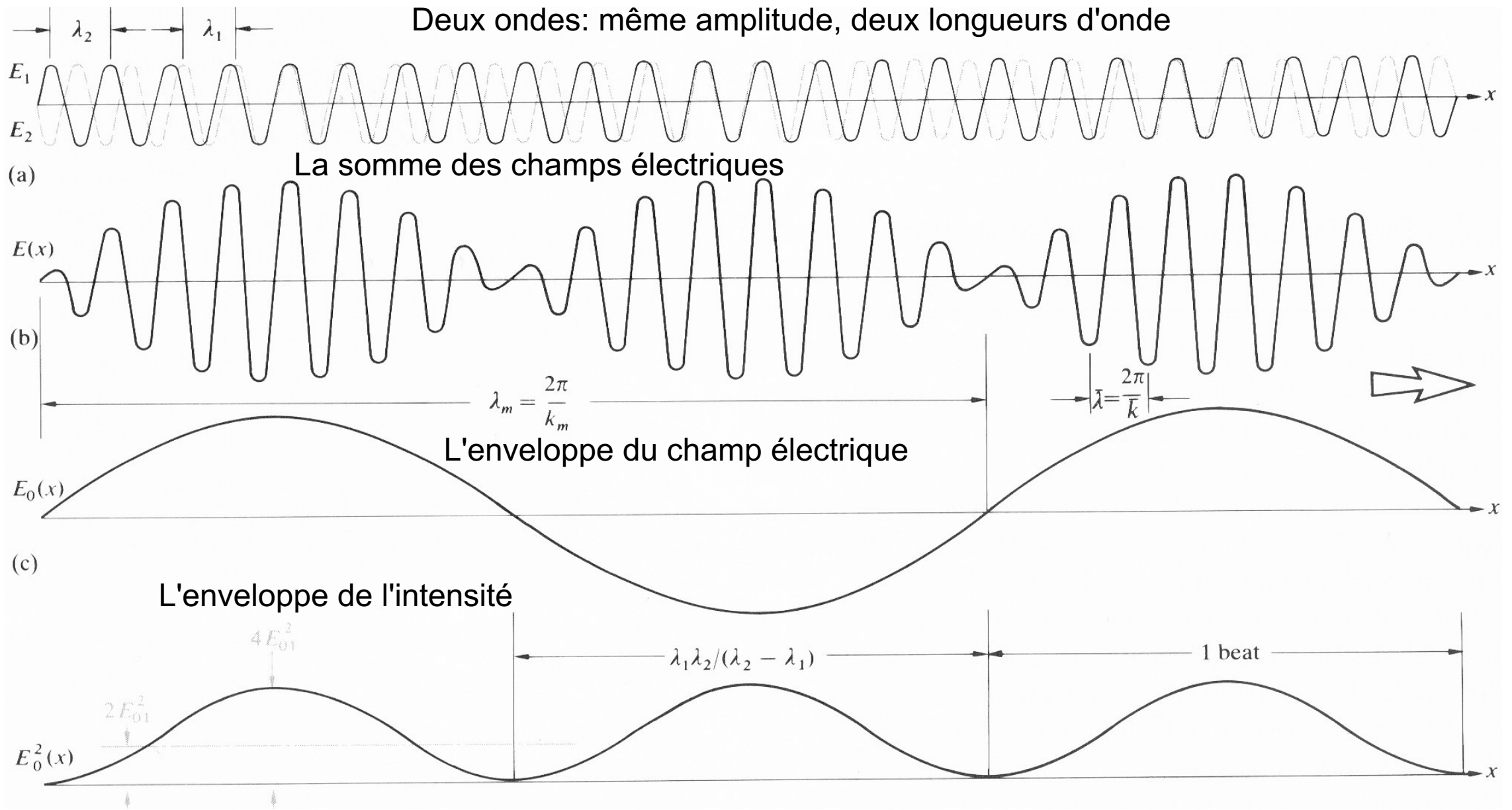


La superposition temporelle: $\omega_1 \neq \omega_2$

- Supposons: $E_{01} = E_{02} = E_0$; nous avons vu que l'intensité totale: $I \propto 2I_0(1 + \langle \cos(\Delta\varphi) \rangle_T)$ ne dépend que de la différence de phase: $\Delta\varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2 = ((\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})_1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})_2) + (\omega_1 - \omega_2)t + (\phi_1 - \phi_2)$
- Dans la plupart des cas, si $\omega_1 \neq \omega_2$, $\langle \cos(\Delta\varphi) \rangle_T = 0$ et on obtient: $I = 2I_0$.
- Dans le cas $\omega_1 \approx \omega_2$ ($\Delta\omega \ll \omega$) , on peut observer des oscillations, appelées **battements**. Pour que le détecteur puisse suivre ces oscillations, il faut que: $\Delta\omega < 10^{10}$ (pour un détecteur super-rapide) ou: $\frac{\Delta\omega}{\omega} < 10^{-5}$; souvent c'est beaucoup moins. Ces battements ressemblent à une onde porteuse (fréquence ω) avec une modulation (fréquence $\Delta\omega$).



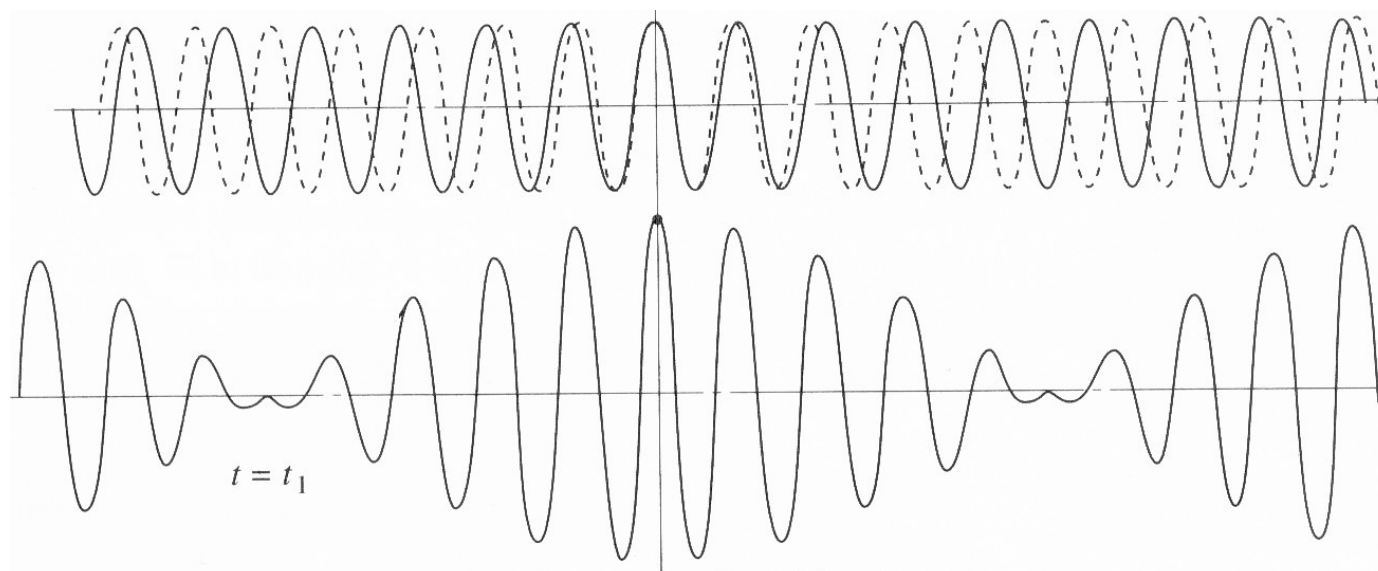
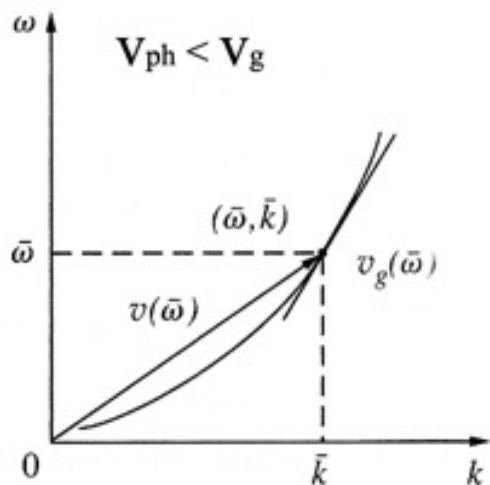
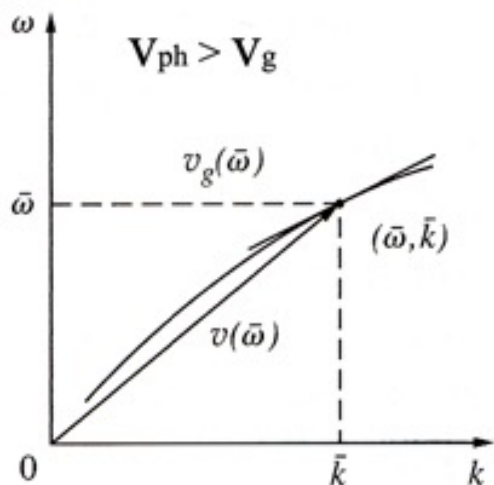
Les battements: entre deux fréquences **très** proches ($\frac{\Delta\omega}{\omega} < 10^{-5}$)



La vitesse de phase et de groupe

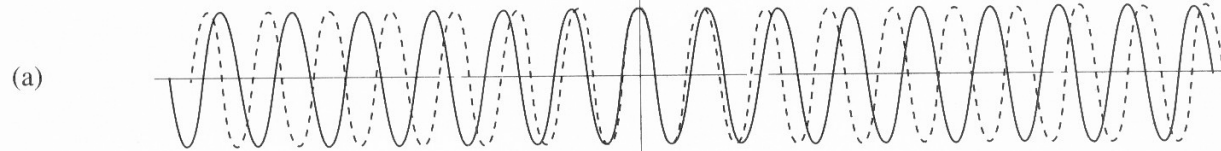
- Pour une onde plane: $E = E_0 \cos(kx - \omega t)$, donc la phase est: $\varphi = kx - \omega t$.
- Une phase constante se trouve quand: $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = 0$.
- La **vitesse de déplacement de cette phase** est: $v_\phi \equiv \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\phi=\text{cst}} = -\frac{\partial \varphi / \partial t}{\partial \varphi / \partial x} = -\frac{-\omega}{k} = \frac{c}{n}$.
- Pour les battements de deux fréquences $\omega_1 \neq \omega_2$, la **vitesse de phase** est: $v_\phi = \frac{\omega_a}{k_a} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} = c \frac{\omega_1 + \omega_2}{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2}$.
- L'indice de phase est: $n_\phi = \frac{c}{v_\phi} = \frac{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}$. Si $n_1 = n_2 = n$, $v_\phi = \frac{c}{n}$ et $n_\phi = n$.
- Pour les battements ($\Delta\omega \ll \omega$), la vitesse de déplacement de la phase de l'enveloppe (**vitesse de groupe**) est:

$$v_g \equiv -\frac{\partial \Delta\varphi / \partial t}{\partial \Delta\varphi / \partial x} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \overrightarrow{(\Delta\omega \rightarrow 0)} \frac{d\omega}{dk}$$
 Si $n(\omega) = n$ (Cst.), $v_g = v_\phi = \frac{c}{n}$.
- On définit aussi l'**indice de groupe**: $n_g \equiv c/v_g$

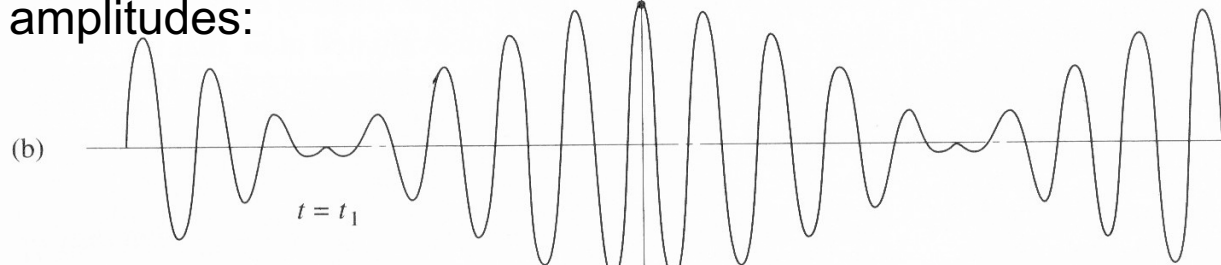


Battements: la vitesse de group

$t=t_1$: coïncidence des deux ondes $\otimes$



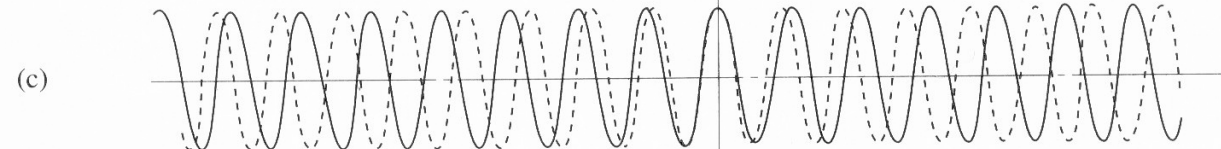
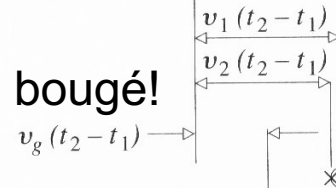
La somme des amplitudes:



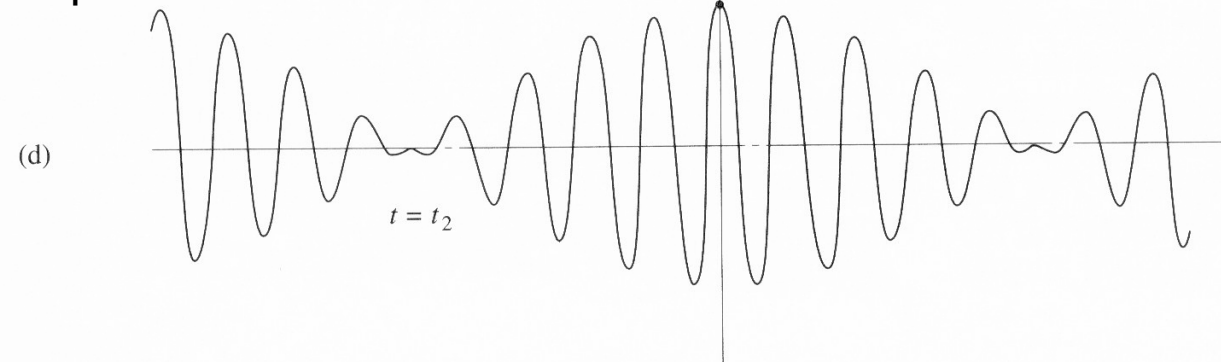
La vitesse de groupe:

$$\Rightarrow v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \Rightarrow \frac{d\omega}{dk}$$

$t=t_2$: le point de coïncidence a bougé!



La somme des amplitudes:

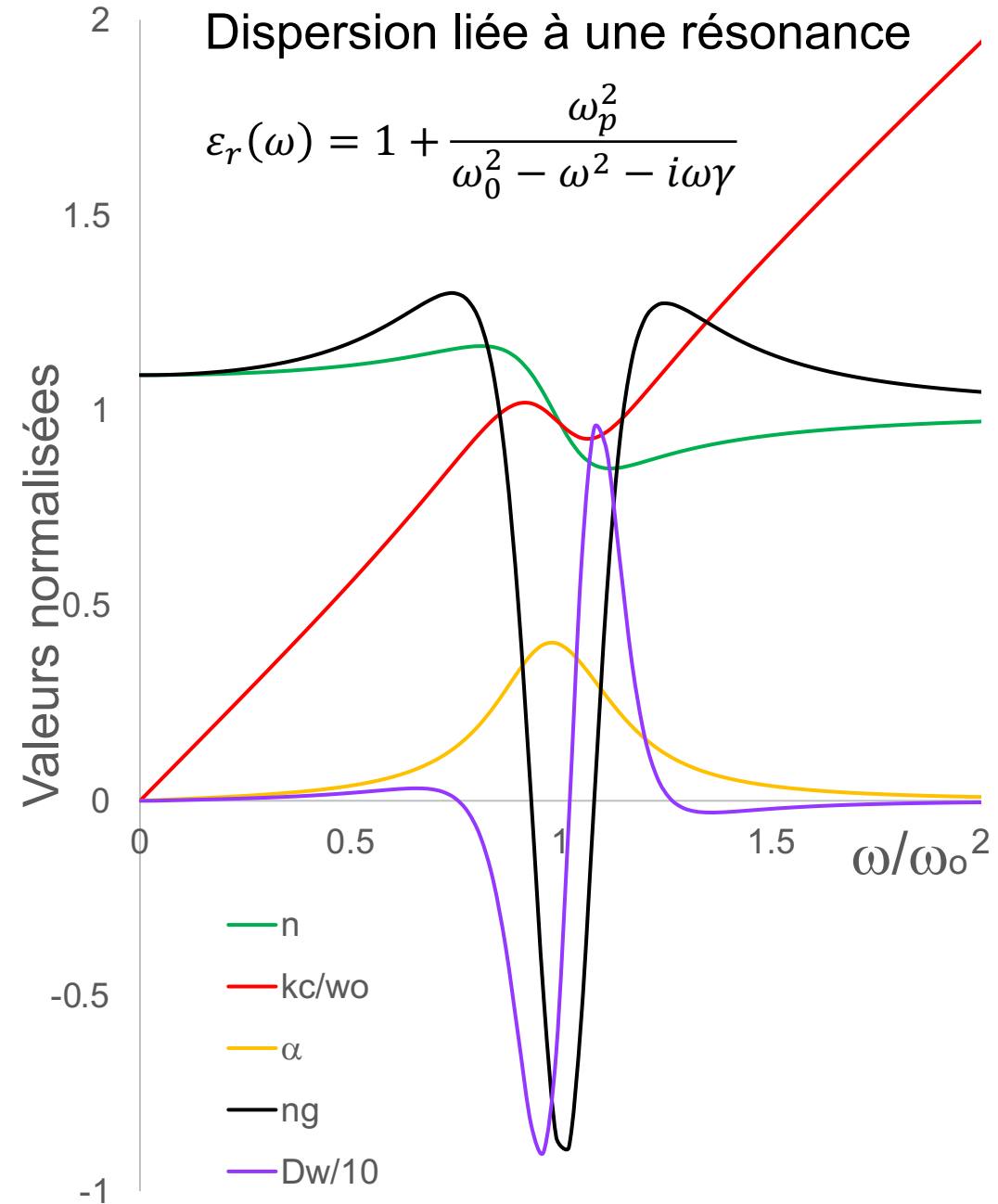
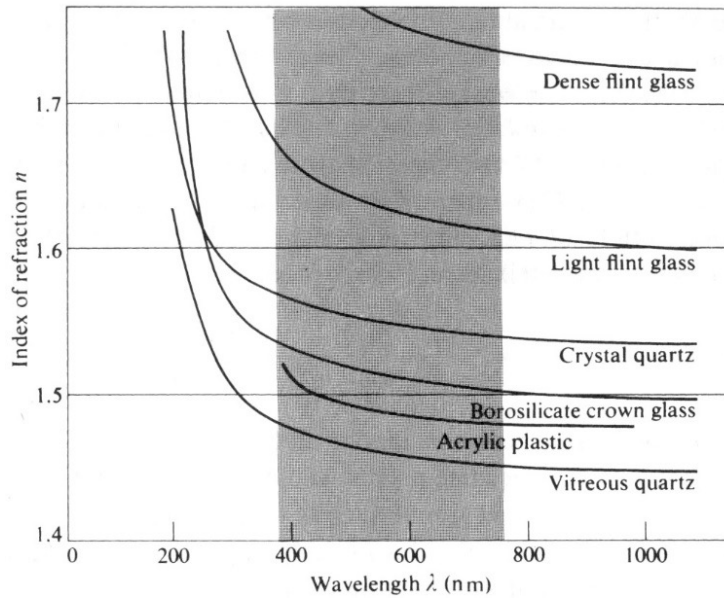


La vitesse de phase, la vitesse de groupe, et la dispersion

- Nous utilisons: $\omega = \frac{ck}{n(k)} = \frac{2\pi c}{n(\lambda)\lambda}$ pour calculer :
 - La vitesse de groupe: $v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_\phi \left(1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk}\right) = v_\phi \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right)$.
 - L'indice de groupe: $n_g = \frac{c}{v_g} = n / \left(1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk}\right) = n / \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right)$.
- Si $n(\omega) = \text{Cst.}$ (assez rare), il n'y a pas de dispersion et $v_g = v_\phi$.
- On distingue entre deux cas:
 - Dispersion normale:** $\frac{dn}{dk} > 0$ (et $\frac{dn}{d\lambda} < 0$), donc: $v_g < v_\phi$.
 - Dispersion anormale:** $\frac{dn}{dk} < 0$ (et $\frac{dn}{d\lambda} > 0$), donc: $v_g > v_\phi$.

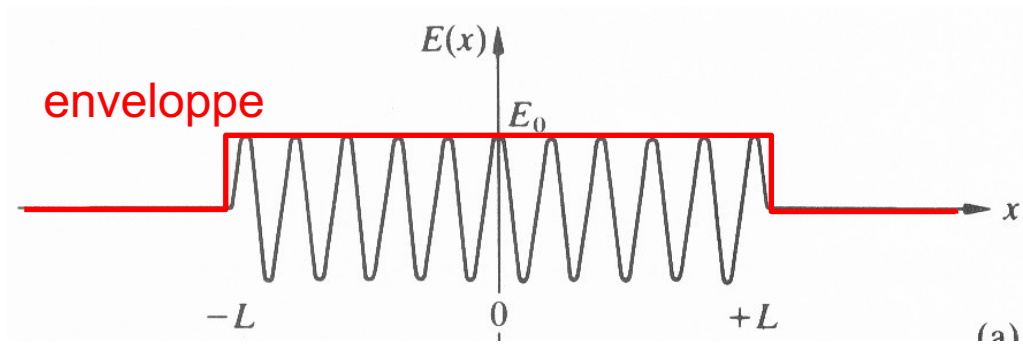
Elle apparaît souvent autour des résonances (avec l'absorption!)

La dispersion dans le verre (normale):



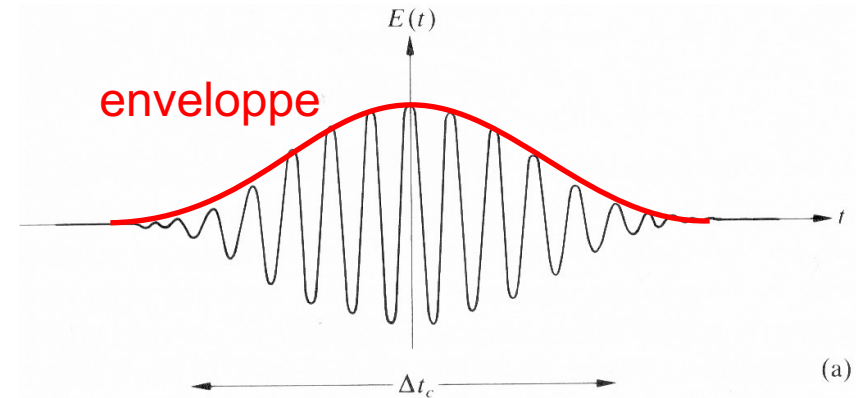
Les paquets d'ondes dans l'espace-temps

- Un paquet d'ondes est une impulsion lumineuse qui dure un temps court Δt . Il peut être décrit par une **enveloppe** qui multiplie l'onde continue (plane ou autre): $E(x, t) = A(x, t)E_0 e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$.
- Sources typiques (Néon, LED) ont $\Delta t = \text{ns}$ à μs ; les lasers pulsés ont $\Delta t = \text{fs}$ à ps .
- Dans l'espace, un paquet d'ondes de largeur temporel Δt est associée à une largeur spatiale: $\Delta x = c\Delta t$.
- La forme de l'**enveloppe** de l'impulsion $A(x, t)$ peut varier: carrée, Gaussienne, etc. Voici deux exemples:



Impulsion carrée
(montrée ici en fonction de l'espace x)

$$A(x) = \begin{cases} 1 & -L < x < L \\ 0 & -L > x ; L < x \end{cases}$$



Impulsion Gaussienne
(montrée ici en fonction du temps t)

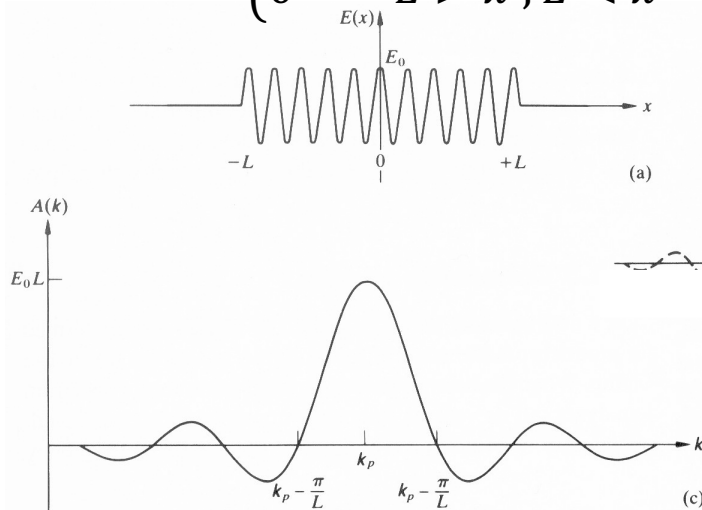
$$A(t) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2}$$

Les paquets d'ondes dans l'espace fréquence-vecteur d'onde

- La forme de l'**enveloppe** de l'impulsion et sa largeur dans l'espace/temps ($\Delta x/\Delta t$) est liée par la transformée de Fourier à sa forme et sa largeur dans l'espace des vecteurs d'onde / fréquence ($\Delta k/\Delta \omega$).
- Les facteurs numériques varient avec la forme de l'impulsion:

Impulsion carrée $\leftrightarrow$ sinc

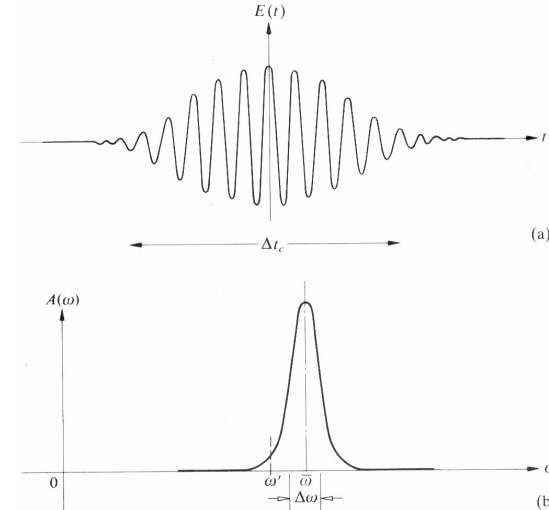
$$A(x) = \begin{cases} 1 & -L < x < L \\ 0 & -L > x > L \end{cases}$$



$$A(k, \omega) = L \text{sinc}(k - k_0)L$$

Impulsion Gaussienne $\leftrightarrow$ Gaussien

$$A(t) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2}$$



$$A(k, \omega) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega - \omega_0}{1/\sigma}\right)^2}$$

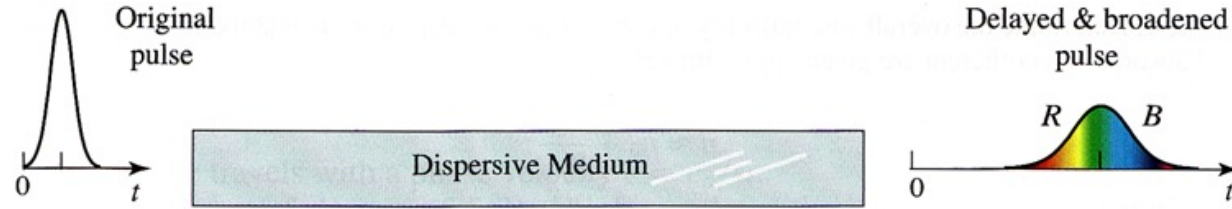
- Il y a un "principe d'incertitude": $\Delta L \Delta k = \Delta t \Delta \omega = \text{Cste}$. le facteur numérique dépend de la définition des largeurs:

$$\Delta L \Delta k = \Delta t \Delta \omega = 4\pi$$

$$\Delta L \Delta k = \Delta t \Delta \omega = 2\pi$$

- Exemple: Un paquet Gaussien avec $\Delta t = 1 \text{ ns}$ a une largeur spectrale de 1 GHz . Si $\lambda = 500 \text{ nm}$, ce paquet aura:
 $\Delta \omega / \omega = 1.7 \cdot 10^{-6}$, $\Delta \lambda = 0.83 \text{ pm}$, $\Delta k = 21 \text{ m}^{-1}$, $\Delta L = 0.3 \text{ m}$.

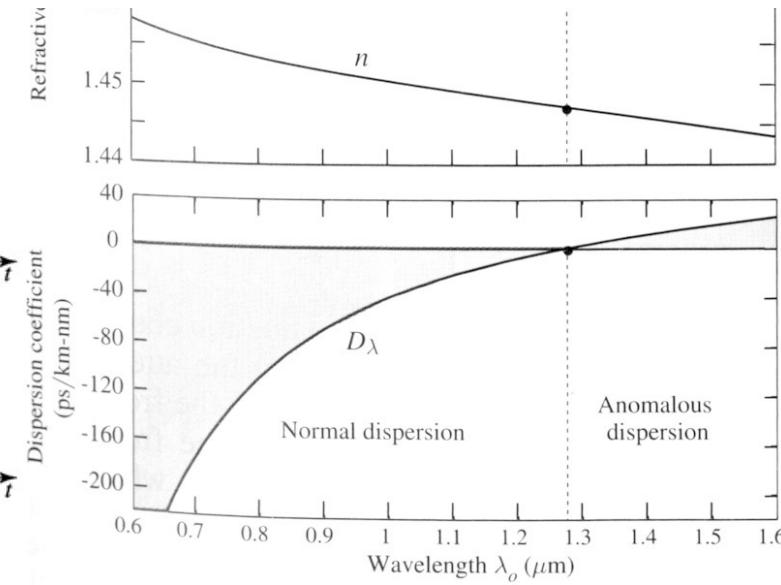
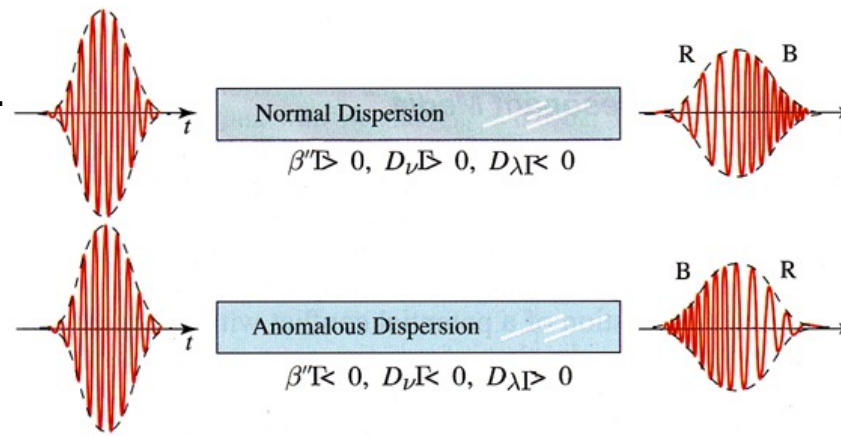
La propagation d'un paquet d'ondes et la dispersion



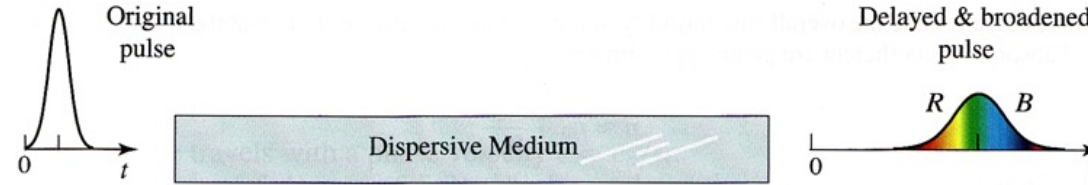
- Après la propagation d'une distance L dans un milieu dispersif, une impulsion arrive avec un délai: $t = L/v_g$.
- Deux impulsions de fréquences différentes, auront des délais différents, la différence étant:

$$\Delta t = \frac{L}{v_g(\omega_1)} - \frac{L}{v_g(\omega_2)} = L \left(\frac{v_g(\omega_2) - v_g(\omega_1)}{v_g(\omega_1)v_g(\omega_2)} \right) \approx L \left(\frac{-\Delta v_g}{v_g^2} \right) = \frac{-L}{v_g^2} \left(\frac{dv_g}{d\omega} \right) \Delta\omega = L \left(\frac{d(1/v_g)}{d\omega} \right) \Delta\omega = D_\omega L \Delta\omega.$$

- $D_\omega \equiv \left(\frac{d(1/v_g)}{d\omega} \right) = \frac{d^2k}{d\omega^2}$ est la **dispersion de la vitesse de groupe**. En utilisant $k = \frac{\omega n}{c}$, nous obtenons: $D_\omega \cong \frac{\omega}{c} \frac{d^2n}{d\omega^2}$.
- Dans la pratique, on utilise souvent la longueur d'onde: $\Delta t = L \left(\frac{d(1/v_g)}{d\lambda} \right) \Delta\lambda = D_\lambda L \Delta\lambda$, ce qui donne: $D_\lambda \cong -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2n}{d\lambda^2}$.
- Les mêmes arguments sont valables pour les différents composants fréquentiels d'un paquet d'ondes.
- Les différents temps d'arrivée résultent en un élargissement du paquet d'ondes.

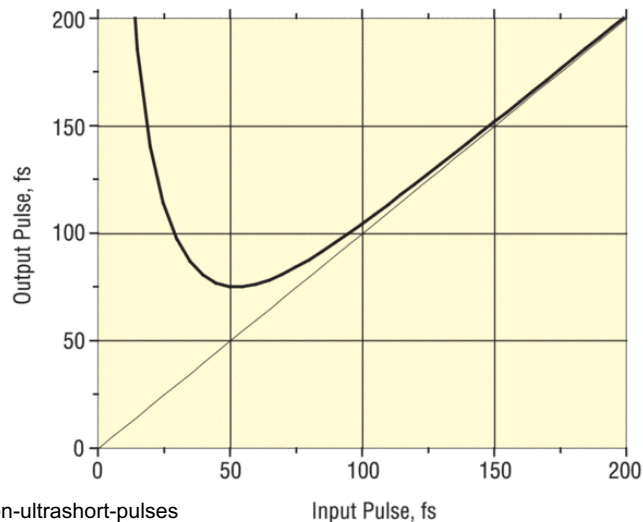


L'élargissement d'un paquet d'ondes et la dispersion: traitement simplifié

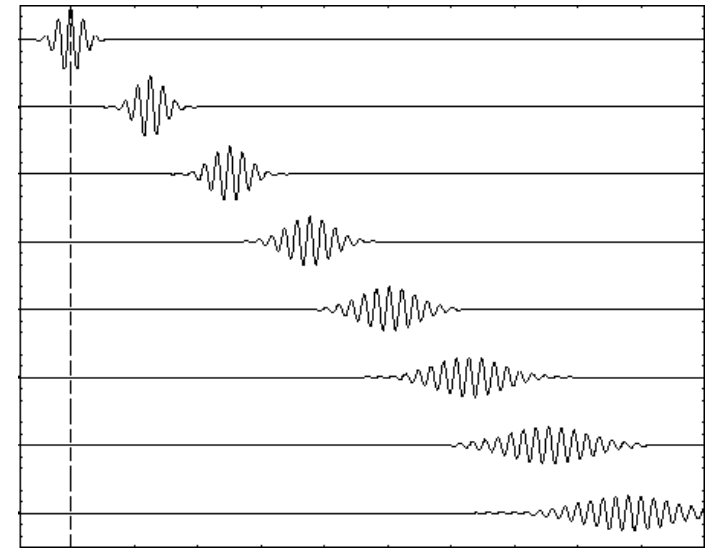


- Prenons un paquet d'ondes de largeur temporel τ_0 , donc une largeur spectrale: $\delta\omega = 1/\tau_0$.
- Après le passage par le milieu dispersif, les différents composants fréquentiels auront une dispersion de temps d'arrivée de: $\Delta t = |D_\omega|L\delta\omega = |D_\omega|L/\tau_0$. La largeur du paquet d'ondes serait: $\tau' \approx \tau_0 + \Delta t = \tau_0 + |D_\omega|L/\tau_0 = \tau_0 \left(1 + \frac{|D_\omega|L}{\tau_0^2}\right)$. Le signe de D_ω ne change rien (il indique si les composants HF ou BF arrivent en premier).
- Résultat: une impulsion **plus courte** s'élargit **plus rapidement** dans un milieu dispersif.
- La distance où l'impulsion double de largeur serait: $L_D = \frac{\tau_0^2}{|D_\omega|}$.
- **Exemple:** Pour le verre BK7 (très répandu en optique), $D_\omega = 45 \text{ fs}^2/\text{mm}$; pour $\tau_0 = 50 \text{ fs}$, $L_D = 56 \text{ mm}$. Un élément optique (p. ex. cube diviseur de faisceau) de 20 mm de taille, donnera une impulsion de 68 fs, ou +36%.

La largeur d'un paquet d'onde Gaussien ($\lambda = 800 \text{ nm}$) après un passage de 20 mm dans un verre BK7

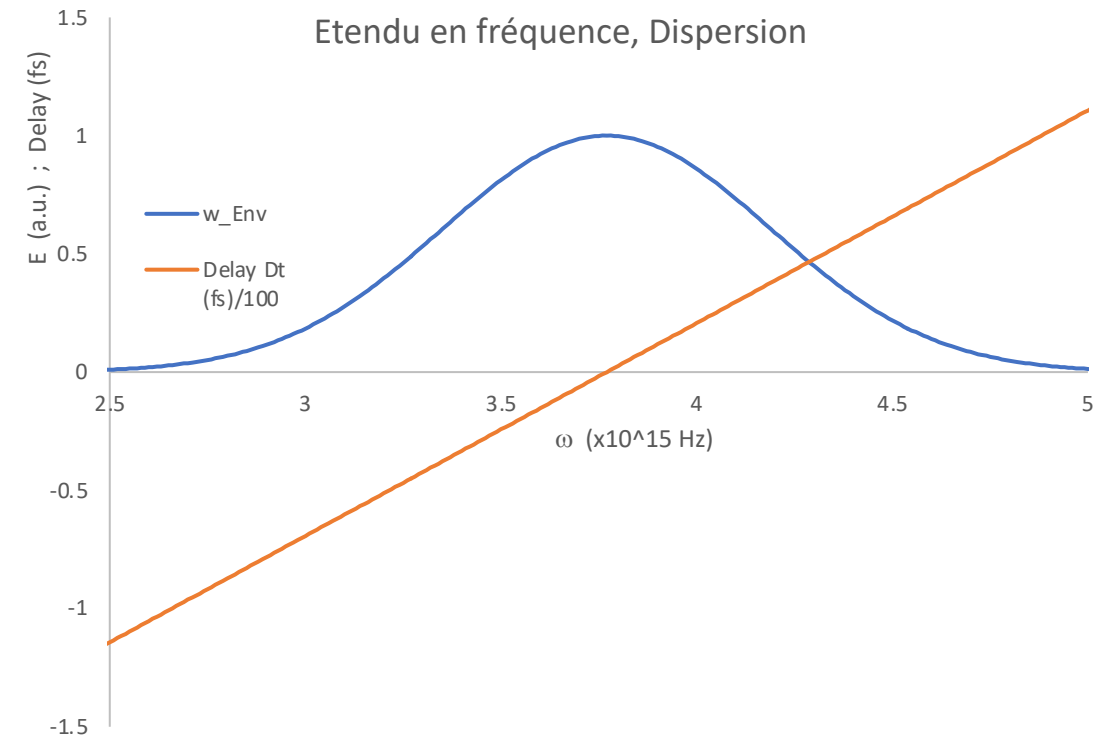
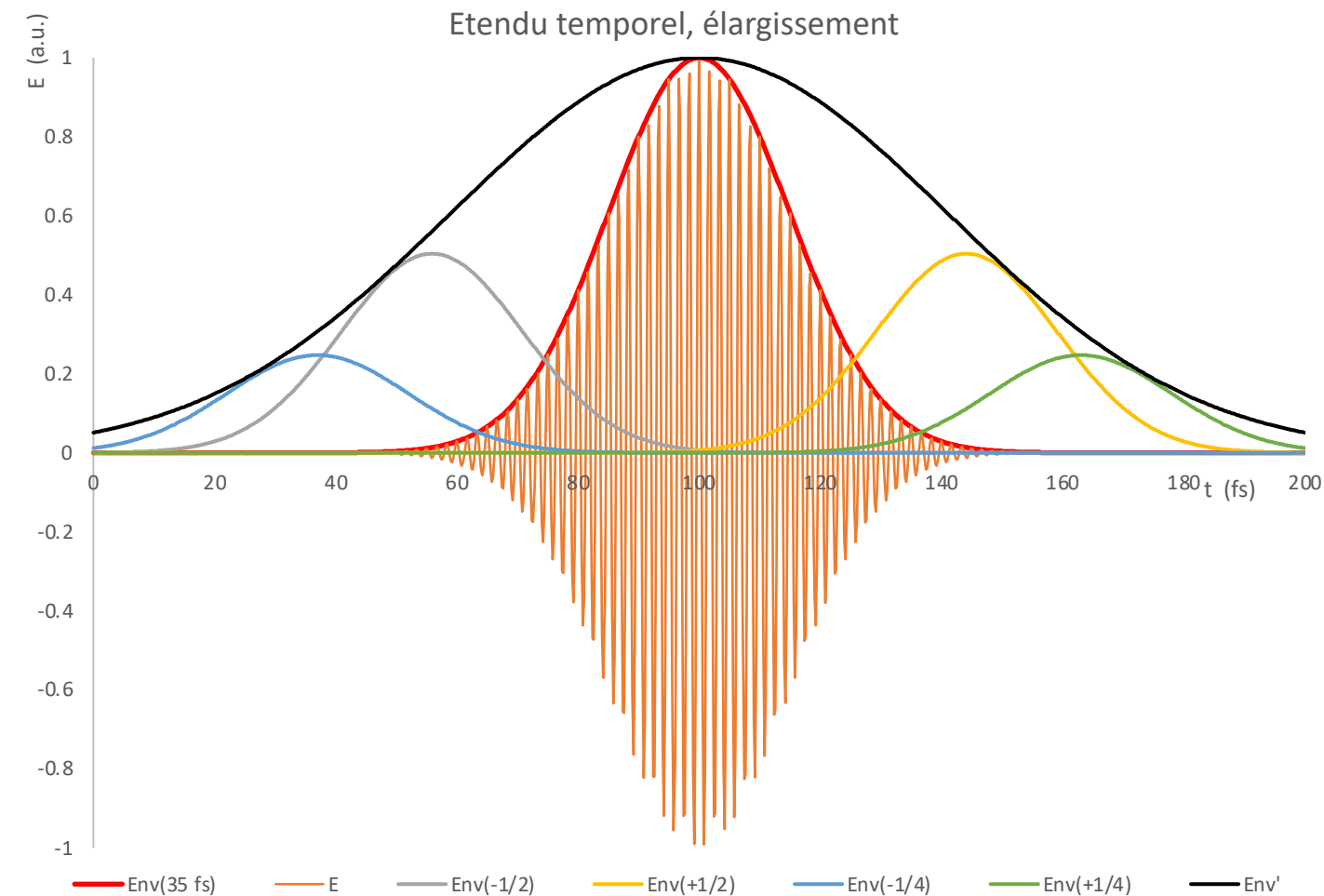


La propagation et l'élargissement d'un paquet d'onde Gaussien:



L'élargissement d'un paquet d'ondes court par la dispersion: exemple

- Un paquet d'onde Gaussien avec $\sigma=15$ fs (largeur =35 fs) passant par 2 mm de verre BK7, $D_\omega=45$ fs²/mm est élargi à $\sigma=41$ fs (largeur =96 fs).

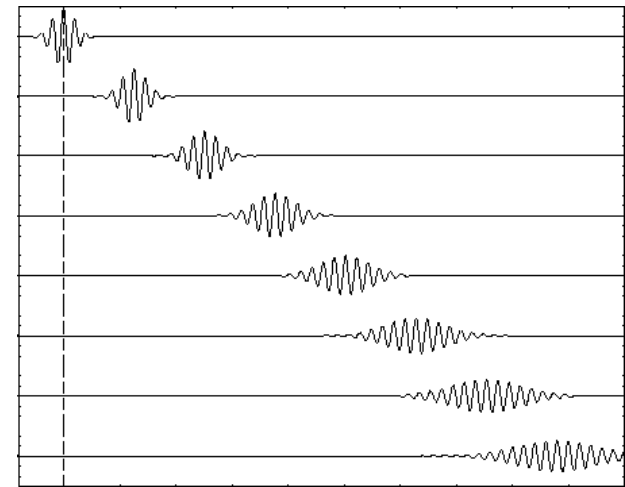


La largeur spectrale du paquet d'onde est importante (presque tout le spectre visible!), donc la dispersion est conséquente.

Un paquet d'onde Gaussien ($\lambda_c=500$ nm) s'élargit après un passage de 2mm dans un verre BK7: rouge/orange: l'enveloppe et le champ électrique; noir: l'enveloppe du paquet élargi, composé des composants avancés et retardés (différentes couleurs).

Bonus: L'élargissement d'un paquet d'ondes par la dispersion: traitement précis (1)

- Dans un paquet d'ondes, les fréquences sont proches de la fréquence centrale ω_0 : $\omega = \omega_0 + \delta\omega$, $\delta\omega \ll \omega_0$.
- En conséquence, nous pouvons développer $k(\omega)$ en série: $k(\omega) = k(\omega_0 + \delta\omega) = k_0 + k_1\delta\omega + \frac{k_2}{2}\delta\omega^2 + \dots$.
- Nous pouvons aussi développer: $\frac{1}{v_g(\omega)} = \frac{\delta k}{\delta\omega} = \frac{k(\omega) - k_0}{\delta\omega} = \frac{1}{v_g(\omega_0)} + \frac{k_2}{2}\delta\omega$, pour obtenir: $v_g(\omega) = \frac{v_g(\omega_0)}{1 + k_2 v_g(\omega_0) \delta\omega / 2}$. C'est la dispersion de la vitesse de groupe .
- Nous connaissons déjà: $k_0 = \omega_0 n(\omega_0)/c$, $k_1 = \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} = \frac{1}{v_g(\omega_0)}$, et: $k_2 = \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} = D_\omega$.
- Un paquet d'ondes a la forme: $E(\mathbf{r}, t) = F(x, y)A(z, t)e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}$, $F(x, y)$ est la forme spatiale en x, y (p. ex. Gaussienne), $A(z, t)$ est l'enveloppe du paquet, qui pourrait aussi être Gaussienne et qui évolue dans le temps.
- Si la transformée de Fourier de l'enveloppe est: $\mathcal{A}(z, \omega)$, La propagation dans le milieu va en **ajouter** une phase:
$$\mathcal{A}(z, \omega) = \mathcal{A}(0, \omega)e^{-i(k(\omega) - k_0)z} = \mathcal{A}(0, \omega)e^{-iz\left(k_1\delta\omega + \frac{k_2}{2}\delta\omega^2\right)} = \mathcal{A}(0, \omega)e^{-iz\left(\frac{\delta\omega}{v_g(\omega_0)} + \frac{D_\omega}{2}\delta\omega^2\right)}$$
- La première partie est l'équivalente (dans le plan temporel) d'un délai (appelé **délai de groupe**): $\tau_g = \frac{z}{v_g(\omega_0)}$. C'est le temps de propagation du paquet à la vitesse $v_g(\omega_0)$.
- La deuxième partie est liée à la dispersion D_ω .



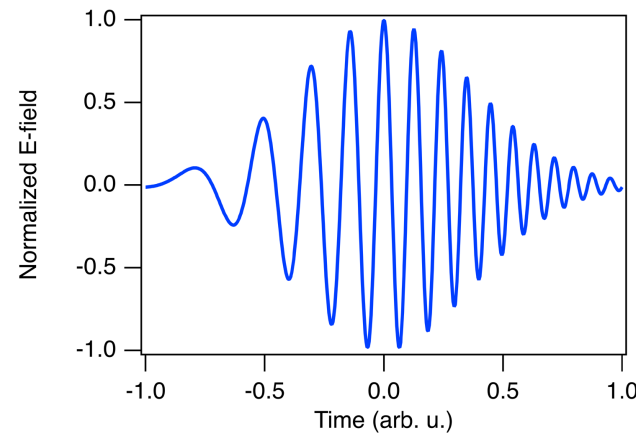
Bonus: La propagation d'un paquet d'ondes et la dispersion : traitement précis (2)

- Si $\mathcal{A}(z, \omega)$ ne varie que lentement avec z , nous pouvons calculer la dérivée: $\frac{d\mathcal{A}(z, \omega)}{dz} = \frac{d\mathcal{A}(0, \omega)}{dz} e^{-iz\left(\frac{\delta\omega}{v_g(\omega_0)} + \frac{D_\omega}{2}\delta\omega^2\right)} + \mathcal{A}(0, \omega) \left[-i\left(\frac{\delta\omega}{v_g(\omega_0)} + \frac{D_\omega}{2}\delta\omega^2\right)\right] e^{-iz\left(\frac{\delta\omega}{v_g(\omega_0)} + \frac{D_\omega}{2}\delta\omega^2\right)} \approx -i\left(\frac{\delta\omega}{v_g(\omega_0)} + \frac{D_\omega}{2}\delta\omega^2\right) \mathcal{A}(z, \omega)$.
 - La transformée de Fourier inverse de cette dérivée donne: $\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{v_g(\omega_0)} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{iD_\omega}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$.
 - Pour simplifier l'équation, notons que si $D_\omega = 0$, la solution est: $A(z, t) = A_0(t - \frac{z}{v_g})$. Nous pouvons donc définir un référentiel: $\tau = t - \frac{z}{v_g}$, qui suit le paquet d'ondes dans son parcours, ce qui donne l'équation: $\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{iD_\omega}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} = 0$.
 - Prenons un paquet d'ondes Gaussien: $A(0, \tau) = A_0 e^{-\tau^2/2\tau_0^2}$. τ_0 est la "largeur" temporelle du paquet.
 - La solution à l'équation: $\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{iD_\omega}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} = 0$ est: $A(z, \tau) = \frac{A_0 \tau_0}{\sqrt{\tau_0^2 - iD_\omega z}} e^{-\frac{\tau^2}{(\tau_0^2 - iD_\omega z)}} = A(0, \tau) e^{-\tau^2/2\tau_1^2} e^{i\phi}$, avec la nouvelle
- largeur du paquet: $\tau_1(z) = \tau_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{L_D}\right)^2}$. $L_D = \frac{\tau_0^2}{|D_\omega|}$ est la distance de dispersion: à cette distance la largeur du paquet croît par $\sqrt{2}$.
- La largeur de l'impulsion augmente de la même façon pour D_ω positif ou négatif !

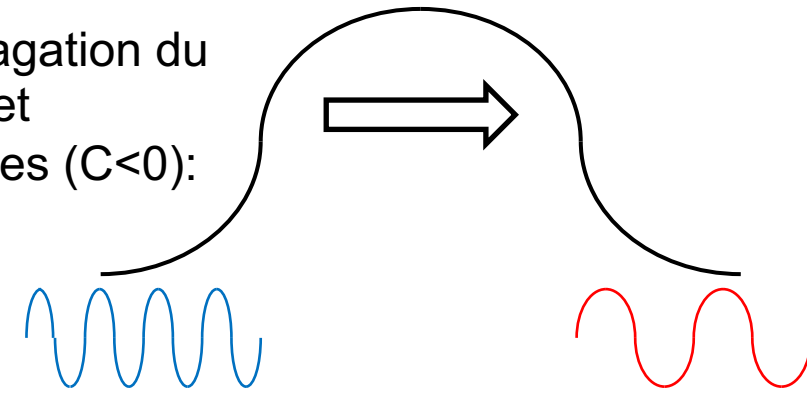
Bonus: Comment diminuer la largeur des paquets d'ondes

- En place d'un paquet d'ondes Gaussien "simple" $A(0, t) = A_0 e^{-\tau^2/2\tau_0^2}$, nous remplaçons τ_0 par τ'_0 : $\tau_0'^2 = \tau_0^2(1 + iC)$ (c'est une démarche similaire à celle du faisceau Gaussien). Le paquet devient: $A(0, \tau) = A_0 e^{-(1+iC)\tau^2/2\tau_0^2}$, avec la phase supplémentaire qui varie avec le temps: $\Delta\varphi = -C\tau^2/2\tau_0^2$. On appelle C la modulation de fréquence (chirp).
- La largeur du paquet devient: $\tau_1(z) = \tau_0 \sqrt{\left(1 + \frac{CD\omega z}{\tau_0^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{L_D}\right)^2}$.
- Si $C < 0$, il y a une gamme de distances z pour laquelle $\tau_1/\tau_0 < 1$: le paquet devient plus étroit!
- Explication simple du fonctionnement de ce mécanisme:
 - Pour une phase de l'onde $\varphi(t)$, la déviation de fréquence est: $\delta\omega = -\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}$. Dans notre cas, la phase $\Delta\varphi(\tau) = -C\frac{\tau^2}{2\tau_0^2}$ donne: $\delta\omega(\tau) = \frac{C\tau}{\tau_0^2}$.
 - Si $C < 0$, la partie avancée du paquet ($\tau > 0$) contient des fréquences plus basses ($\delta\omega < 0$), qui se propagent plus lentement et sont rattrapée par la partie retardée ($\tau < 0$) qui contient des fréquences plus hautes.

Paquet d'ondes
modulé en fréquence
($C > 0$):



Propagation du
paquet
d'ondes ($C < 0$):



https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/phys/quantum-electronics/ultrafast-laser-physics-dam/education/lectures/ultrafast_laser_physics/lecture_notes/2_Linear_pulse_propagation.pdf

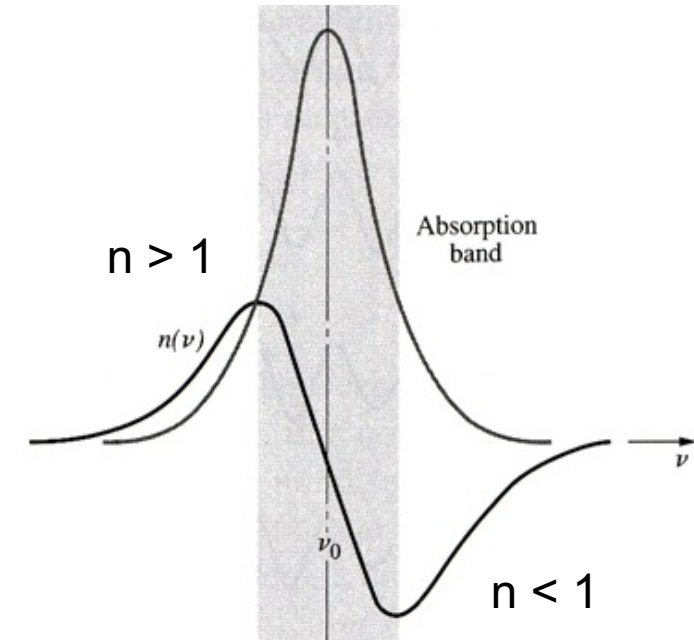
Bonus: Plus vite que la lumière? 1. Vitesse de phase $> c$

- Déjà en 1904, R. W. Wood: Lumière blanche passante à travers la vapeur de Sodium
- Résonance (ligne d'absorption) atomique, comme dans notre modèle simple de la dispersion.
- Dans une gamme (étroite) de fréquences $\omega > \omega_0$: $n < 1$, donc: $v_{ph} > c$!

Contradiction avec la relativité ?

Non!

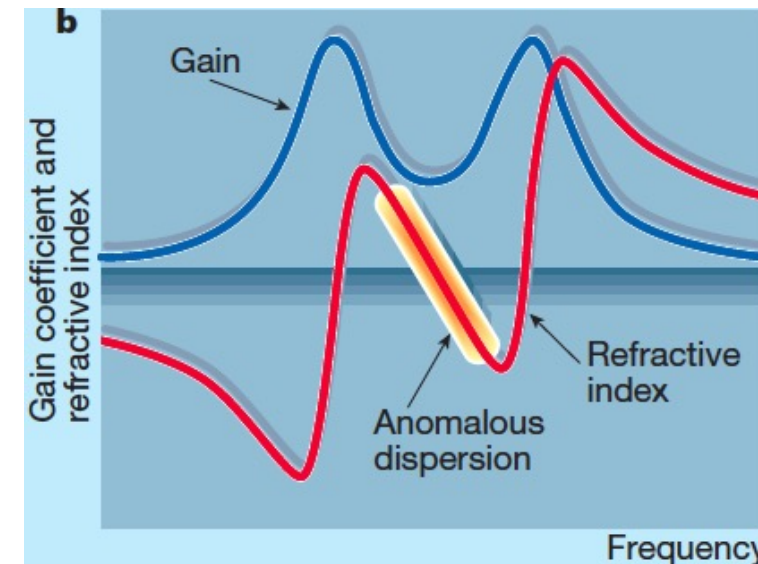
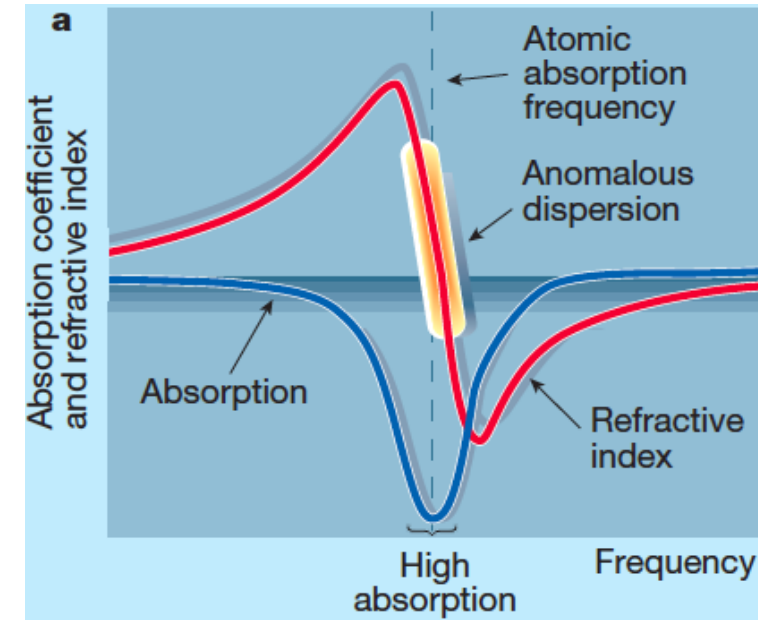
- La lumière rapide est presque monochromatique, donc – pas de transport d'information.
- L'information est transmise à la vitesse de groupe!



- Autre cas: dans l'exemple d'un faisceau envoyé à la lune, on peut atteindre une vitesse *linéaire* extrêmement grande avec une vitesse *angulaire* modeste, à cause du bras de levier énorme (385,000 km).
- De nouveau, pas de contradiction avec la relativité: On ne peut pas envoyer de l'information (moduler le faisceau) plus vite que la vitesse de la lumière.

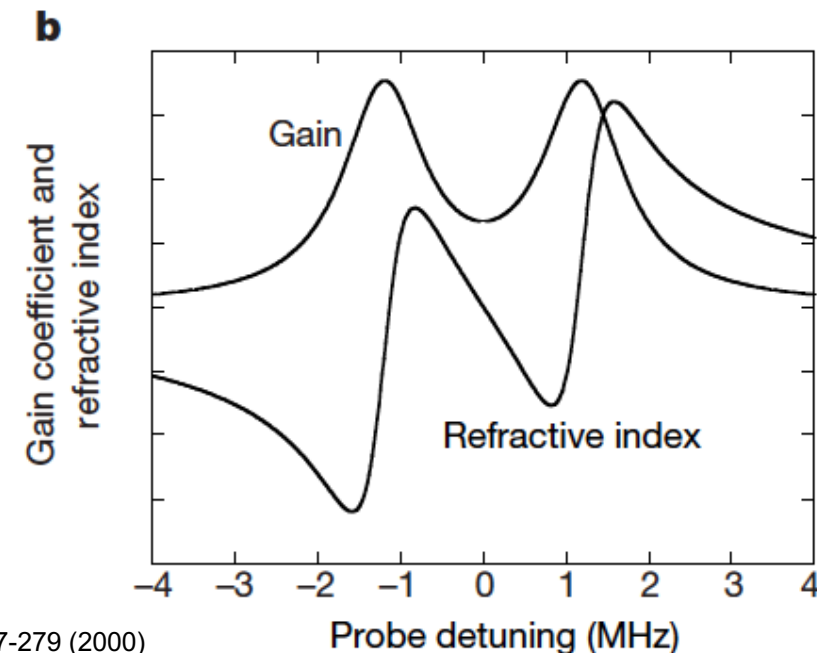
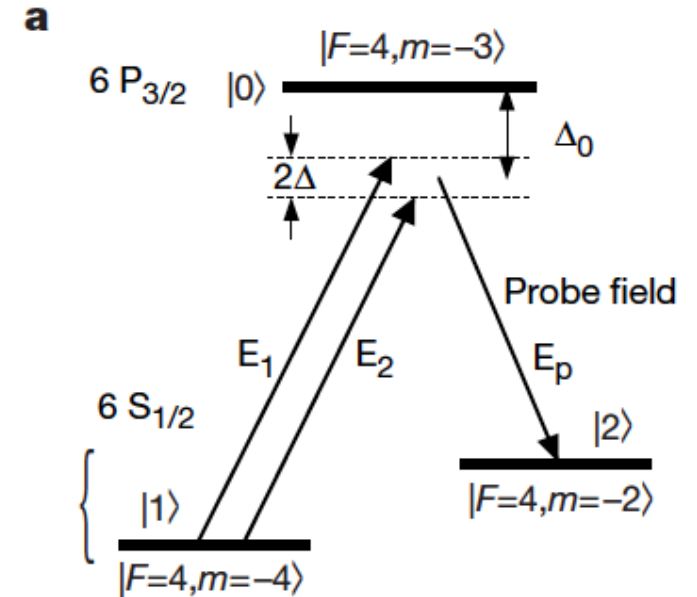
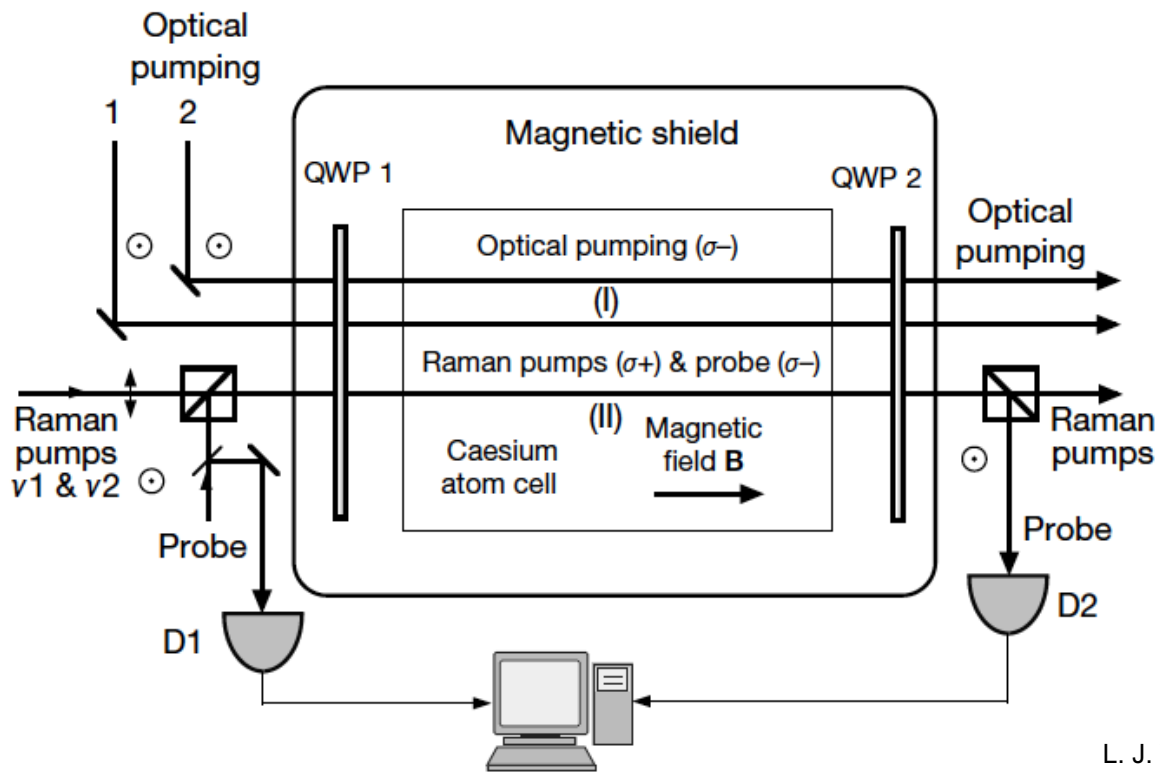
Bonus: Plus vite que la lumière? 2.Vitesse de groupe $>c$

- La vitesse de groupe est donnée par: $v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_\phi \left(1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk}\right)$
- Près d'une résonance (a), $\frac{dn}{dk} < 0$, donc: $v_g > v_{ph}$, et on peut espérer de trouver $v_g > c$.
- L'indice correspondant est: $n_g = \frac{c}{v_g} = n_\phi / \left(1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk}\right) < n_\phi$
- Mais, l'absorption est grande!
- Dans une expérience spécialement conçue, on peut trouver une gamme (étroite) de fréquences entre deux résonances avec une amplification (b), et une pente $\frac{dn}{dk}$ qui est grande et négative, donc $v_g > c$!



Bonus: Plus vite que la lumière? 2. Vitesse de groupe $> c$

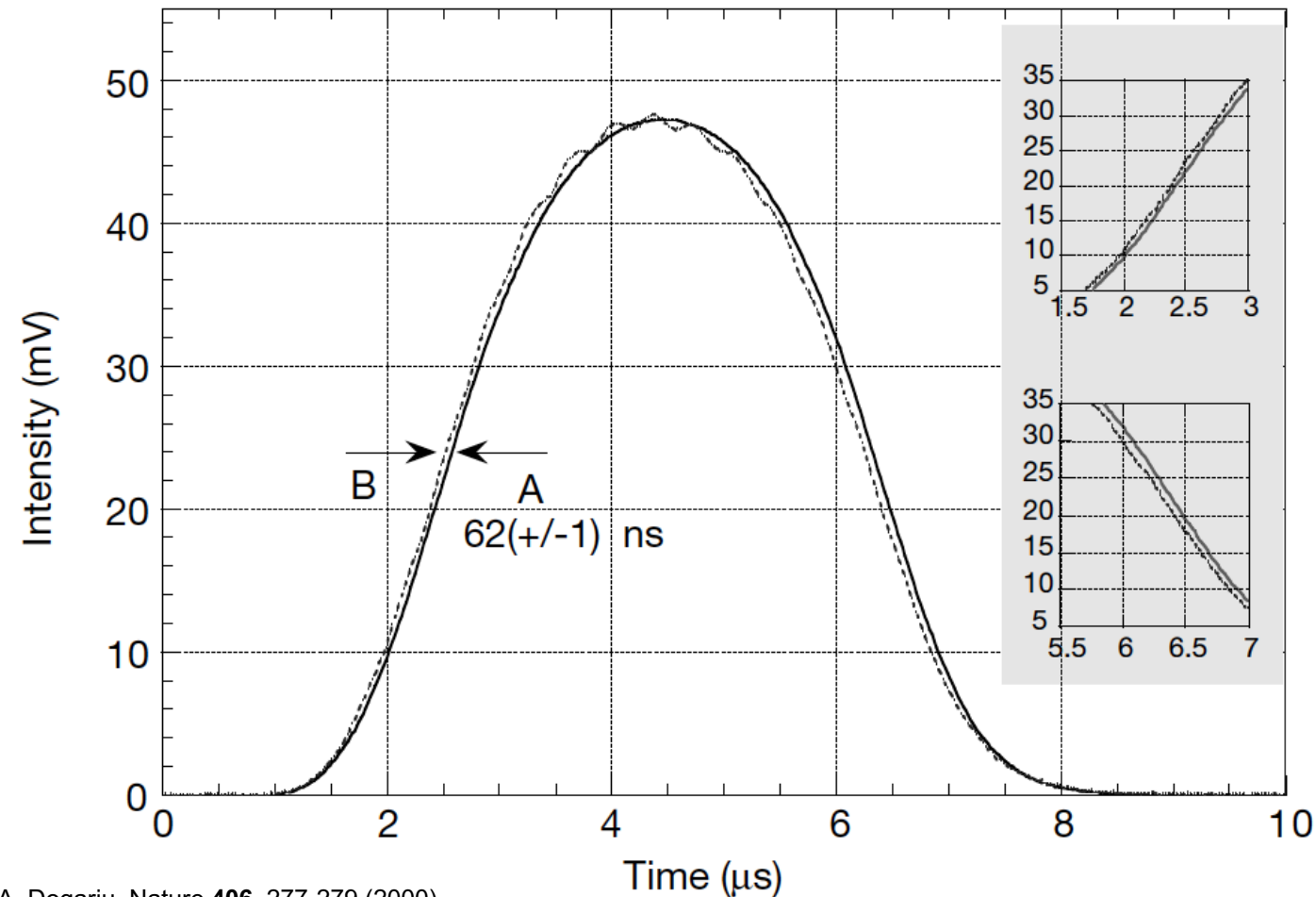
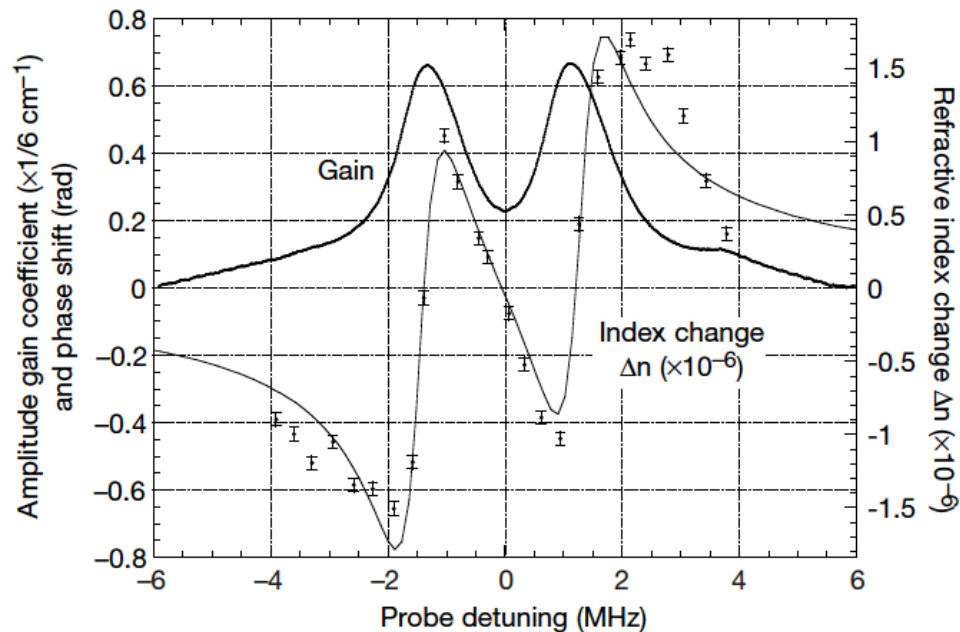
- Un système complexe avec des atomes de Cs en vapeur, pompés optiquement à deux niveaux (splittés par un champ magnétique), afin de générer un gain optique pour un signal "sonde" dans une gamme étroite de fréquence (± 2 MHz)
- Dans cette gamme de fréquence, la dispersion est anormale, donnant un indice de groupe négatif et une vitesse de groupe surluminale



Bonus: Plus vite que la lumière? 2. Vitesse de groupe $> c$

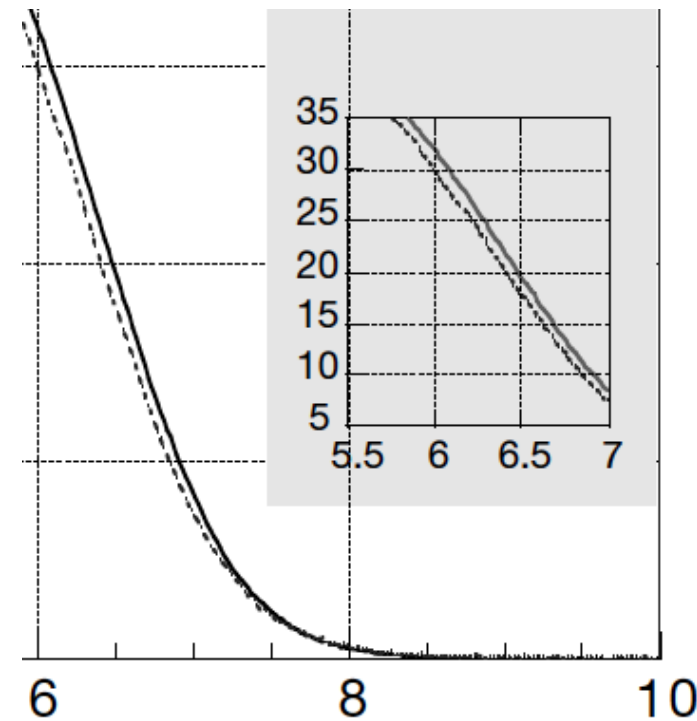
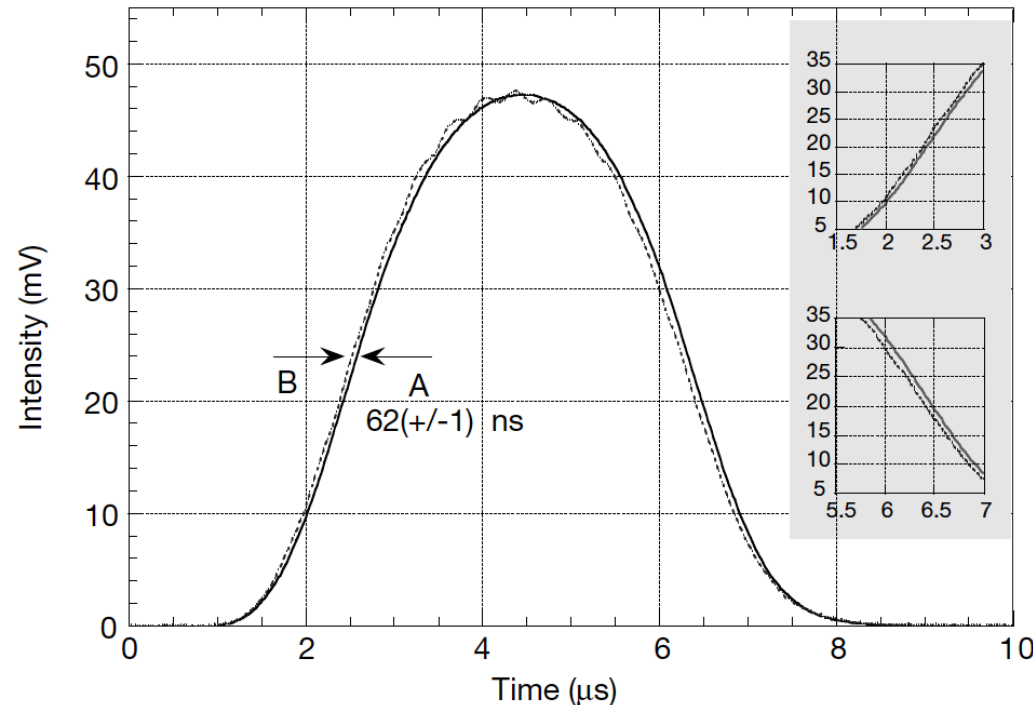
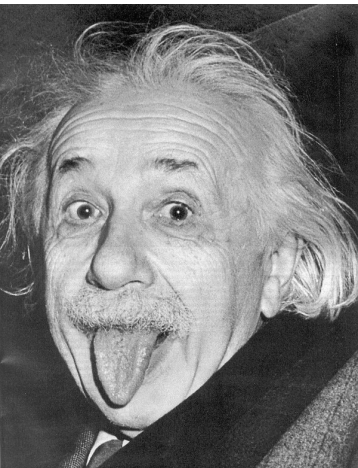
Résultats:

1. Mesure "statique" (CW) de l'indice, donne: $n_g = -330 \pm 30$
2. Mesure "dynamique" avec une impulsion: le pulse arrive avec une avance de 62 ns (temps de passage dans le vide: 0.2 ns!), ce qui correspondre à $n_g = -310 \pm 5$
3. La vitesse est donc plus grande que c



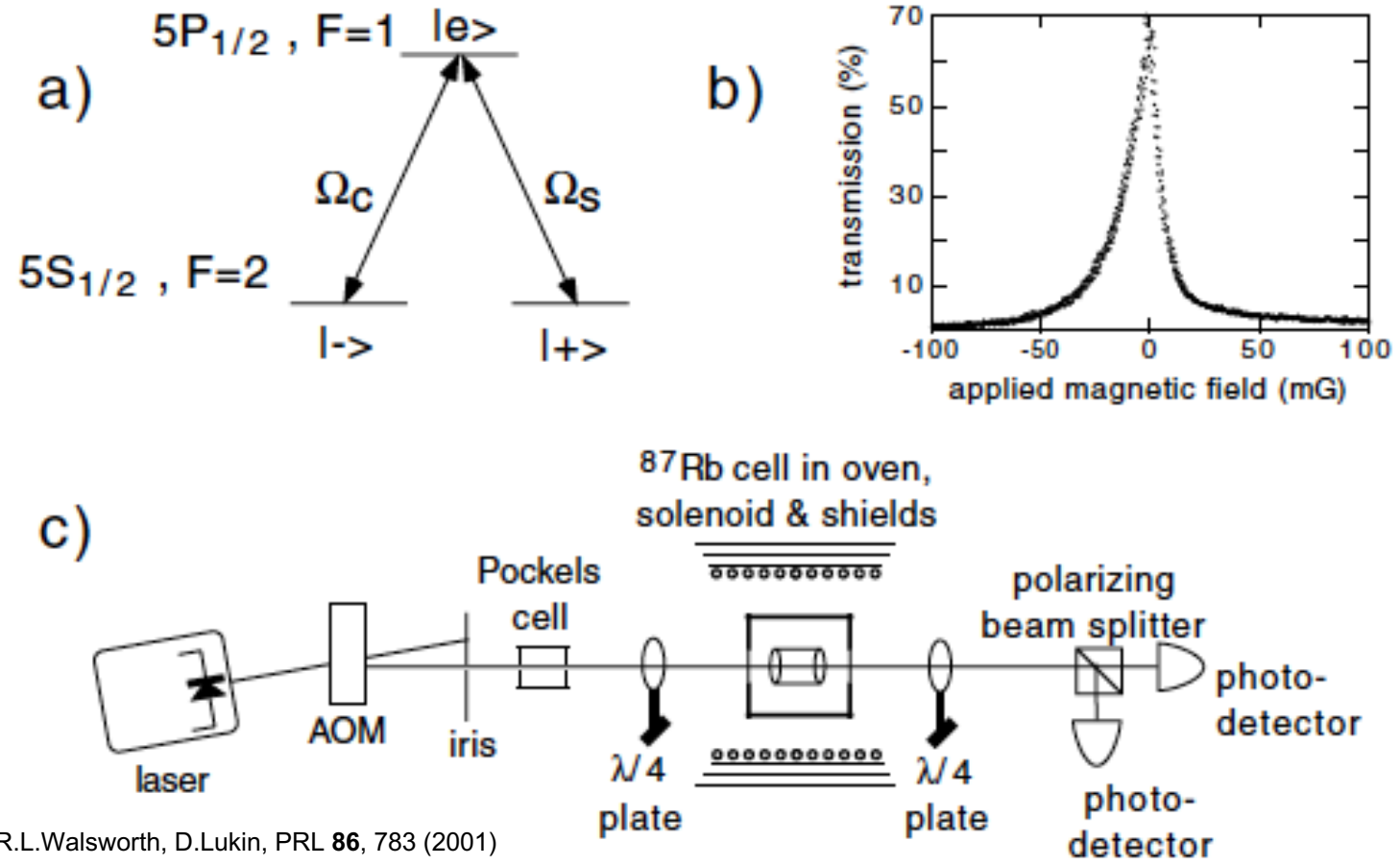
Bonus: Encore plus vite que la lumière? 3. Vitesse de groupe $>c$ et relativité

- Les équations de Maxwell n'interdisent pas une vitesse $>c$.
- La courbe de l'indice de réfraction, montrant la dispersion anormale, correspond aux relations de Kramers-Kronig, qui sont entre autre la conséquence de la causalité.
- La question la plus difficile est: A quelle vitesse pouvons-nous transmettre de l'information?
- La bande passante de notre impulsion est faible (impulsion de $4\text{ }\mu\text{s}$!), elle limite la vitesse de transmission des données, plus faible que le gain de temps.
- En effet, on change la forme de l'impulsion, mais on n'avance jamais le temps où le début de l'impulsion sorte du système.



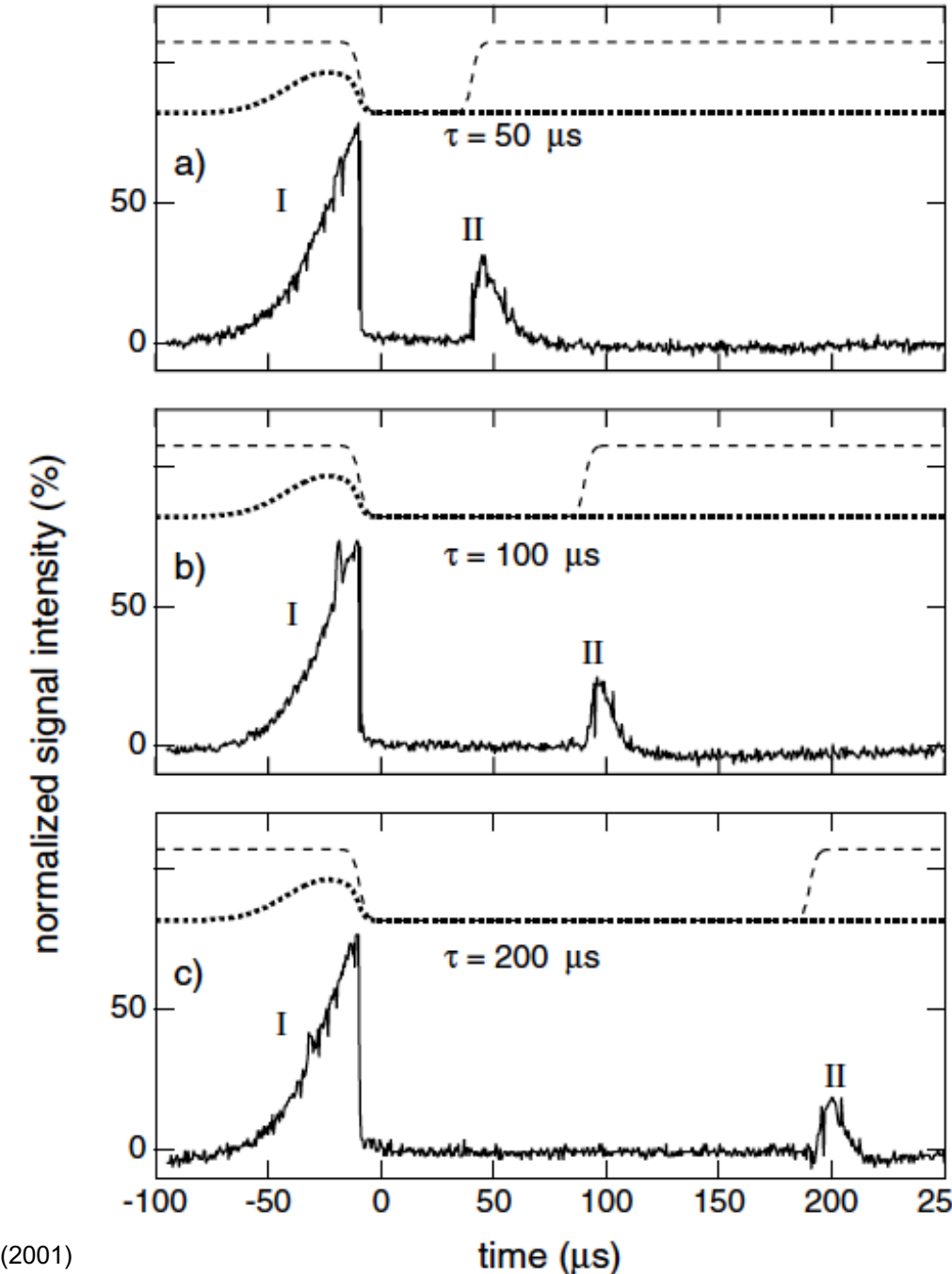
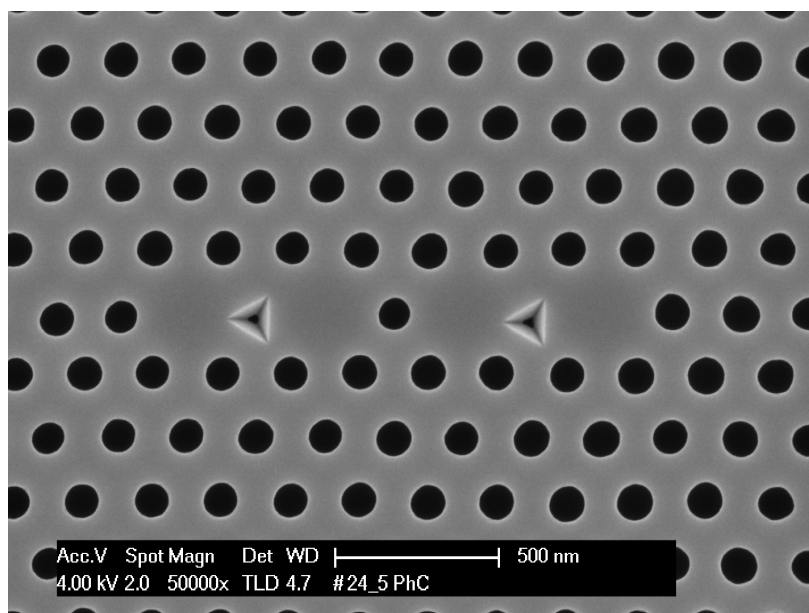
Bonus: La lumière au ralenti

- D'une manière similaire (milieu résonant avec un apport d'énergie) on peut obtenir une vitesse de groupe très petite (pente positive très grande).
- On peut stocker de la lumière dans la matière (pendant des ms!), ou dans des résonateurs
- Exemple: cellule de Rb pompée optiquement à un état résonant, accordé par un champ magnétique à la fréquence du signal



Bonus: La lumière au ralenti:

- L'impulsion qui entre est fortement comprimée par la petite vitesse de groupe (pente positive très grande).
- On stocke la lumière dans la cellule (jusqu'à 0.5 ms!) en changeant le champ magnétique
- En restaurant le champ, l'impulsion sort (atténuée)
- Des fonctions similaires peuvent être démontrées avec des structures en GaAs



Bonus: Des impulsions attoseconde (1)

- Le temps d'un cycle d'oscillation de la lumière est: $\tau = \lambda/c$. Pour une $\lambda = 500$ nm, $\tau = 1.3$ fs. En intensité, la période est la moitié: $\tau/2 = 0.83$ fs.
- Il existent pourtant des phénomènes physiques qui sont encore plus courts, comme l'ionisation d'un atome, des réactions chimiques, l'effet tunnel, etc. Pour les étudier il faut des impulsions plus courtes – une fraction de fs.
- Prix Nobel de physique 2023
“for experimental methods that generate attosecond pulses of light for the study of electron dynamics in matter”

Pierre Agostini, Ohio State University, Columbus, USA,

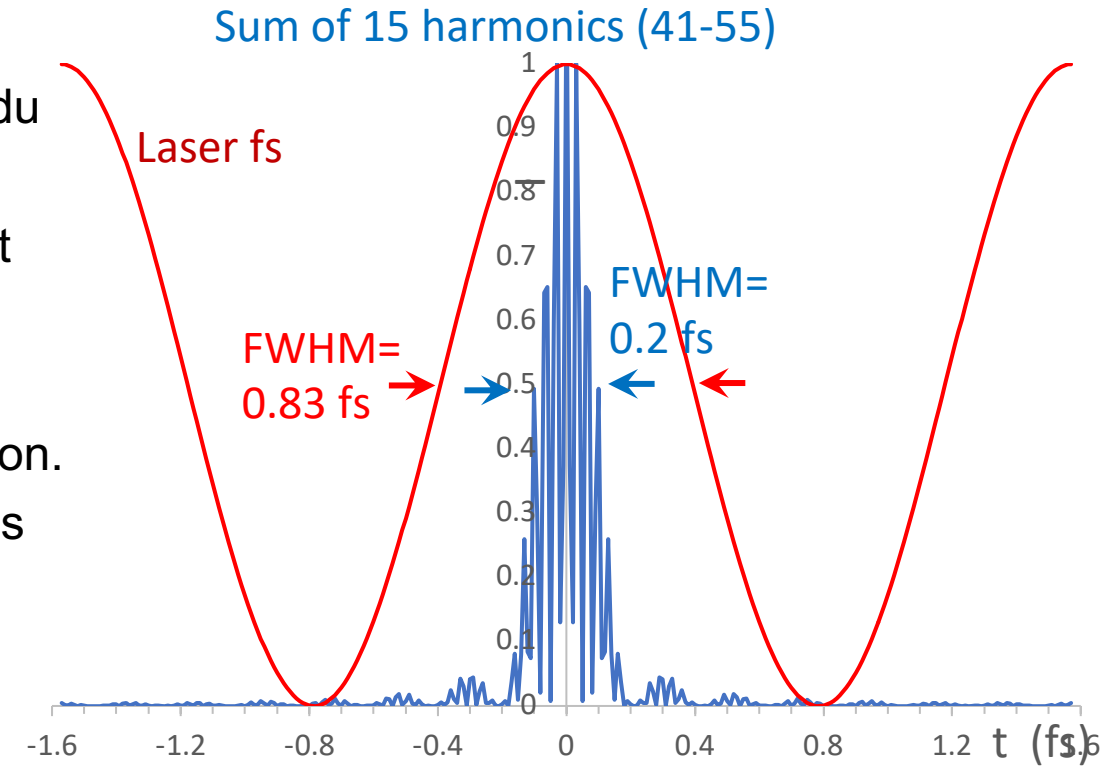
Ferenc Krausz, Max Planck Institute of Quantum Optics, Garching and
Ludwig-Maximilians-Universität München, Germany

Anne L'Huillier, Lund University, Sweden.

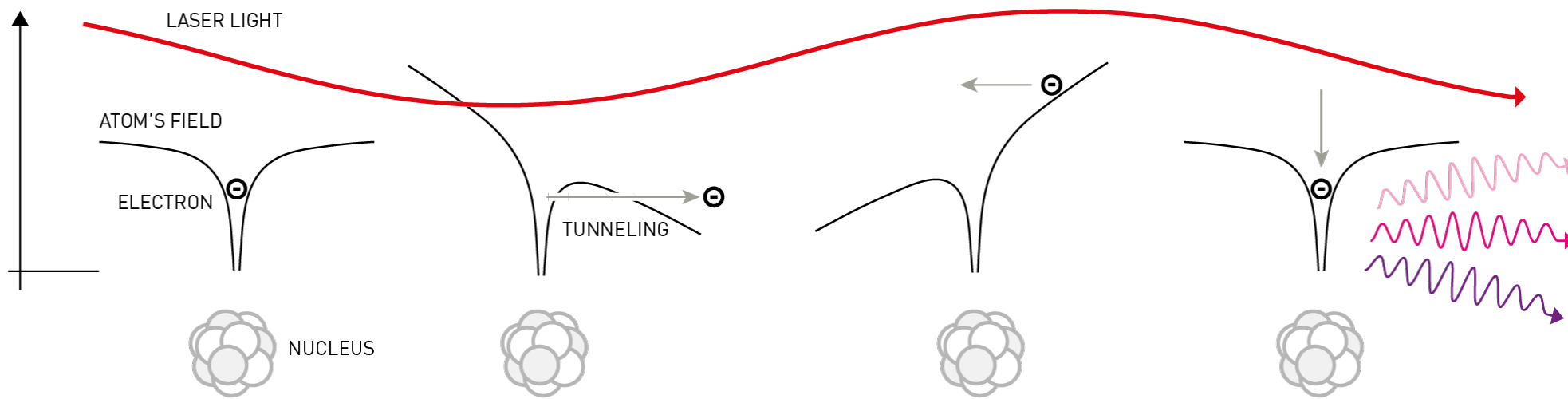


Bonus: Des impulsions attoseconde (2)

- Une interaction entre une impulsion courte (30 fs) de haute intensité et un atome de Krypton ou néon. Dans une oscillation du champ optique, au maximum il est assez fort pour extraire un électron du noyau. Après peu de temps (0.83 fs), le champ est inversé; l'électron est accéléré vers l'atome, et dans cette "collision" il libère son énergie cinétique en forme des photons d'une haute énergie, donc fréquence plus grande que l'illumination. C'est la génération des "haute harmonies" (fréquences 40-60 fois plus haute que celle de l'impulsion d'origine).
- La combinaison de ces harmonies forme une impulsion ultra-courte (0.2 fs).



ENERGY LEVEL



Bonus: Des impulsions attoseconde (3)

- Une impulsion ultra-courte (0.2 fs) a des propriétés spéciales:
- Fréquence ultra-haute: $\omega = 3 \cdot 10^{16}$ Hz
- Longueur d'onde très courte: $\lambda = \tau c = 60$ nm
- Une très haute énergie: $E = \hbar\omega = 20.7$ eV
- Utilisation: mesurer la dynamique des processus d'ionisation, interaction matière-lumière, réactions moléculaires, etc.

