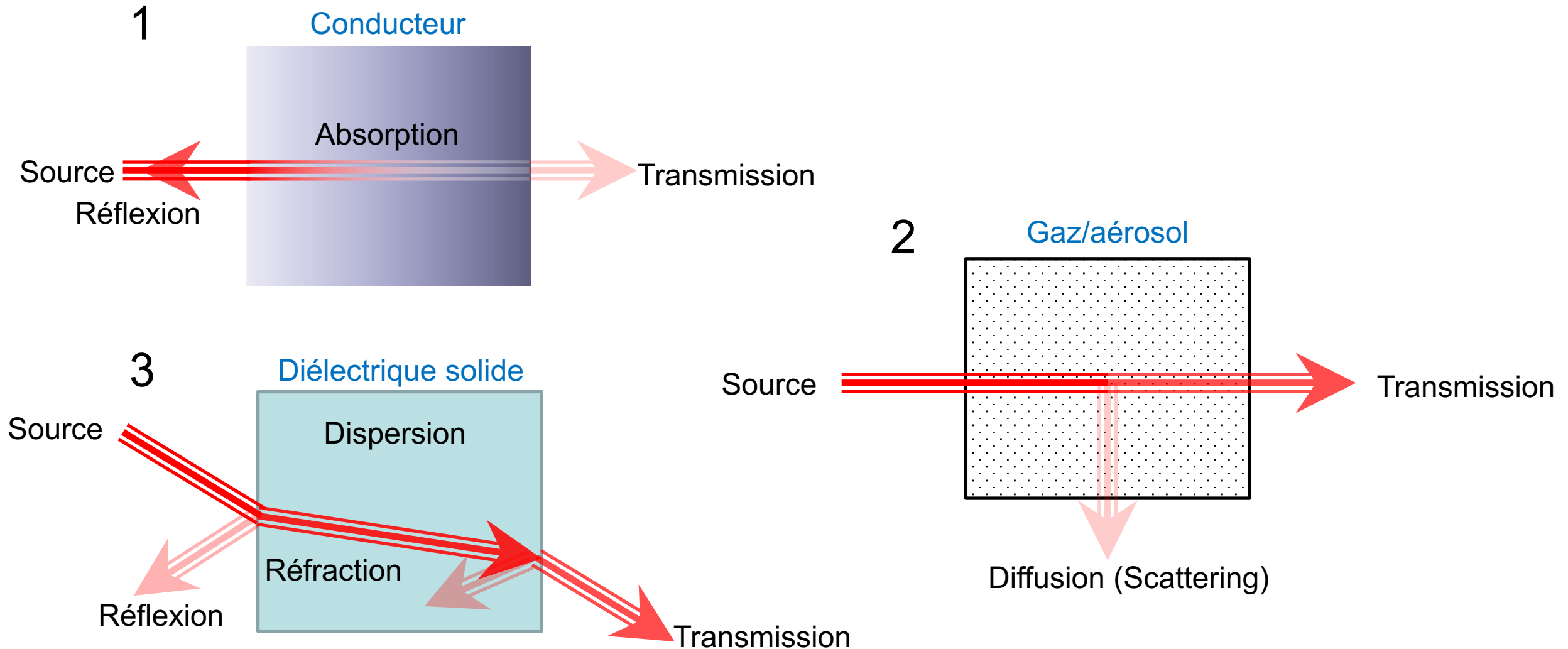


Ch. 2: La propagation de la lumière

La lumière qui traverse différents milieux peut subir plusieurs phénomènes physiques, selon le milieu:



(1) L'absorption dans les conducteurs

- Nous traitons le conducteur comme un milieu neutre avec des porteurs **libres**: $\rho = 0$, $\mathbf{j} \neq 0$, $\mathbf{M} = 0$
- L'équation d'ondes générique: $\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{M})$
- L'équation d'onde devient (en ajoutant la loi d'Ohm: $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$): $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, n_0 contient les effets de la polarisation du milieu.
- Nous proposons la solution (ondes planes): $\mathbf{E} = \mathcal{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ qui transforme l'équation en: $k^2 = \frac{n_0^2 \omega^2}{c^2} + i \frac{\omega \sigma}{\varepsilon_0 c^2}$.
- Le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ devient **complexe**: $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$, mais toujours perpendiculaire à $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$.
- Pour résoudre notre équation, il faut développer k^2 :

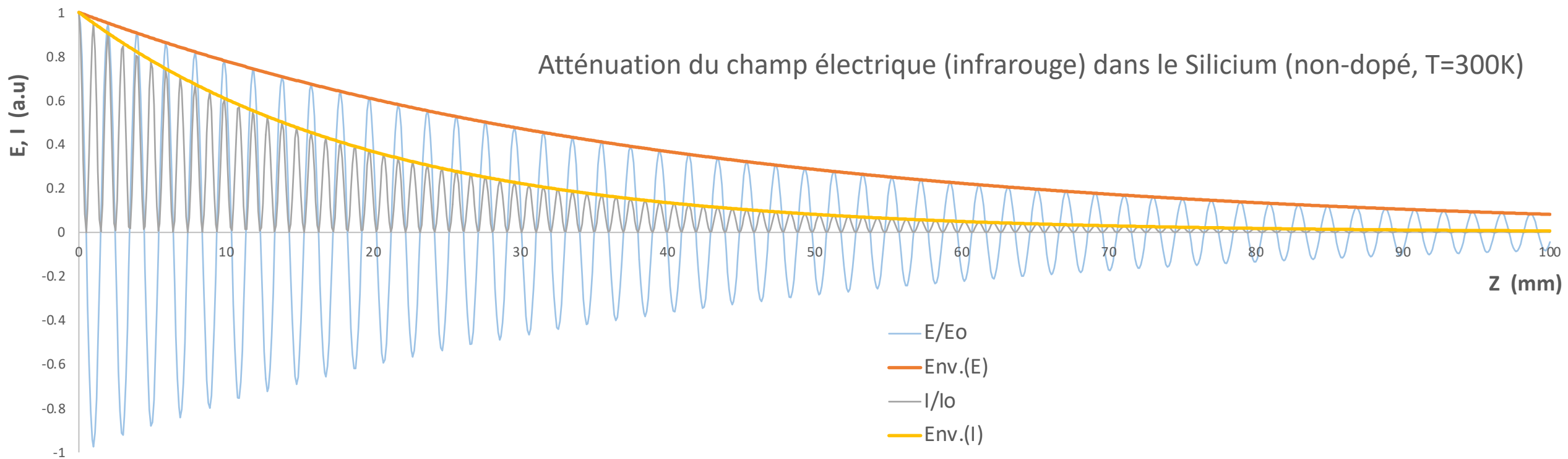
$$k^2 = (k' + ik'')^2 = k'^2 - k''^2 + 2ik'k'' = \frac{n_0^2 \omega^2}{c^2} + i \frac{\omega \sigma}{\varepsilon_0 c^2}$$

- Les parties réelle et imaginaire donnent les équations: $k'^2 - k''^2 = \frac{n_0^2 \omega^2}{c^2}$, $k'k'' = \frac{\omega \sigma}{2\varepsilon_0 c^2}$

- La solution est:
$$k'^2 = \frac{n_0^2 \omega^2}{2c^2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2 n_0^4 \omega^2}} + 1 \right)$$
$$k''^2 = \frac{n_0^2 \omega^2}{2c^2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2 n_0^4 \omega^2}} - 1 \right)$$

Les faibles conducteurs (semiconducteurs)

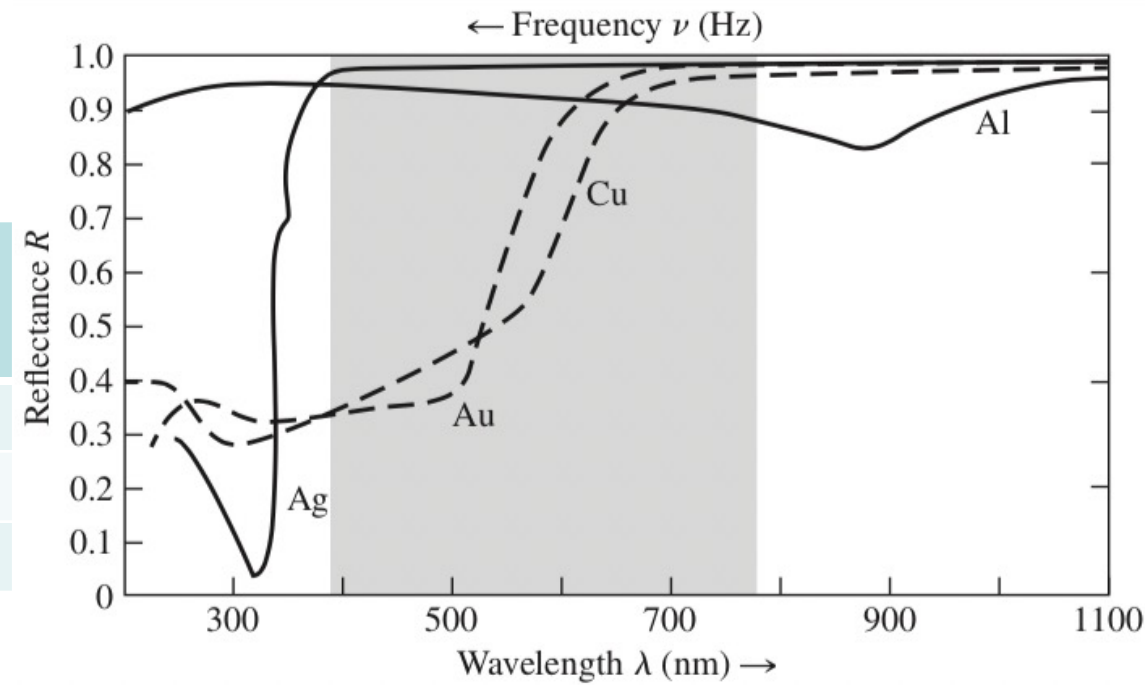
- Nous pouvons définir: $n = n' + in'' = k'/k_0 + ik''/k_0$; cela donne: $n'^2 = \frac{n_0^2}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2 n_0^4 \omega^2}} + 1 \right)$ et: $n''^2 = \frac{n_0^2}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2 n_0^4 \omega^2}} - 1 \right)$
- Dans le cas $\sigma \ll 2\epsilon_0 c^2 / \omega$: $n' \approx n_0$, $n'' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 n_0 \omega}$
- L'onde devient : $\mathbf{E} = \mathcal{E}_0 e^{-k'' \cdot r} e^{i(k' \cdot r - \omega t)}$, la partie imaginaire k'' représente l'atténuation.
- La définition de l'atténuation est: $I(r) = I_0 e^{-\alpha r}$, α = coefficient d'atténuation.
- En se rappelant de: $I = \frac{n\epsilon_0 c}{2} \langle S \rangle_T$, nous trouvons: $\alpha = 2k''$ et dans le cas $\sigma \ll 2\epsilon_0 c^2 / \omega$: $\alpha = \frac{\sigma}{\epsilon_0 n_0 c}$.



Absorption/propagation dans les métaux

- Dans les métaux, nous pouvons utiliser le modèle de Drude pour la conductivité, qui donne: $\sigma = \frac{\sigma_0}{1-i\tau\omega}$, $\sigma_0 = \frac{e^2\tau N}{m}$, τ = temps entre collisions, N = densité d'électrons. Dans les métaux, $\tau = (0.5-5) \cdot 10^{-14}$ s, donc ($\omega\tau \gg 1$) : $\sigma \approx \frac{i\sigma_0}{\tau\omega}$
- En utilisant: $k^2 = \frac{n_0^2\omega^2}{c^2} + i\frac{\omega\sigma}{\varepsilon_0 c^2}$, nous obtenons: $k^2 = \frac{n_0^2\omega^2}{c^2} - \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 c^2 \tau} = \frac{n_0^2\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$, où: $\omega_p^2 \equiv \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 n_0^2 \tau} = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 n_0^2 m}$.
- Pour la plupart des métaux, la **fréquence de plasma** ω_p est dans l'UV; pour la lumière visible, $\omega \ll \omega_p$, donc $k = \frac{n_0\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ est imaginaire: $k \approx i \frac{n_0\omega_p}{c}$ et: $n \approx i \frac{n_0\omega_p}{\omega}$.
- Le champ électrique est donc: $\mathbf{E} = \mathcal{E}_0 e^{-n_0\omega_p r/c} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$, le coefficient d'atténuation est: $\alpha = \frac{2n_0\omega_p}{c}$. La longueur typique d'atténuation $\alpha^{-1} = \lambda_p/4\pi$ est d'environ 10 nm! La lumière visible ne pénètre pratiquement pas dans le métal.

Métal	N ($\times 10^{28} \text{ m}^{-3}$)	σ_0 ($\times 10^4 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$)	τ ($\times 10^{-14} \text{ s}$)	ω_p ($\times 10^{16} \text{ s}^{-1}$)	λ_p (nm)
Al	18.1	0.41	0.8	2.4	80
Au	5.90	0.49	3.0	1.4	140
Ag	5.86	0.66	4.0	1.4	140

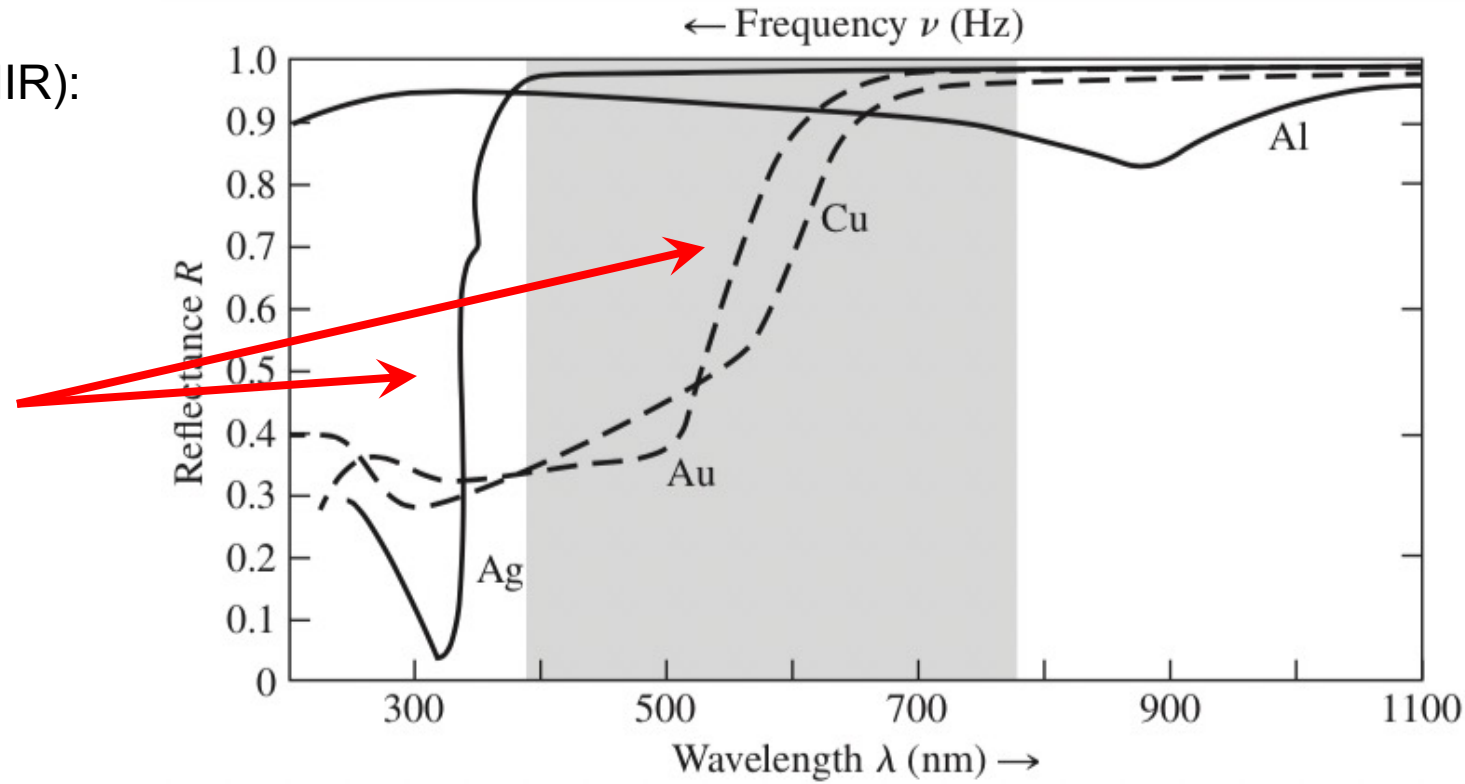


Propagation dans les métaux: conservation de l'énergie

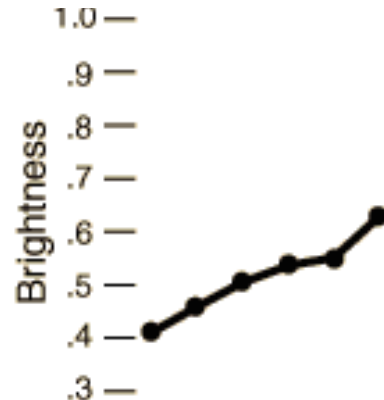
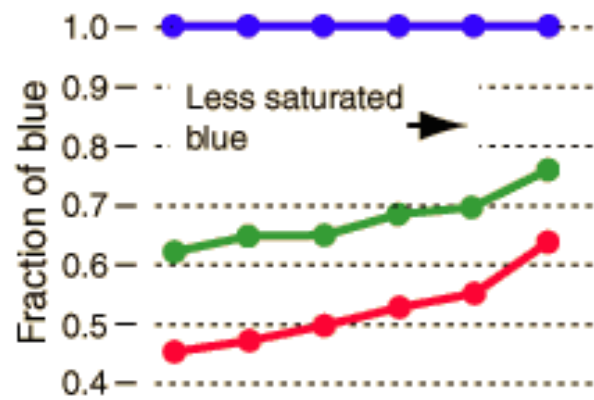
- Quelle est la perte d'énergie dans les métaux?
- La loi d'Ohm donne : $P = \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \rangle_T = \sigma \frac{E_0^2}{2}$. Selon Drude: $\sigma = \frac{\sigma_0}{1-i\tau\omega} = \frac{\sigma_0(1+i\tau\omega)}{1+(\tau\omega)^2}$.
- La partie imaginaire de σ ne produit pas de perte, il ne reste que la partie réelle: $P = \frac{E_0^2}{2} \frac{\sigma_0}{1+(\tau\omega)^2} \approx \frac{E_0^2}{2} \frac{\sigma_0}{(\tau\omega)^2}$ (dans les métaux, $\tau\omega \gg 1$).
- La dissipation est plus petite que dans les basses fréquences, par le facteur $(\tau\omega)^2 = 300 - 30000$.
- Conclusion: la plupart de l'énergie de l'onde n'est pas absorbée, mais réfléchi!

Réflectivité des métaux (UV-NIR):

Absorption
(résonances dans l'UV)



(2) La diffusion: pourquoi le ciel est-il bleu et les nuages blancs?



Coucher du soleil: rouge



An informal measurement of sky brightness and saturation

The points chosen approach the sun direction and avoid obvious clouds.

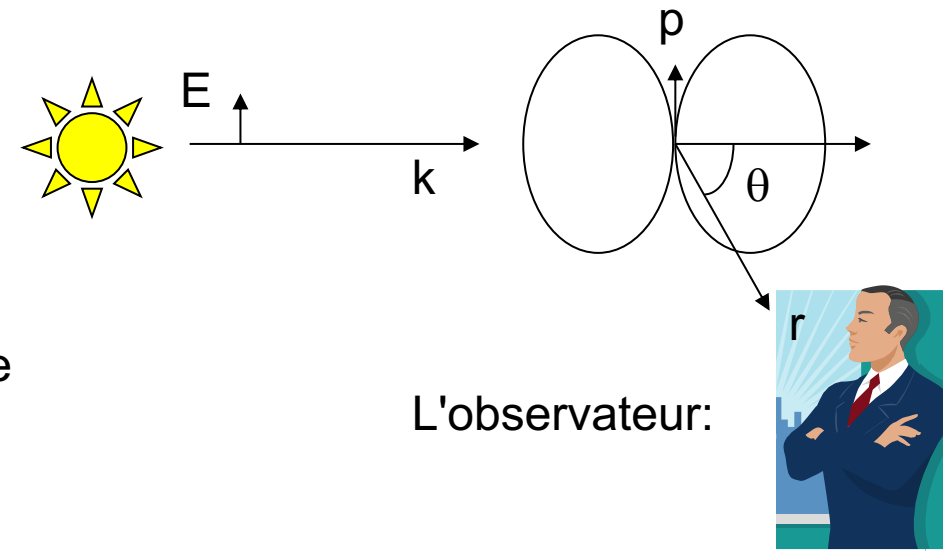
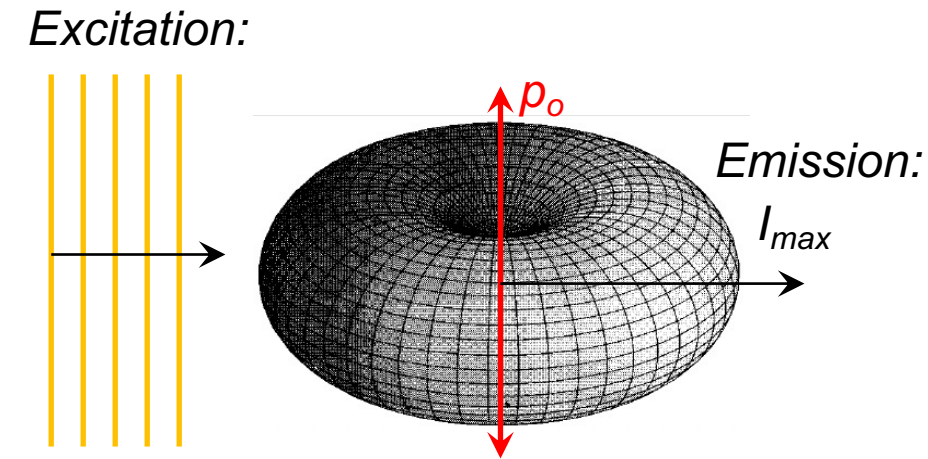


Nuages: blancs / gris

Ciel: bleu, moins saturé vers le soleil

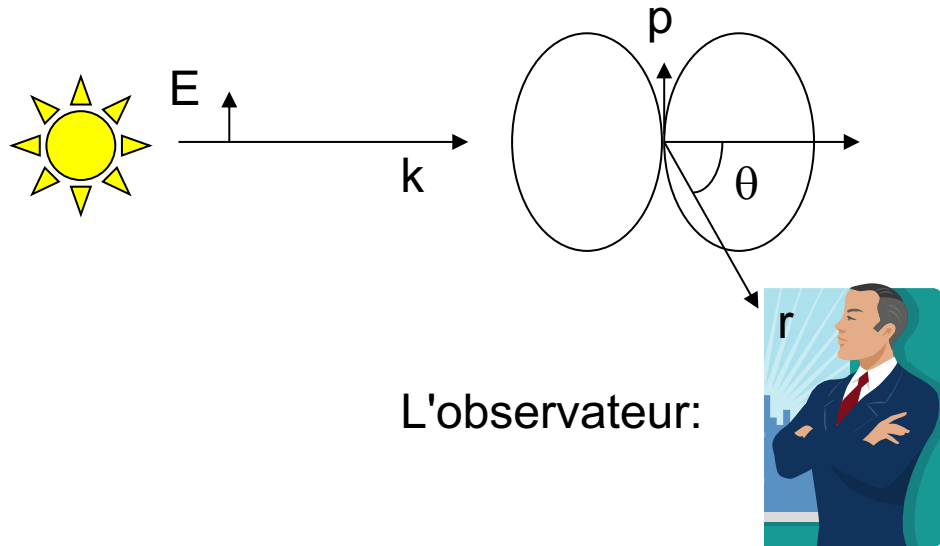
Diffusion: le modèle de Rayleigh (1)

- La lumière du soleil est diffusé par des molécules ou des petites particules (dia.<100nm) en faible concentration dans la stratosphère.
- Le modèle de Rayleigh de la diffusion: chaque molécule/gouttelette est excité par le champ électrique de la lumière solaire, donnant lieu à un dipôle électrique oscillant, avec un moment dipolaire p_0 .
- Nous avons vu que les champs émis par un dipôle oscillant sont: $E_\theta \approx \frac{\omega^2 p_0 e^{-i\omega t}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin \theta$; $H_\varphi \approx \frac{\omega^2 p_0 e^{-i\omega t}}{4\pi c r} \sin \theta$;
- L'intensité de la lumière diffusée est donc: $I = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \theta \propto \frac{1}{\lambda^4}$; elle est maximale dans la direction de propagation du faisceau excitant (perpendiculaire au champ $\mathbf{E}$).
- Résultat de la distribution angulaire: la plus grande partie de la lumière continue tout droit. Seul une petite intensité est diffusée dans d'autres directions. En plus, la faible densité de l'air stratosphérique donne une diffusion très faible.
- La luminosité du soleil (angle solide de $7 \cdot 10^{-5}$ sr) est 10 fois plus grande que celle du ciel entier (6.3 sr)! Cela montre que seul 10^{-6} de la lumière solaire est diffusé.

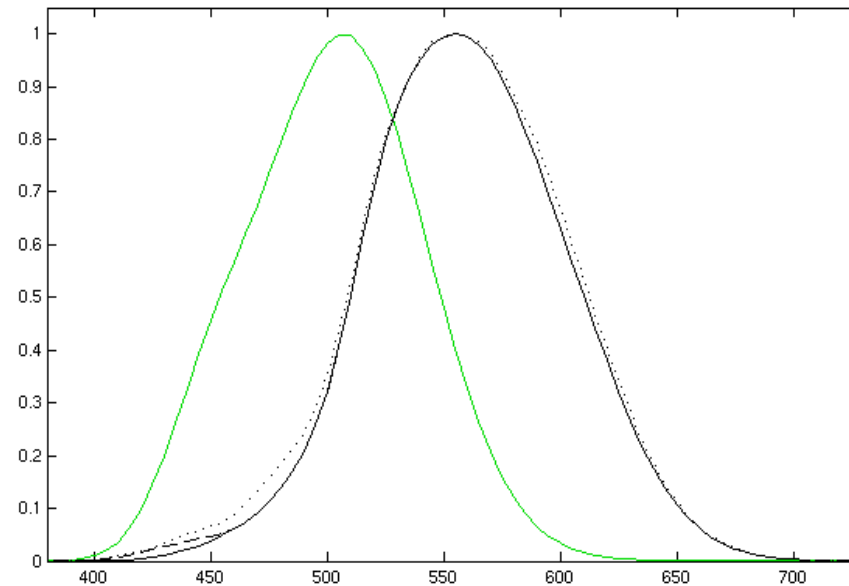


Diffusion: le modèle de Rayleigh (2)

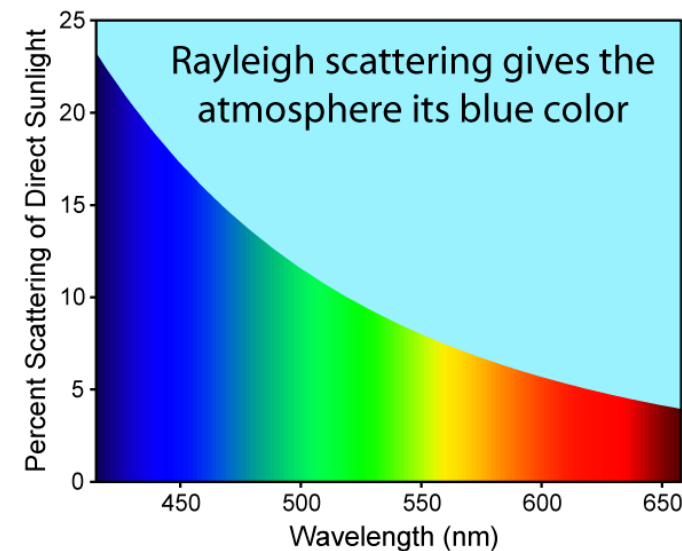
- L'intensité de la lumière diffusée est: $I = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \theta \propto \frac{1}{\lambda^4}$.
- Résultat de la dépendance en ω : L'intensité est 9 fois plus grande en 400 nm qu'en 700 nm !
- Si on tient compte de la sensibilité de l'œil (plus faible dans le violet), le résultat est que le ciel nous apparaît bleu.



Réponse spectrale de l'œil (noir: jour; vert: nuit)

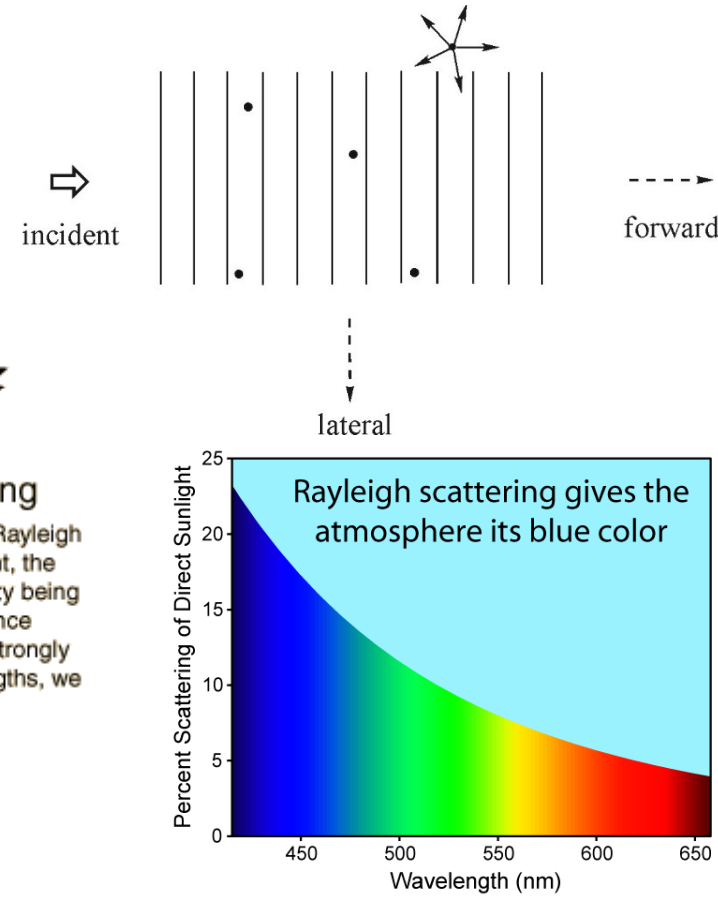
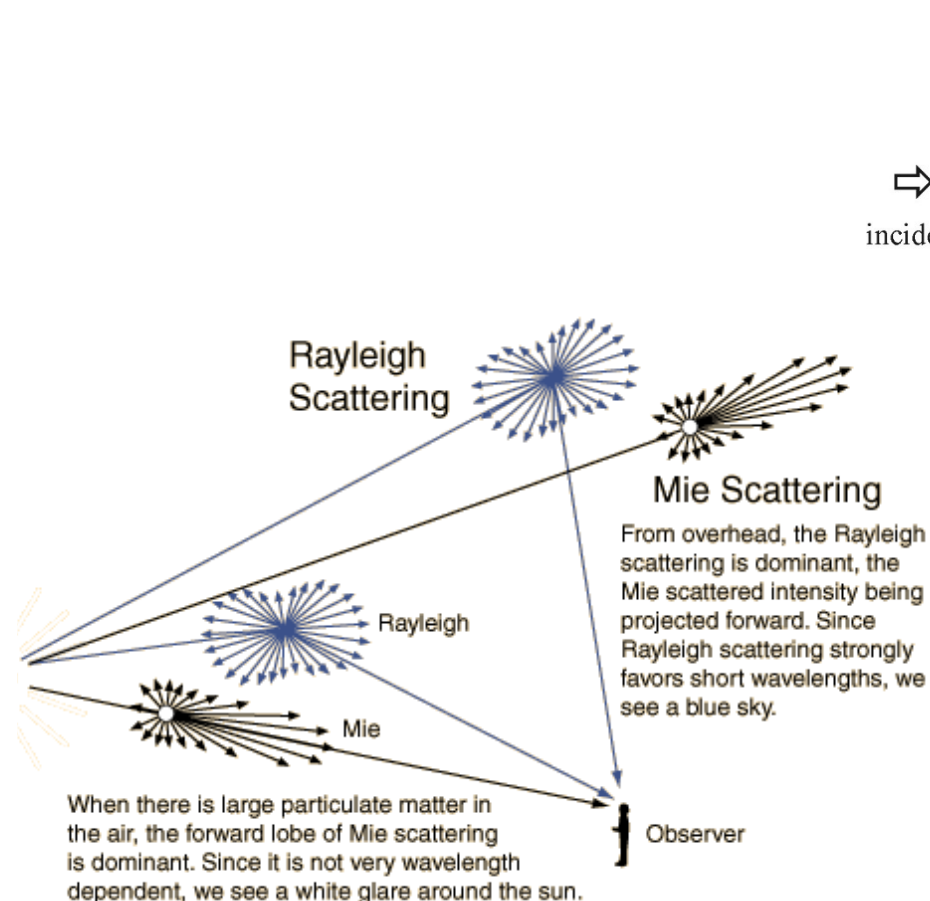
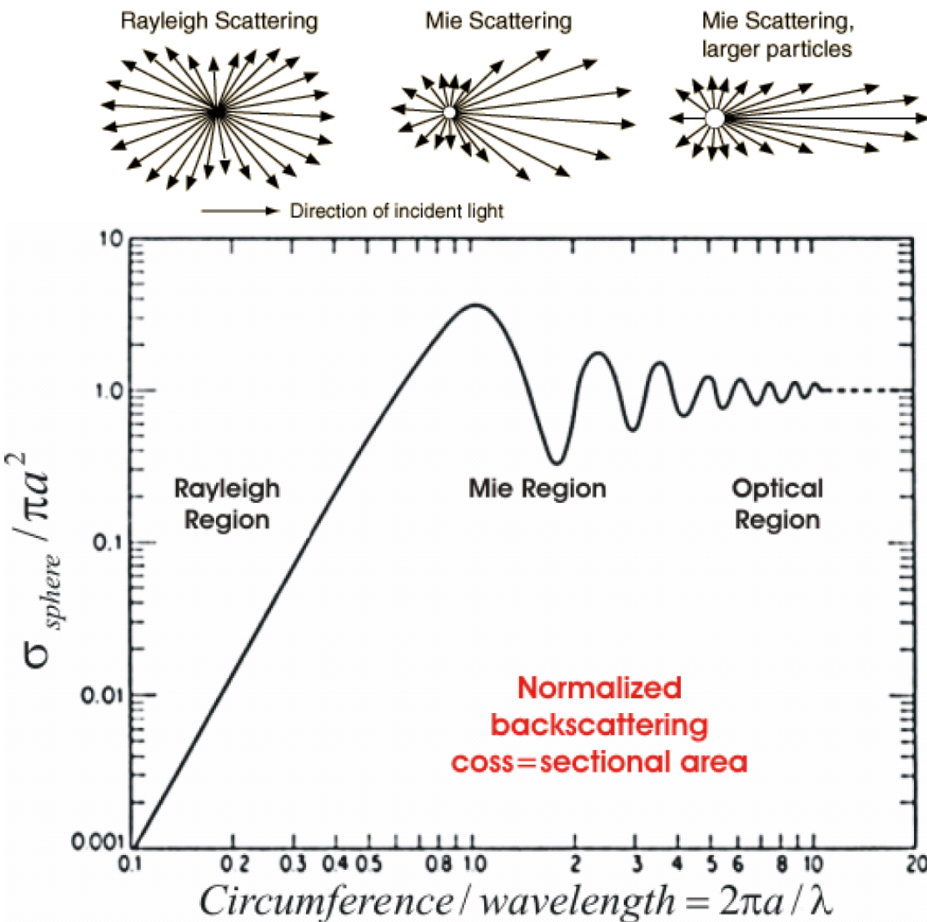


[https://en.wikipedia.org/wiki/Photometry_\(optics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Photometry_(optics))



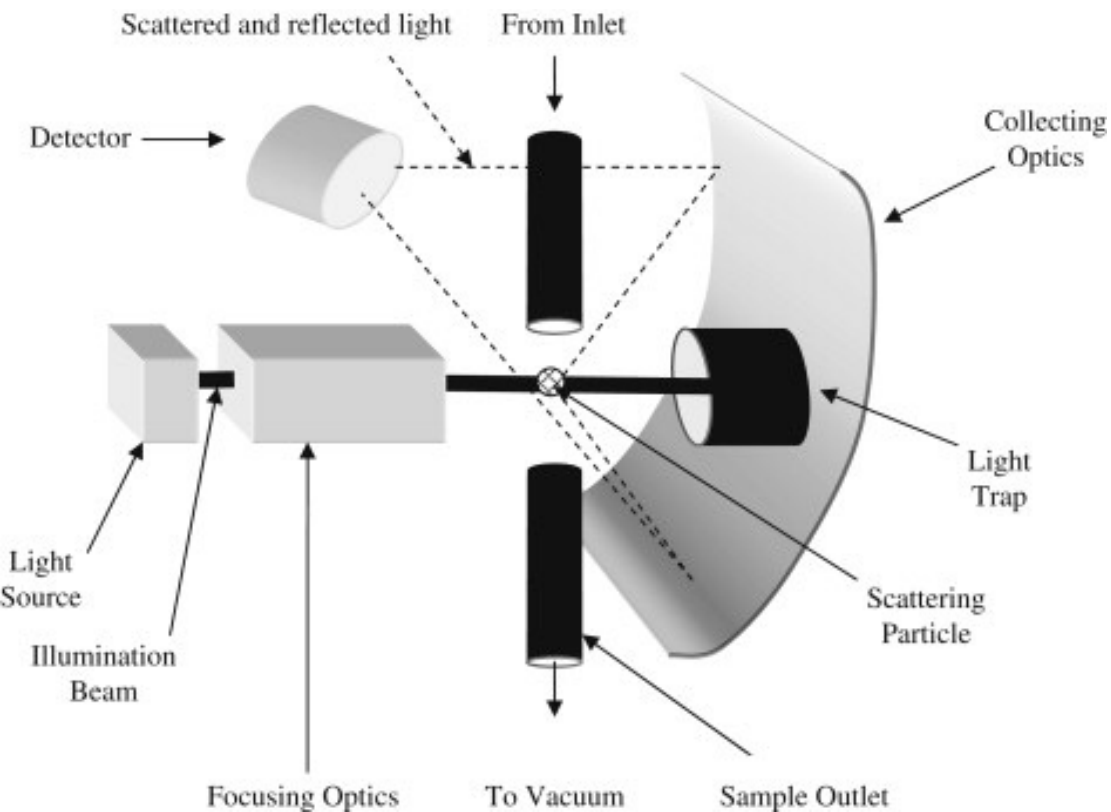
Diffusion dans l'atmosphère: Rayleigh et Mie

- Nous avons vu que l'intensité diffusée (en perpendiculaire par rapport au soleil) donne la couleur bleu du ciel
- Au coucher du soleil, on regarde vers le soleil; il n'y a que peu de lumière diffusé par le mécanisme de Rayleigh (bleu), donc la couleur est rouge-orange (par diffusion de mie)
- La diffusion de Mie par des gouttelettes et poussière ($\text{dia} > \lambda$): ne dépend pas de la longueur d'onde (sauf résonances quand $\text{dia} \approx \lambda$); c'est la raison de la couleur blanc/gris des nuages.



Bonus: Application - mesurer les particules fines

- L'intensité diffusée: $I \propto a^4$
- Le flux d'air ou de liquide traverse un faisceau laser focalisé
- Chaque particule diffuse à une intensité différente
- Une série de compteurs accumulent le nombre des particules selon leur taille.



Class	Maximum particles/ft³					ISO equivalent
	≥0.1 μm	≥0.2 μm	≥0.3 μm	≥0.5 μm	≥5 μm	
1	35	7.5	3	1	0.007	ISO 3
10	350	75	30	10	0.07	ISO 4
100	3,500	750	300	100	0.7	ISO 5
1,000	35,000	7,500	3000	1,000	7	ISO 6
10,000	350,000	75,000	30,000	10,000	70	ISO 7
100,000	3.5×10 ⁶	750,000	300,000	100,000	830	ISO 8



https://ars.els-cdn.com/content/image/3-s2.0-B9780815515548500112-f08-20-9780815515548.jpg?_

https://ars.els-cdn.com/content/image/3-s2.0-B9781437778830000043-f04-01-9781437778830.jpg?_

<https://en.wikipedia.org/wiki/Cleanroom>

(3a) Le modèle atomique de la dispersion (Lorentz)

- Le modèle **classique** de l'interaction entre l'onde électromagnétique et un électron d'un atome dans un isolant (diélectrique) est d'un oscillateur harmonique amorti excité: $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} = \frac{-eE_0 e^{-i\omega t}}{m}$, ω_0 = fréquence de résonance, γ = amortissement.

- La solution: $x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$ transforme l'équation différentielle en une équation algébrique:

$$-\omega^2 x_0 e^{-i\omega t} - i\gamma\omega x_0 e^{-i\omega t} + \omega_0^2 x_0 e^{-i\omega t} = \frac{-eE_0}{m} e^{-i\omega t}, \text{ ou : } \omega^2 x_0 + i\gamma\omega x_0 - \omega_0^2 x_0 = \frac{eE_0}{m}.$$

- La solution est: $x_0 = \frac{-eE_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$.

- La polarisation d'un atome est donc: $p(t) = p_0 e^{-i\omega t}$, $p_0 = -ex_0 = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} E_0 \equiv \alpha E_0$.

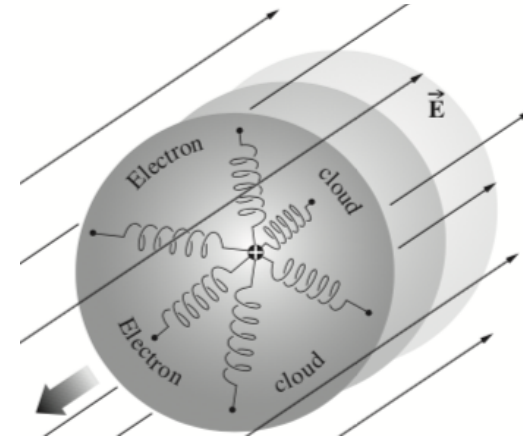
- Pour un ensemble d'atomes avec densité N : $P_0(\omega) = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} E_0(\omega)$, ce qui donne:

$$n^2(\omega) = \varepsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega) = 1 + \frac{Ne^2/\varepsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}$$

en utilisant la définition précédente: $\omega_p^2 = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}$. La fréquence ω_p correspond souvent à l'UV ($\lambda \approx 200$ nm)

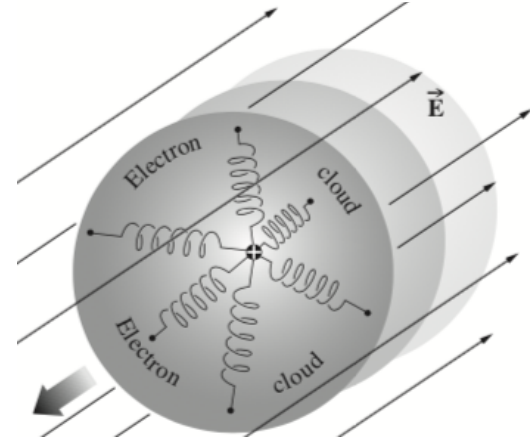
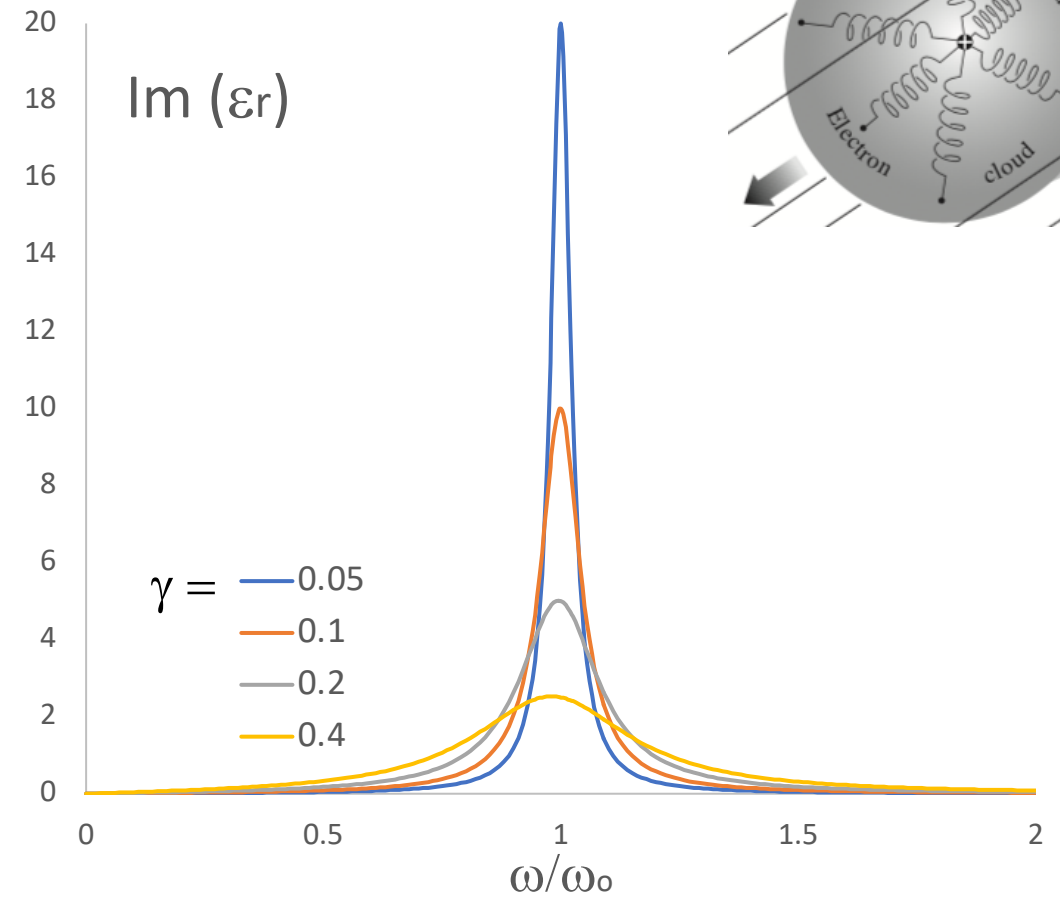
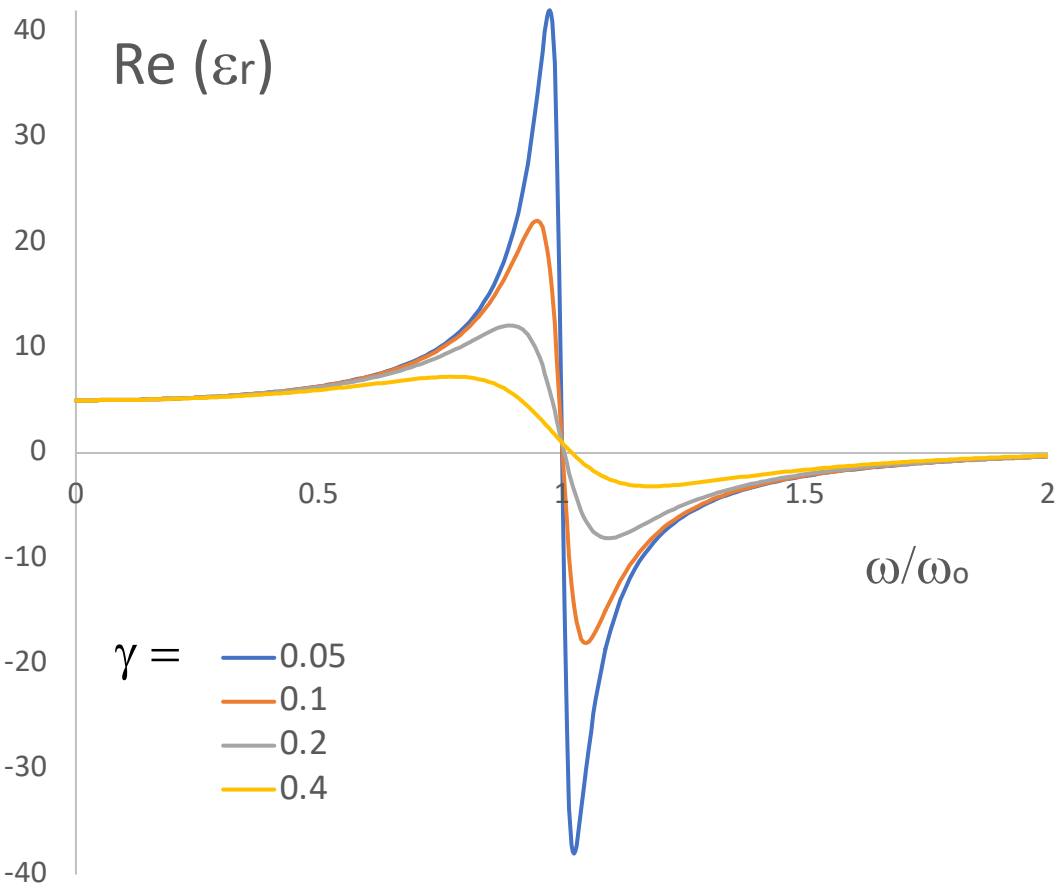
- L'indice est donc complexe: $n^2(\omega) = n'^2(\omega) + in''^2(\omega) = \left[1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \right] + i \frac{\omega_p^2 \omega \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}$

- Ce modèle peut aussi être appliqué aux métaux (électrons libres: $\ddot{x} = \frac{F}{m} = \frac{-eE_0 e^{-i\omega t}}{m}$) en mettant: $\omega_0 = \gamma = 0$, ce qui redonne le résultat précédant: $n^2(\omega) = \varepsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ ou: $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$



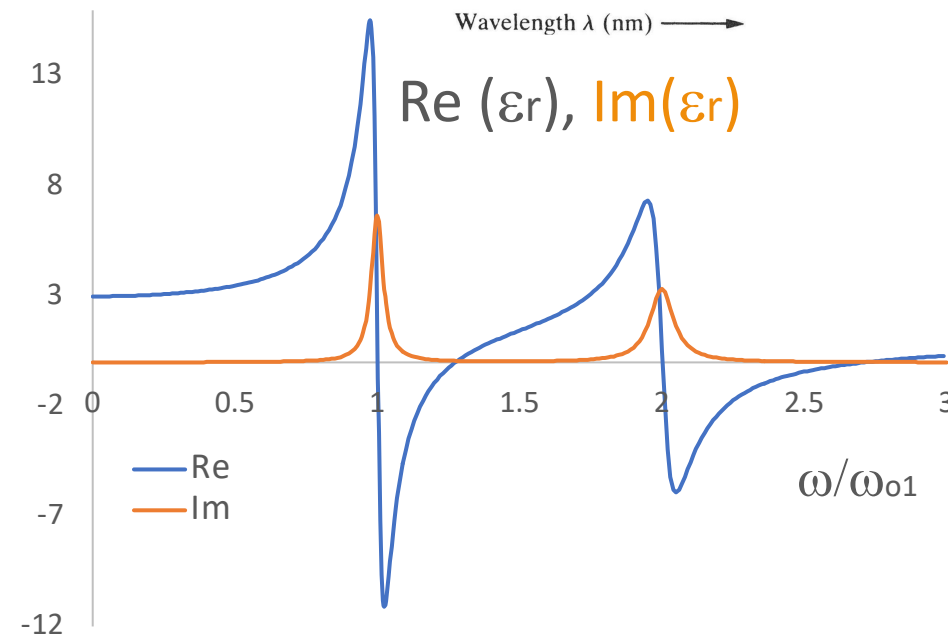
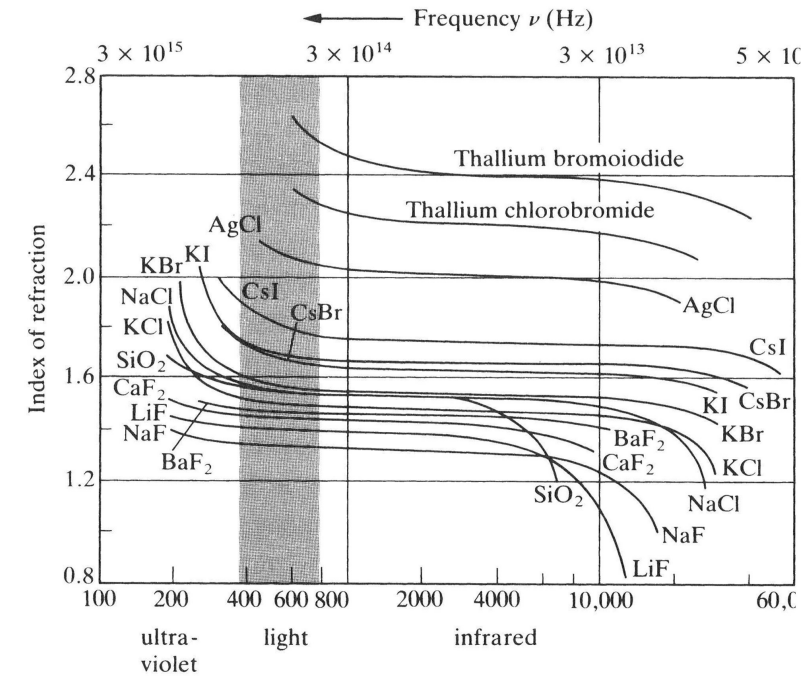
Les propriétés de la susceptibilité

- La susceptibilité : $n^2(\omega) = \epsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}$ a les limites suivantes:
- Pour $\omega=0$, $\text{Re}(\epsilon_r(\omega)) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}$, $\text{Im}(\epsilon_r(\omega)) = 0$.
- Pour $\omega=\omega_0$, $\text{Re}(\epsilon_r(\omega)) = 1$, $\text{Im}(\epsilon_r(\omega)) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0\gamma}$.
- Pour $\omega=\infty$, $\text{Re}(\epsilon_r(\omega)) = 1$, $\text{Im}(\epsilon_r(\omega)) = 0$.



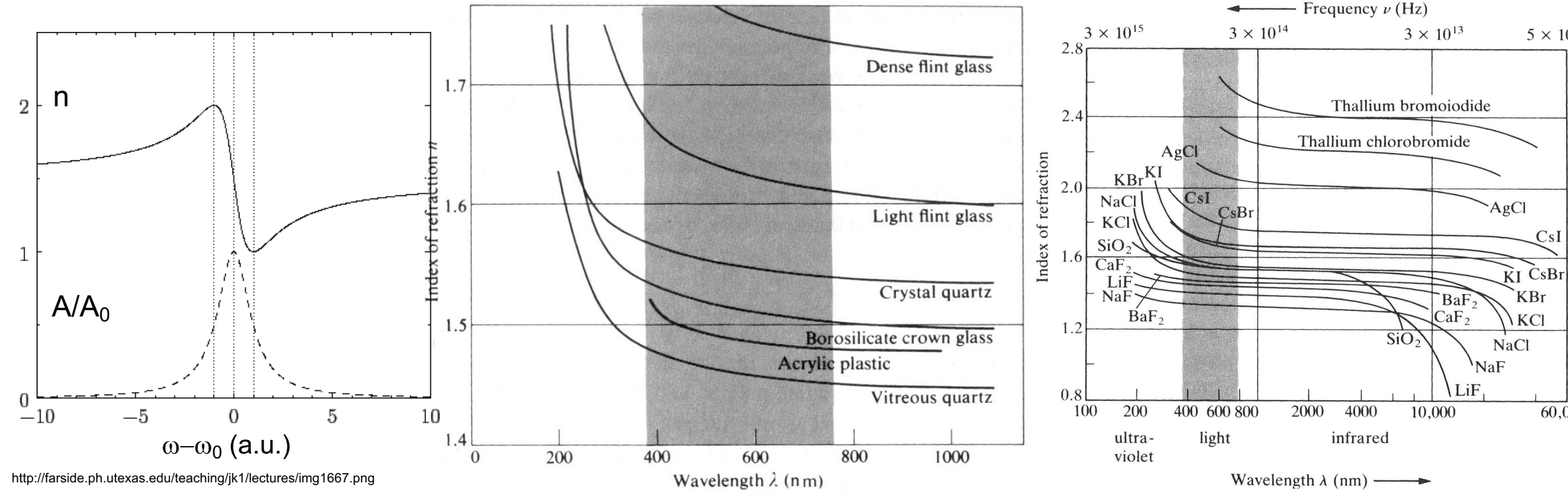
La force d'oscillateur et la formule de Sellmeier

- Dans beaucoup de matériaux, il y a plusieurs résonances, chacune avec ses propriétés (densité d'électrons, fréquence de résonance et amortissement).
- La susceptibilité totale est la somme des contribution de ces oscillateurs: $n^2(\omega) = \epsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{N_j e^2 / \epsilon_0 m}{\omega_{0,j}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j}$.
- En définissant la **force d'oscillateur** de chaque résonance: $f_j = N_j/N$ (N =nombre total des électrons), nous pouvons réécrire la susceptibilité totale: $n^2(\omega) = \epsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega) = 1 + \omega_p^2 \sum_{j=1}^n \frac{f_j}{\omega_{0,j}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j}$.
- Exemple, avec des fréquences normalisées par $\omega_{01} : \omega_p=2, \omega_{01}=1, \gamma_1=0.05, f_1=1/3, \omega_{02}=2, \gamma_2=0.1, f_2=2/3$:
- La **formule empirique de Sellmeier**: $n^2(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^N \frac{B_j \lambda^2}{\lambda^2 - C_j}$ est dérivée de ce modèle. Pour chaque résonance (j), B_j = la force d'oscillateur et $\sqrt{C_j}$ = la longueur d'onde de la résonance. Souvent pour les verres on utilise $N=3$, pour couvrir la gamme UV-VIS-IR.
- Valeurs typiques (verre BK7): $\sqrt{C_j} = 80 \text{ nm}, 140 \text{ nm}, 10 \mu\text{m}$.



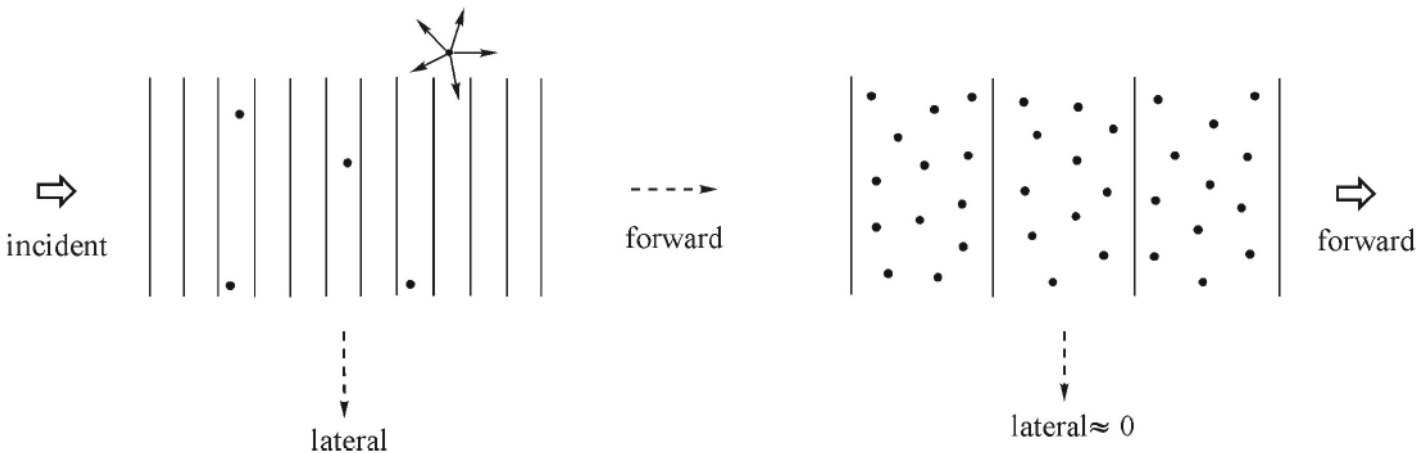
La dispersion normale, anormale

- Nous avons vu la dépendance $n(\omega)$, ou $n(\lambda)$, qui s'appelle la **dispersion**.
- Quand n **augmente** avec ω (diminue avec λ), c'est la **dispersion normale**. C'est le cas hors résonance, p. ex. les verres dans la gamme de lumière visible.
- A proximité d'une résonance (p. ex. les verres dans l'UV), la tendance s'inverse, c'est la **dispersion anormale**. Elle est couplé avec une absorption élevée! (c'est une conséquence des relations de Kramers-Kronig)

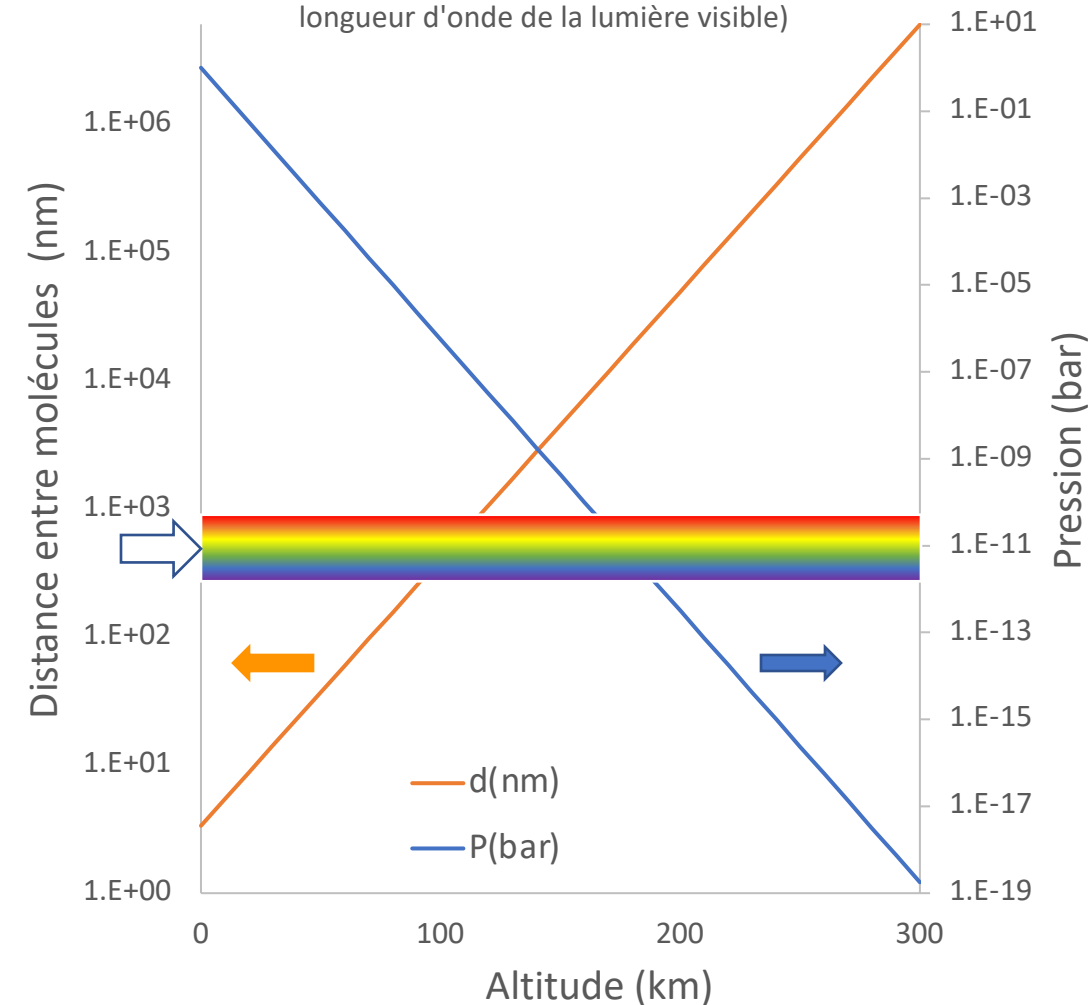


La diffusion et la dispersion – même modèle atomique

- Dans l'atmosphère, au-delà de 100 km, la distance entre molécules est $\gg \lambda$. En conséquence:
 - La majorité de la lumière passe à travers l'atmosphère sans diffusion, l'indice de réfraction est très proche de 1.
 - Les événements de diffusion latérale sont rare et sans cohérence entre elles. La lumière diffusée est donc très faible (10^{-6}).
- Dans les solides / liquides, la distance entre molécule est $\ll \lambda$ (quelques nm). En conséquence:
 - Il n'y a pas de diffusion latérale (interférence destructrice entre les contributions des molécules sur une distance de λ).
 - Les molécules excitées ajoutent une contribution déphasée (due à leur polarisation) qui se manifeste par l'indice de réfraction.



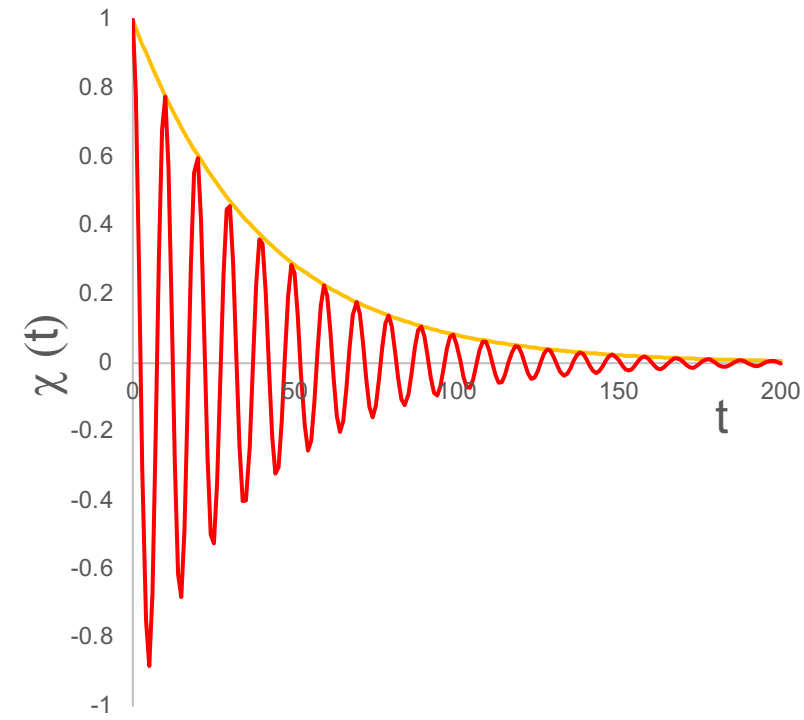
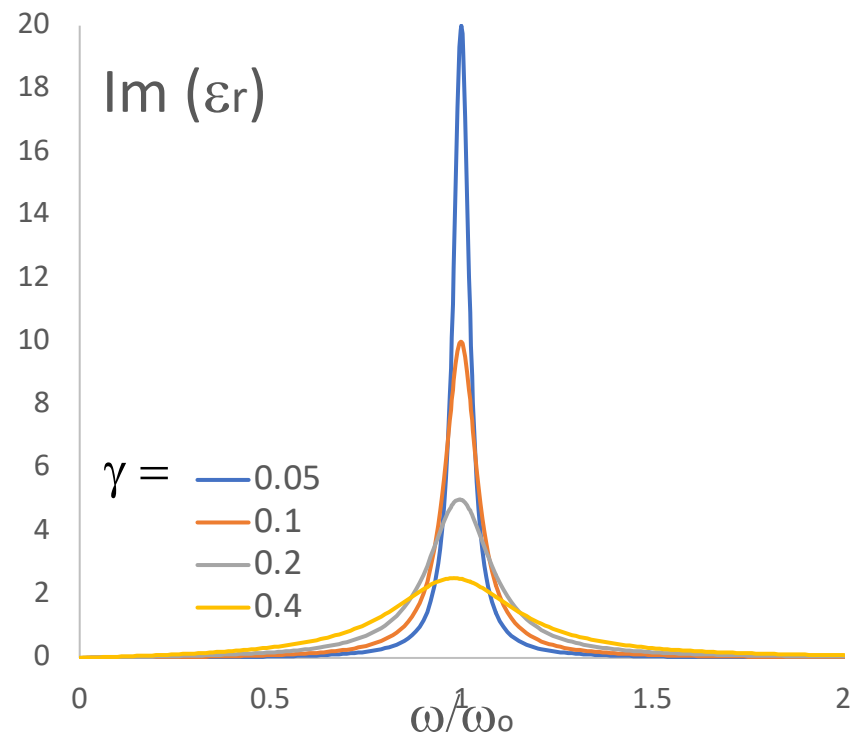
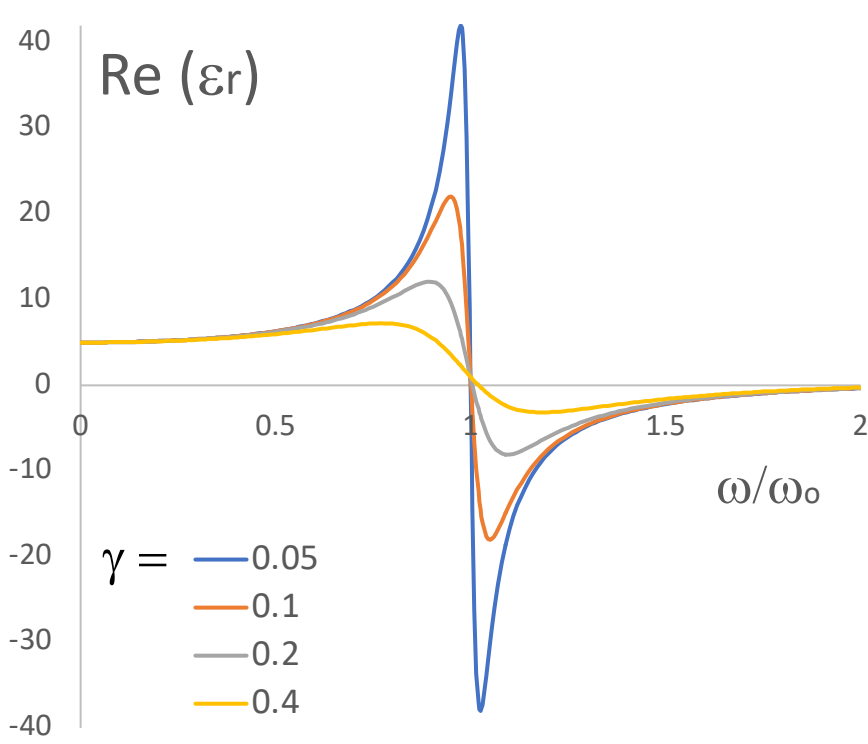
Pression atmosphérique et distance entre molécules (la flèche donne la gamme de longueur d'onde de la lumière visible)



Bonus: Lien avec le modèle dispersif (ch.1)

- Notre modèle atomique donne: $\chi(\omega) = \frac{e^2 N / \epsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$.
- Nous avons vu au ch.1 le modèle dispersif: $\mathbf{P}(t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t dt' \chi(t-t') \mathbf{E}(t')$.
- Pour faire le lien avec le modèle atomique, on peut calculer $\chi(t)$ pour notre modèle en appliquant la transformée de

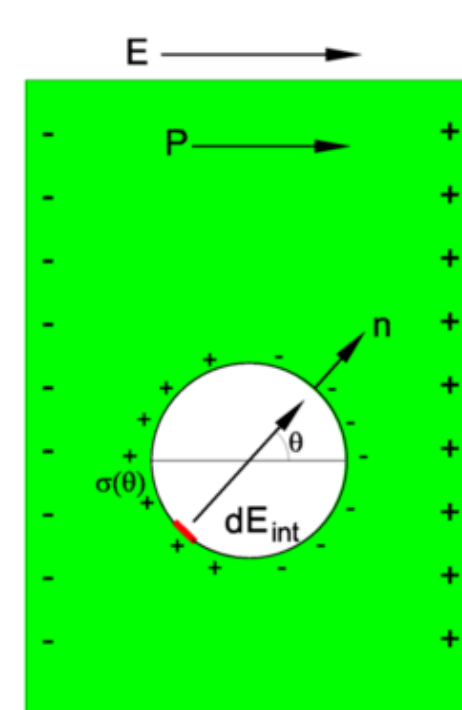
Fourier, ce qui donne: $\chi(t) = \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m} e^{-\frac{\sigma}{2}t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \sigma_0^2/4} t\right)$



Bonus: le modèle de Clausius-Mossotti / Lorentz-Lorenz (1)

- C'est un modèle amélioré, pour traiter la **matière dense** où la polarisation d'un atome est aussi influencée par celle de ses voisins, qui donnent un champ "interne" E_{int} , en plus du champ "externe" E : $p_0 \equiv \alpha E_{\text{tot}} = \alpha(E + E_{\text{int}})$. Pour notre modèle de résonance: $\alpha = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$. La polarisation totale est donc: $P = Np_0 = N\alpha E_{\text{tot}}$
- Pour calculer P , on divise l'espace en deux parties, par une petite "sphère d'influence" (des atomes voisins).
- En dehors de la sphère, la polarisation est constante (P). A l'intérieur, l'influence des autres atomes se neutralise mutuellement par la symétrie sphérique; on peut donc regarder cette sphère comme vide.
- La polarisation de la matière externe induit des charges sur le bord de la sphère, leur densité est: $\sigma(\theta) = -P\cos(\theta)$.
- La contribution des charges au champ électrique est: $E_{\text{int},z} = \iint \frac{\sigma \cdot \hat{n}}{4\pi\epsilon_0 r^2} d\Omega = \iint \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta d\Omega$ (z=axe de la polarisation), ce qui donne:

$$E_{\text{int},z} = \iint \frac{P \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \iint \cos^2\theta \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{P}{3\epsilon_0}$$
- On a donc: $E_{\text{tot}} = \frac{P}{N\alpha} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}$, ou: $P = \epsilon_0 \chi E = \frac{N\alpha}{1 - N\alpha/3\epsilon_0} E$
- En utilisant $\epsilon = 1 + \chi$ nous obtenons: $\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}$.
- Ce sont les relations de Clausius-Mossotti, ou Lorentz-Lorenz.

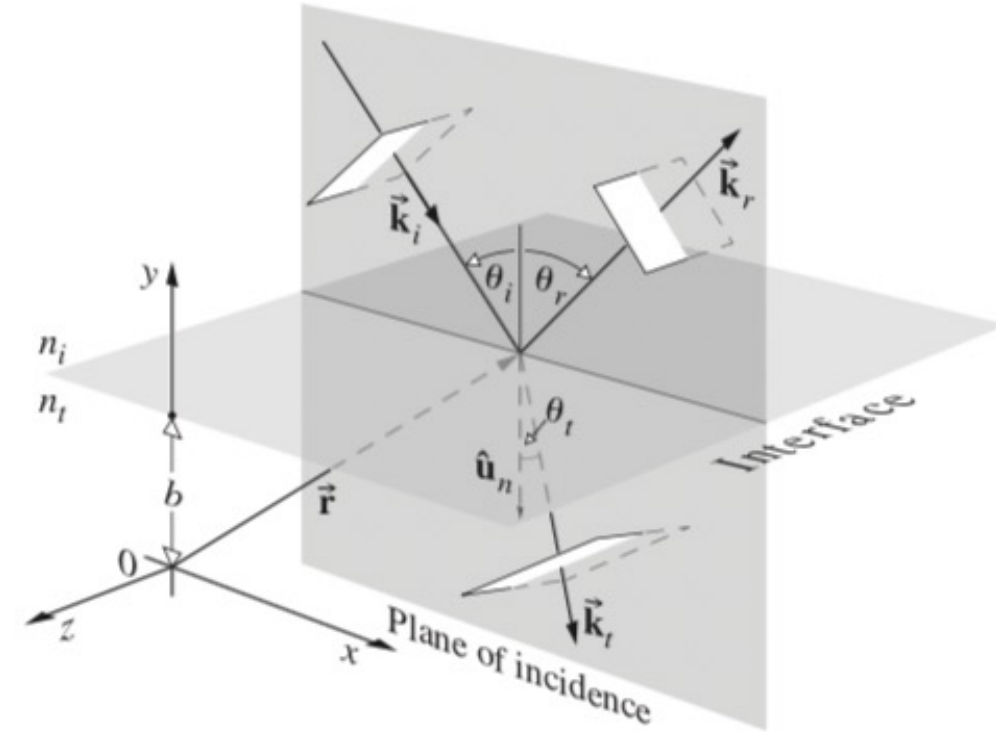


Bonus: le modèle de Clausius-Mossotti / Lorentz-Lorenz (2)

- Les relations de Clausius-Mossotti: $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = \frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}$ sont encore améliorées par Onsager (1958), qui tient compte du volume partiel occupé par les atomes dans les cristaux. Son calcul donne: $\frac{N\alpha}{3\varepsilon_0 x} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2+9\varepsilon\frac{x-1}{2\varepsilon+1}} = \frac{n^2-1}{n^2+2+9\varepsilon\frac{x-1}{2\varepsilon+1}}$, où $x = \frac{4\pi}{3}a^3N$ est le rapport entre la taille de l'atome et le volume qu'il occupe dans la matière ($x=1$ amène à la relation précédant de Clausius-Mossotti).
- Comme pour le modèle simple, quand il y a plusieurs résonances, nous avons: $\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_j}$ avec les forces d'oscillateur f_j .

(3b) Réfraction et réflexion: interface entre diélectriques

- Une onde incidente: $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0i} \cos(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)$ qui arrive sur une **interface** entre deux milieux diélectriques (sans magnétisme, absorption, charges libres, ou courants) avec des indices différents n_1, n_2 : une partie est réfléchie et l'autre est transmise.
- Nous définissons le **plan d'incidence**: plan perpendiculaire à l'interface et incluant le vecteur $\mathbf{k}_i$



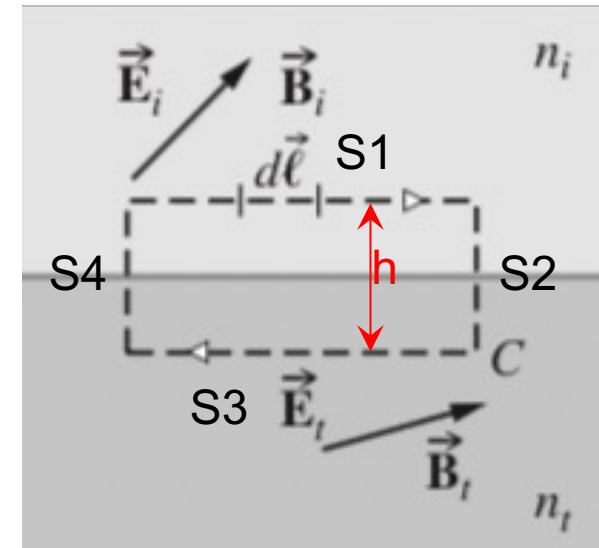
- Nous utilisons la **continuité des champs parallèles à l'interface**:

$$\mathbf{E}_{\parallel 1} = \mathbf{E}_{\parallel 2} , \mathbf{H}_{\parallel 1} = \mathbf{H}_{\parallel 2} .$$

Cela vient des équations de Maxwell (en forme intégrale):

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} , \oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) \cdot d\mathbf{A}$$

- P. ex. pour $\mathbf{E}$, sur le chemin dans le dessin: $\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{s1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{s2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{s3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{s4} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{s1} \mathbf{E}_{\parallel} d\mathbf{l} - \int_{s2} \mathbf{E}_{\perp} d\mathbf{l} - \int_{s3} \mathbf{E}_{\parallel} d\mathbf{l} + \int_{s4} \mathbf{E}_{\perp} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} .$
- Dans la limite $h \rightarrow 0$, nous obtenons: $-\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \rightarrow 0$, $\int_{s2} \mathbf{E}_{\perp} d\mathbf{l} \rightarrow 0$, $\int_{s4} \mathbf{E}_{\perp} d\mathbf{l} \rightarrow 0$, donc: $\int_{s1} \mathbf{E}_{\parallel} d\mathbf{l} = \int_{s3} \mathbf{E}_{\parallel} d\mathbf{l}$. Les chemins S1, S3 sont les mêmes des deux cotés de l'interface. Cela ne dépend pas de la longueur, donc: $\mathbf{E}_{\parallel 1} = \mathbf{E}_{\parallel 2}$.
- Le même argument pour le champ magnétique donne: $\mathbf{H}_{\parallel 1} = \mathbf{H}_{\parallel 2}$.



Continuité des champs: conséquences pour $\omega, \mathbf{k}$

- Supposons des ondes les plus générales :

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0i} \cos(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)$$

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0r} \cos(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \varphi_r)$$

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0t} \cos(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \varphi_t)$$

- La continuité de la partie parallèle de $\mathbf{E}$ s'écrit: $\hat{\mathbf{u}}_n \times (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) = \hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_t$.
- Pour que cela tienne pour tout $t, \mathbf{r}$, il faut que les arguments des cosinus soient égaux à l'interface:

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \equiv \omega \quad \text{ET} \quad \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} + \varphi_r = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} + \varphi_t$$

- Pour la réflexion, ces relations donnent:

- $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_r| = n_i \omega / c$

- $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r} = \varphi_r = 0$ (valable pour tout $\mathbf{r}$), ou: $k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r \Rightarrow \theta_i = \theta_r$ (loi de la réflexion).

- Pour la transmission:

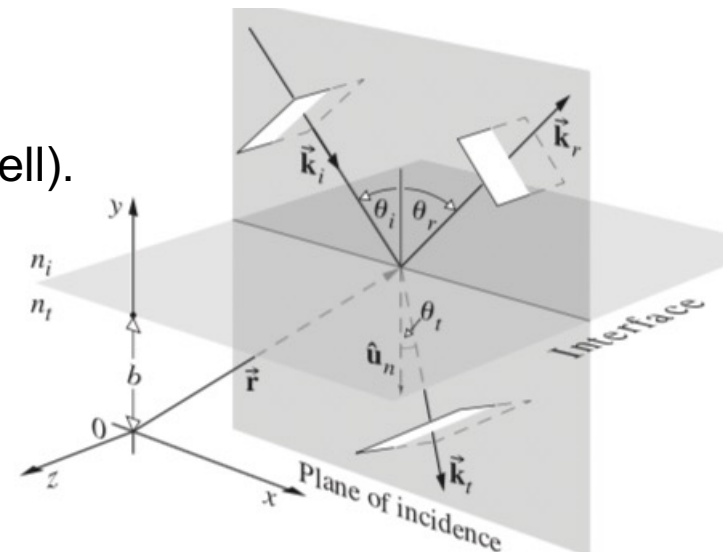
- $|\mathbf{k}_{i,t}| = \frac{n_{i,t} \omega}{c}$

- $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t) \cdot \mathbf{r} = \varphi_t = 0$, ou: $k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t \Rightarrow n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$ (loi de Snell).

- Pour les amplitudes $\mathbf{E}_r, \mathbf{E}_t$, on va analyser deux configurations:

TE (s, σ): $\mathbf{E}$ est **perpendiculaire** au plan d'incidence (parallèle à l'interface)

TM (p, π): $\mathbf{E}$ est **parallèle** au plan d'incidence (perpendiculaire à l'interface)



Les équations de Fresnel: la transmission et la réflexion pour l'onde TE (s)

- Le champ $\mathbf{E}$ est parallèle à l'interface; sa continuité donne: $\mathbf{E}_{0i} + \mathbf{E}_{0r} = \mathbf{E}_{0t}$
- La continuité de la partie parallèle de $\mathbf{H}$ donne: $-\frac{B_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{B_r}{\mu_r} \cos \theta_r = -\frac{B_t}{\mu_t} \cos \theta_t$
- Pour des ondes planes on a: $E_0 = \frac{c}{n} B_0$; cela donne:

$$\frac{n_i}{\mu_i} (E_{0i} - E_{0r}) \cos \theta_i = \frac{n_t}{\mu_t} E_{0t} \cos \theta_t$$

- Ces deux équations donnent les coefficients de réflexion et de réfraction:

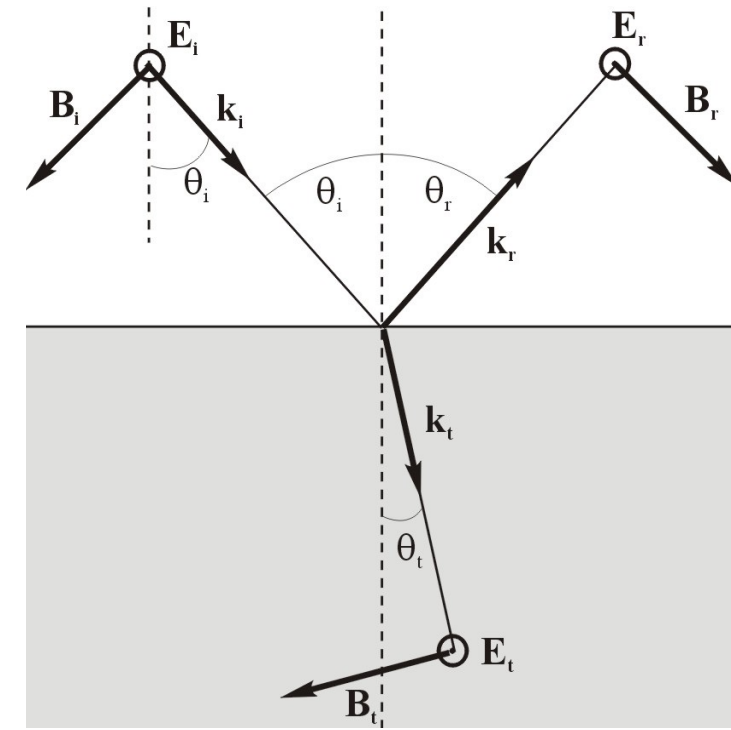
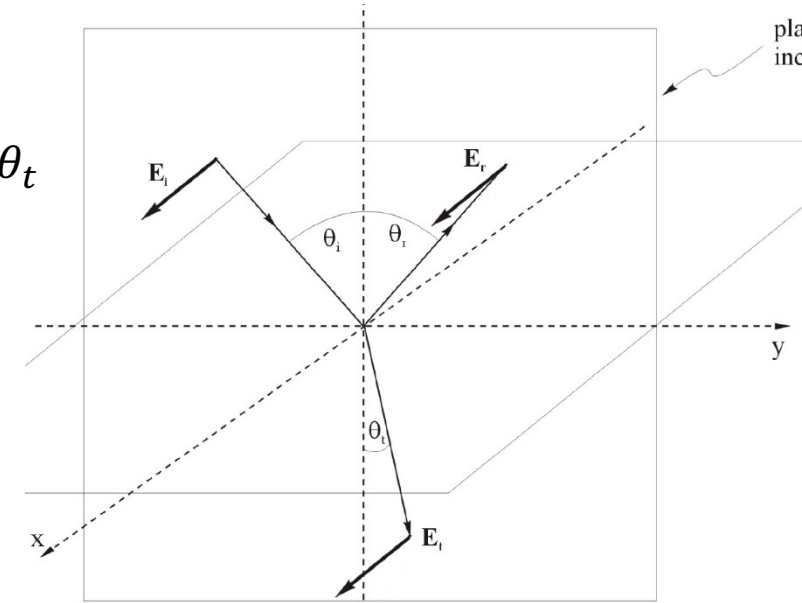
$$r_{\perp} \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right) = \frac{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i - \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t}$$

$$t_{\perp} \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right) = \frac{2 \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t} = 1 + r_{\perp}$$

- Pour $\mu_{i,t}=1$ on peut éliminer $n_{i,t}$ en utilisant la loi de Snell, pour obtenir:

$$r_{\perp} = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)}$$

$$t_{\perp} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_t + \theta_i)}$$



Les équations de Fresnel: la transmission et la réflexion pour l'onde TM (p)

- La continuité de la partie parallèle de $\mathbf{E}$ donne: $E_{0i} \cos \theta_i - E_{0r} \cos \theta_r = E_{0t} \cos \theta_t$
- Le champ $\mathbf{H}$ est parallèle à l'interface; sa continuité donne: $\mathbf{H}_{0i} + \mathbf{H}_{0r} = \mathbf{H}_{0t}$
- Pour des ondes planes on a: $E_0 = \frac{c}{n} B_0$; cela donne:

$$\frac{n_i}{\mu_i} (E_{0i} + E_{0r}) = \frac{n_t}{\mu_t} E_{0t}$$

- Ces deux équations donnent les coefficients de réflexion et de réfraction:

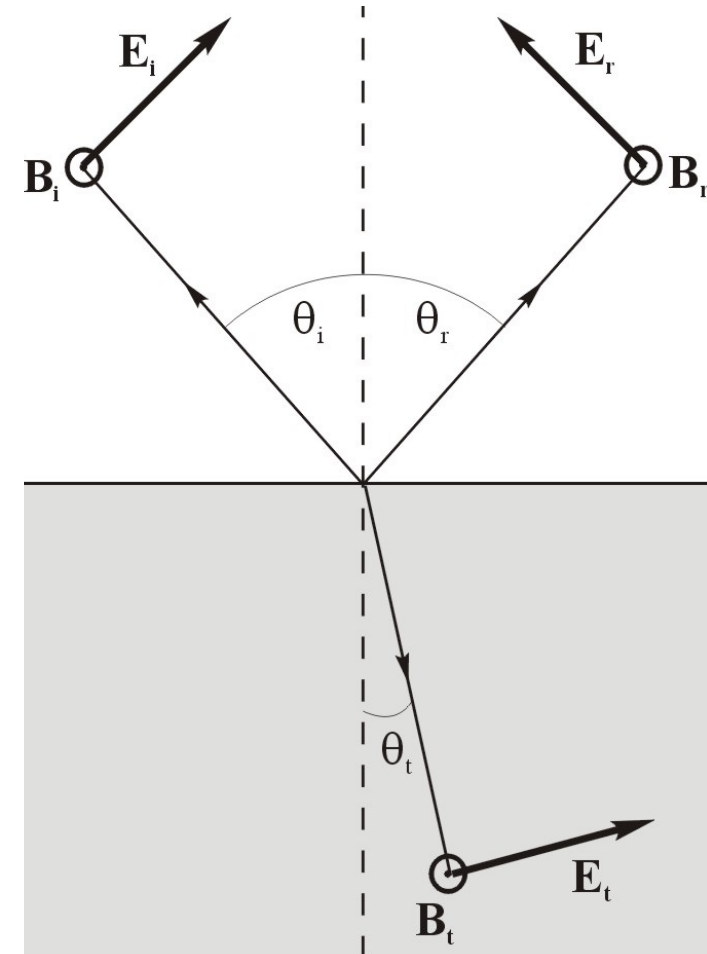
$$r_{\parallel} \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right) = \frac{\frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_i - \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_t}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_t + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_i}$$

$$t_{\parallel} \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right) = \frac{2 \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_t + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_i}$$

- Pour $\mu_{i,t}=1$ on peut éliminer $n_{i,t}$ en utilisant la loi de Snell, pour obtenir:

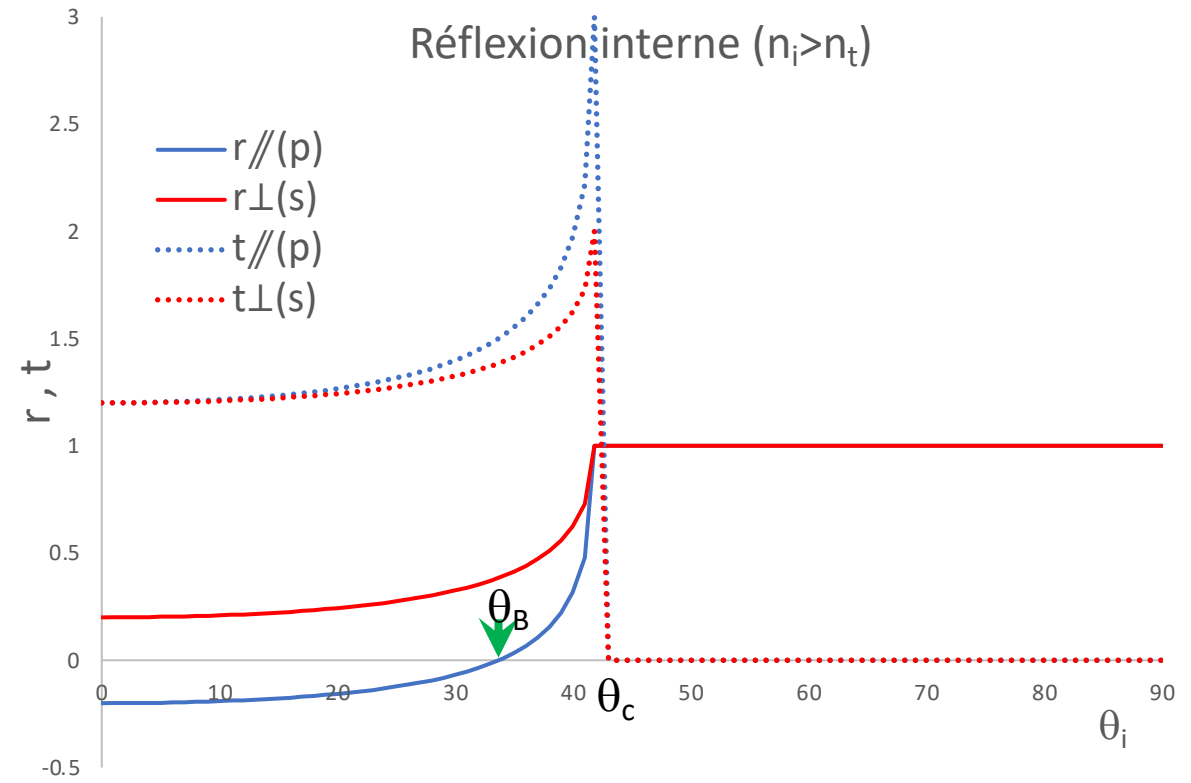
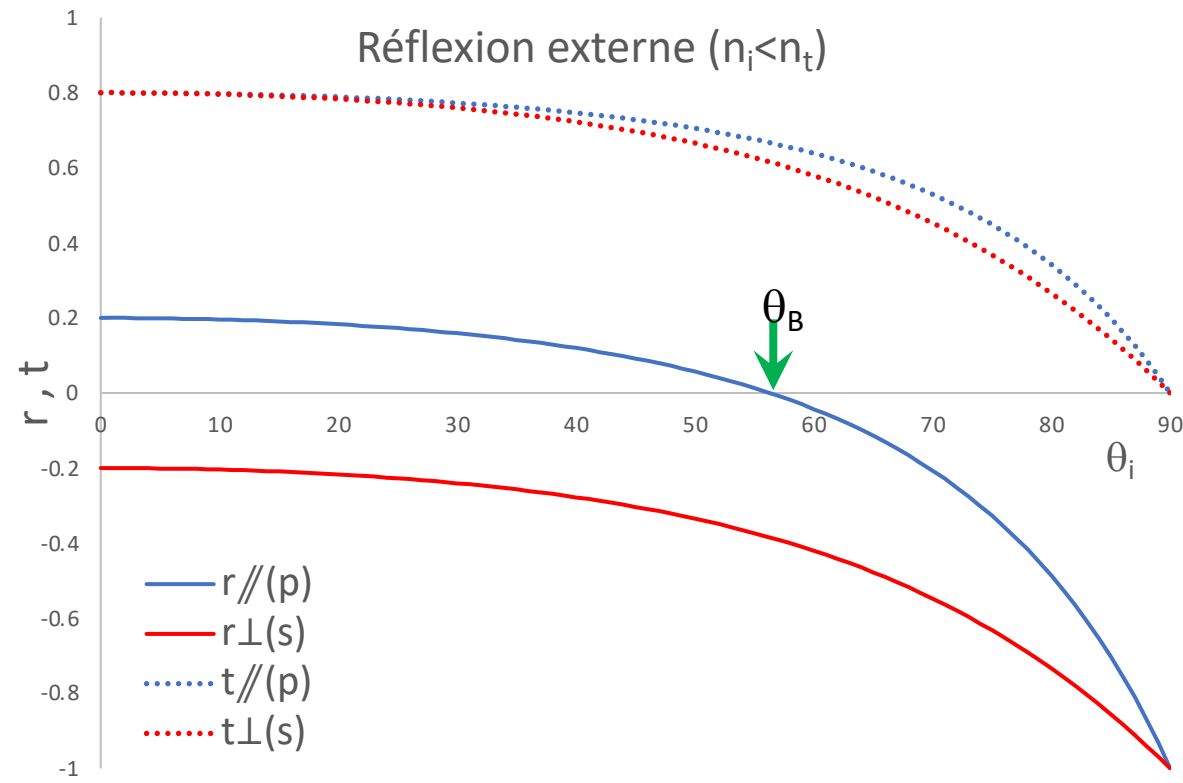
$$r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

$$t_{\parallel} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}$$



Résumé de la transmission et de la réflexion

- Incidence normale ($\theta_i = \theta_t = 0$): $r_{\parallel} = -r_{\perp} = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}$, $t_{\parallel} = t_{\perp} = \frac{2n_i}{n_t + n_i}$
- Cela donne: $t_{\parallel} + r_{\parallel} = t_{\perp} - r_{\perp} = 1$
- $r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} = 0$ à l'angle de Brewster où: $\theta_i + \theta_t = \pi/2$. En utilisant la loi de Snell: $n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t = n_t \cos \theta_i$, ou: $\tan(\theta_B) = n_t/n_i$. Pour cet angle, seul l'onde perpendiculaire est réfléchi.
- Pour $n_t > n_i$, en incidence rasante, $r = -1$, $t = 0$; l'interface devient un miroir
- Pour $n_t < n_i$, si: $\sin \theta_i > \frac{n_t}{n_i} \equiv \sin \theta_c$, il n'y a pas de transmission (TIR = Total Internal Reflection)

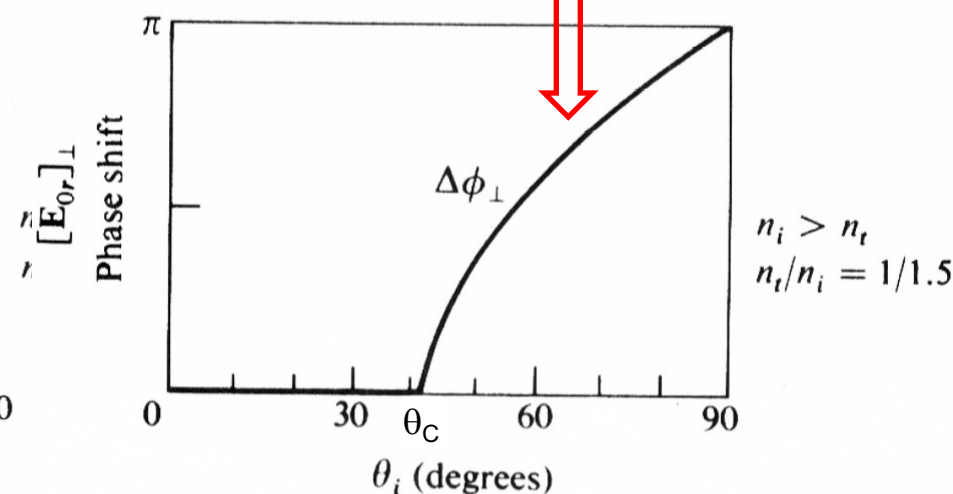
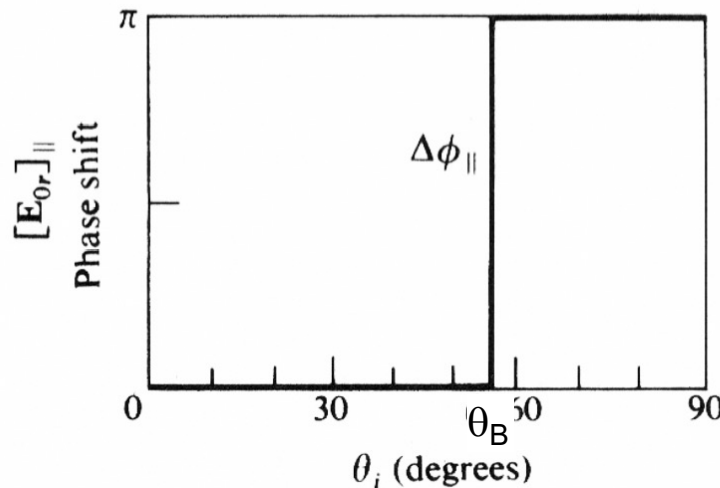
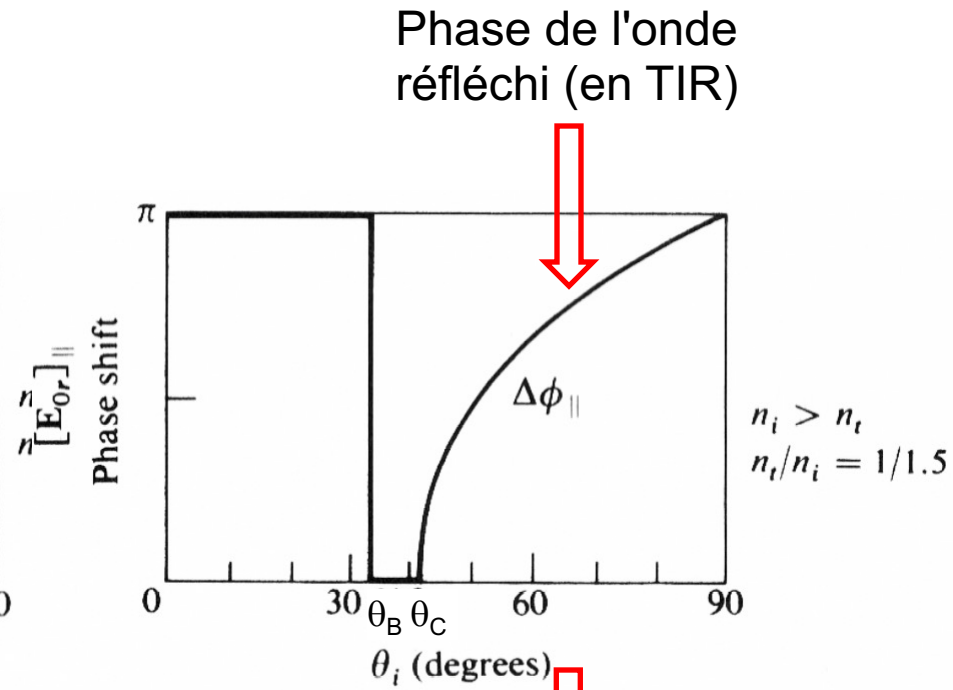
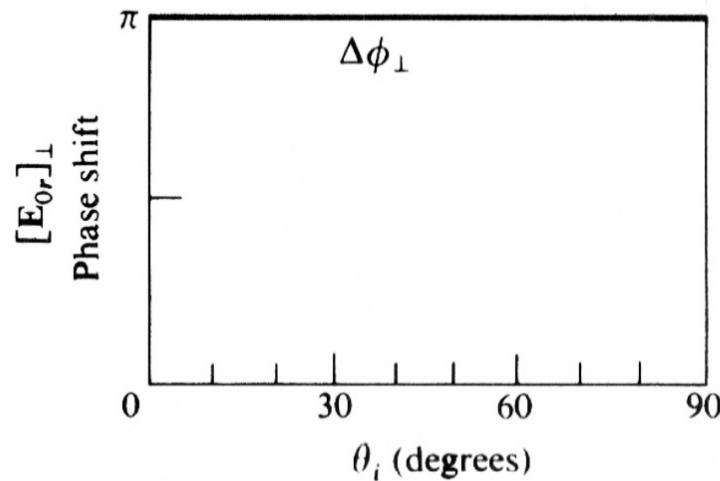


La phase de la réflexion

- On distingue entre la réflexion **externe** ($n_t > n_i$) et **interne** ($n_t < n_i$).
- A l'angle de Brewster, seul l'onde perpendiculaire est réfléchi.
- L'onde réfléchi "gagne" une phase de π ($r < 0$) dans les cas suivants:
 - TE ($p, \perp$) , $n_t > n_i$
 - TM ($s, \parallel$) , $n_t > n_i$, $\theta_i > \theta_B$
 - TM ($s, \parallel$) , $n_t < n_i$, $\theta_i < \theta_B$
- L'onde **réfléchi** "gagne" une phase (entre 0 et π) aussi dans le cas du TIR ($\theta > \theta_C$) ! Le calcul (assez complexe) donne (ici: $n^2 \equiv n_t n_i$):

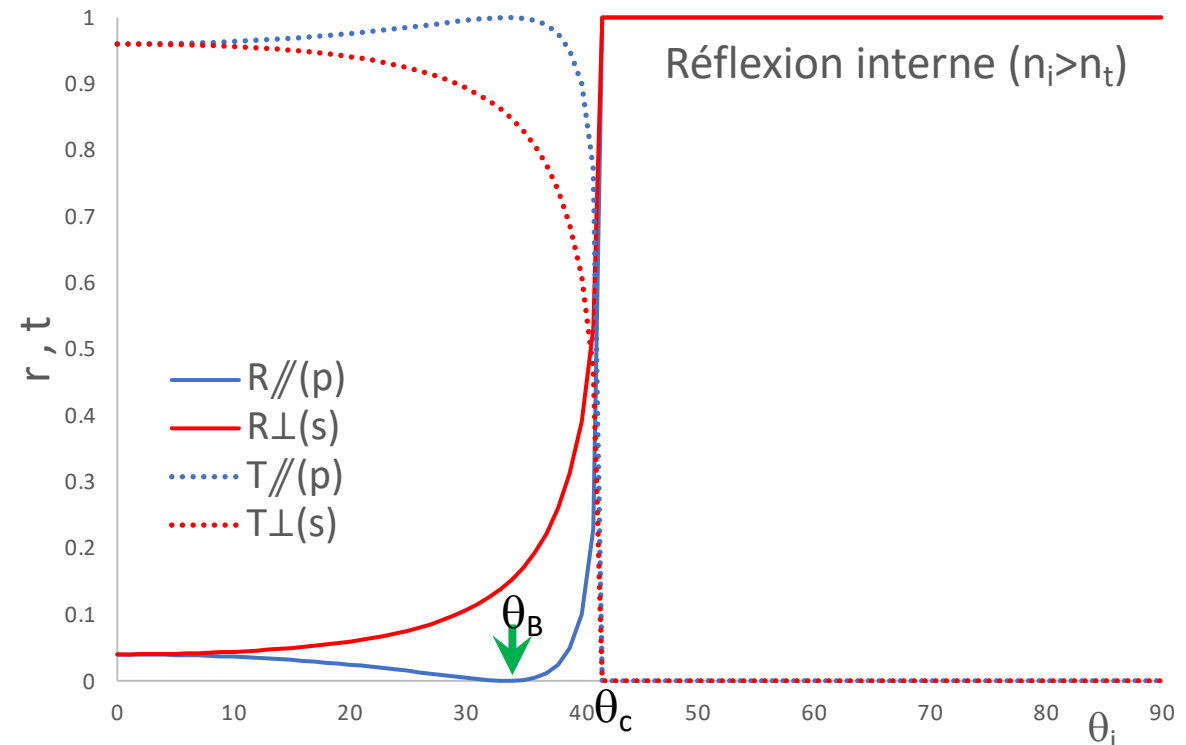
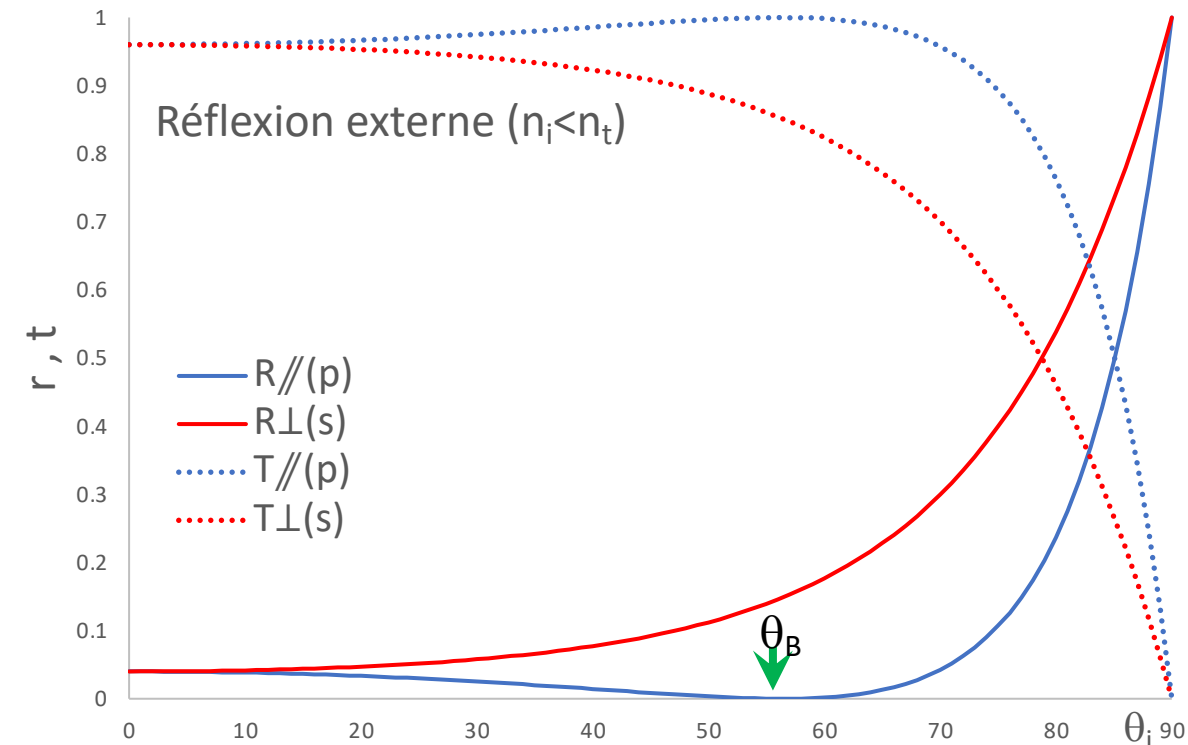
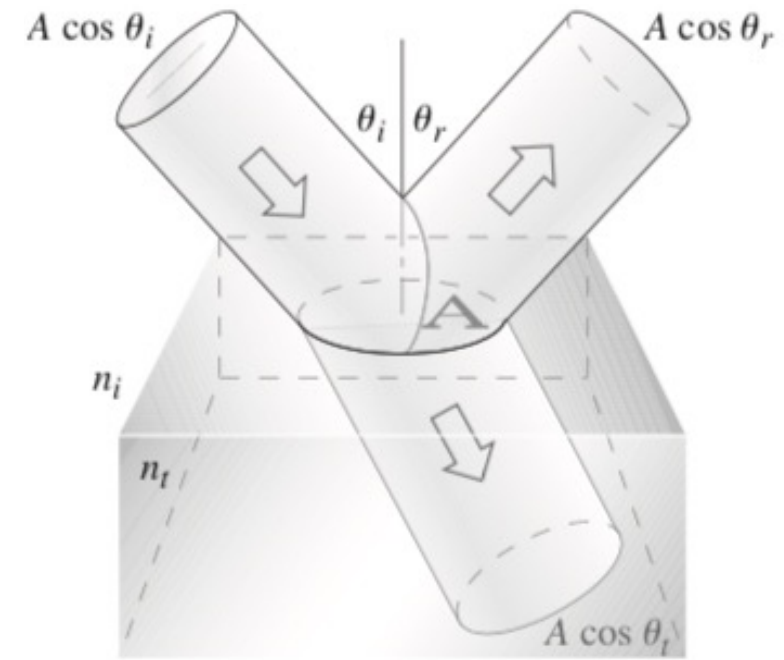
$$\tan \frac{\delta_{\parallel}}{2} = - \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}{n^2 \cos \theta_i}$$

$$\tan \frac{\delta_{\perp}}{2} = - \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}{\cos \theta_i}$$



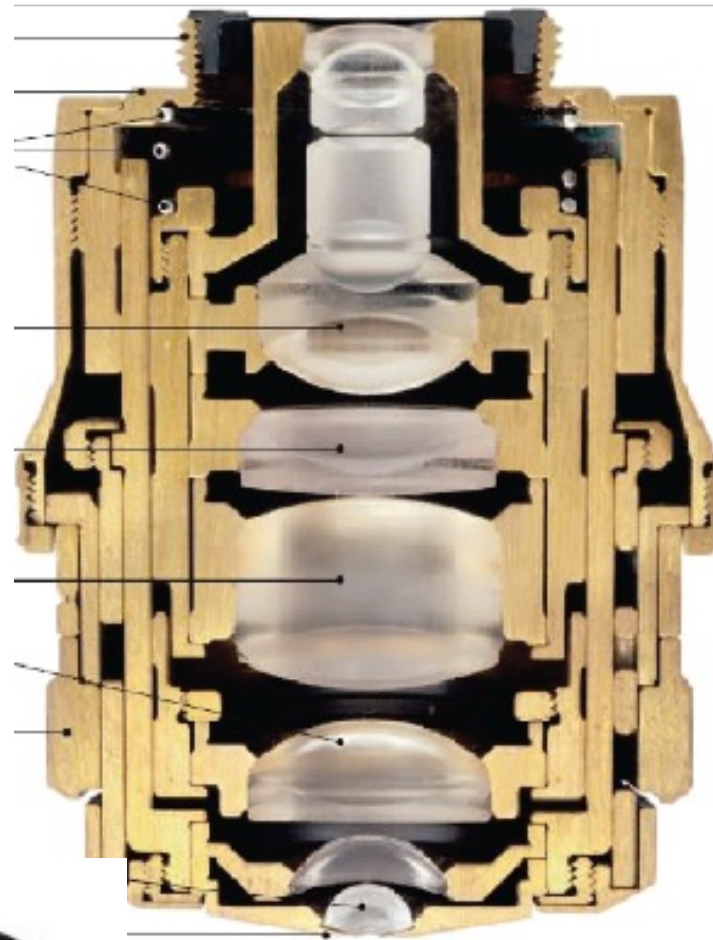
L'intensité de la transmission et de la réflexion

- L'intensité est donné par: $I = \frac{cn\varepsilon_0}{2} E_0^2$.
- Pour la réflexion: $R \equiv \frac{I_r A \cos \theta_r}{I_i A \cos \theta_i} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = r^2$.
- Pour la transmission: $T \equiv \frac{I_t A \cos \theta_t}{I_i A \cos \theta_i} = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} t^2$.
- Conservation de l'énergie: $R+T=1$
- En incidence normale: $R = \left(\frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \right)^2$, $T = \frac{4n_t n_i}{(n_t + n_i)^2}$.
- Dans un verre typique: $n=1.5$, $R=0.04$



Réflexion par des interfaces diélectriques

- Réflexion dans un cadre en verre ... ou à travers d'une vitre (à droite)
- Des objectifs de haute qualité d'appareils-photo ou des microscopes, contiennent des dizaines d'interfaces! Une perte de 4% par interface devient une perte de 70% de la lumière après 30 interfaces (15 éléments optiques, comme dans les deux exemples ici)
- Contre cette perte: des couches antireflets (ch.7)

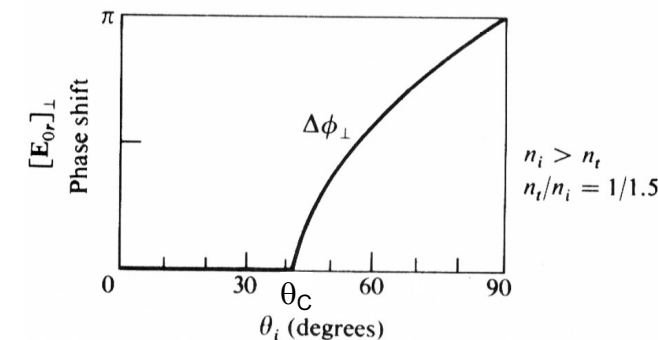
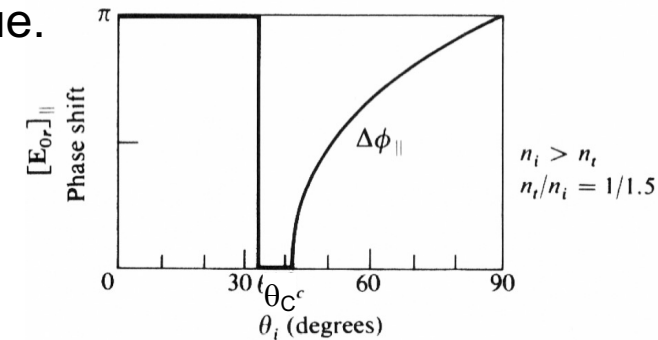
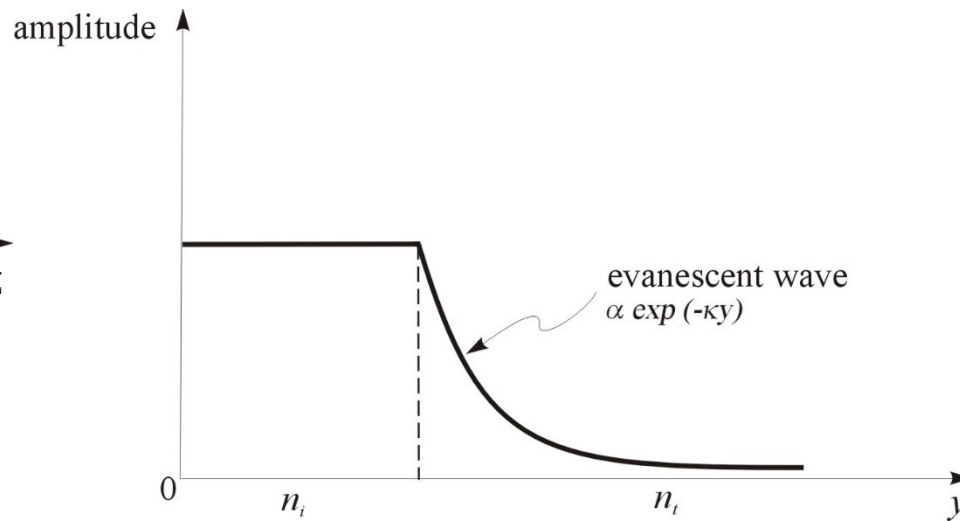
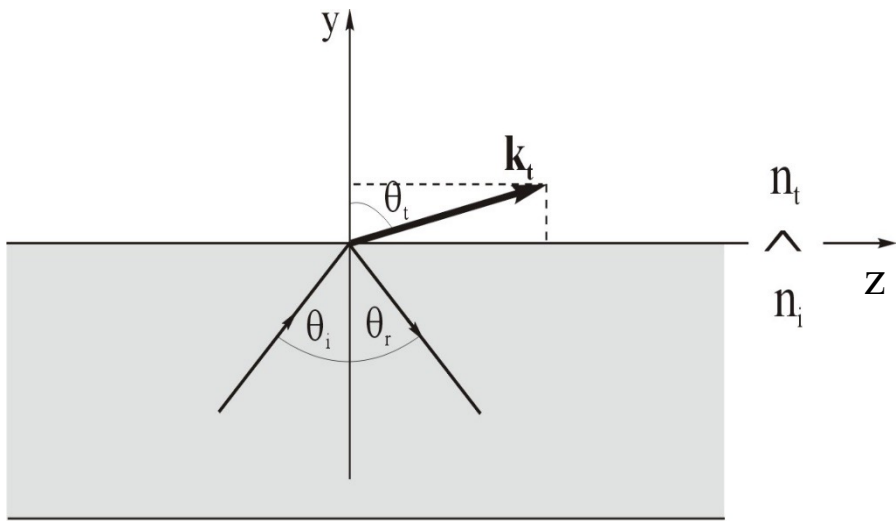


La réflexion interne totale (TIR)

- L'onde transmise par l'interface est: $\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0t} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$
- Nous pouvons décomposer $\mathbf{k}_t$ dans l'exponentiel (on prend $x=0$):

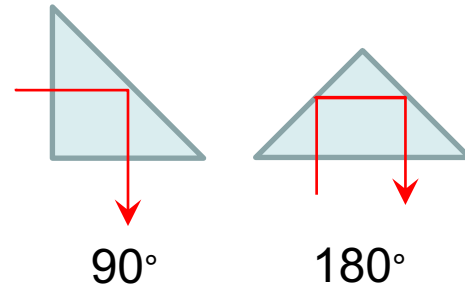
$$\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} = k_z z + k_y y = k_t \sin \theta_t z + k_t \cos \theta_t y = k_t \frac{n_i}{n_t} \sin \theta_i z + k_t \sqrt{1 - \left(\frac{n_i}{n_t} \sin \theta_i\right)^2} y$$

- Dans le cas où $n_t < n_i$, si: $\sin \theta_i > \frac{n_t}{n_i}$, la racine devient imaginaire. Nous définissons: $\kappa_y \equiv k_t \sqrt{\left(\frac{n_i}{n_t} \sin \theta_i\right)^2 - 1}$
- Le champ est donc: $\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0t} e^{-\kappa_y y} e^{ik_z z} e^{-i\omega t}$, et l'intensité: $I_t(\mathbf{r}) = I_{0t} e^{-2\kappa_y y}$. C'est une décroissance exponentielle de l'intensité dans une distance $\Delta y \sim \lambda$.
- Le coefficient de réflexion $R=1$, sans aucune perte! C'est mieux qu'un miroir métallique.
- Même en TIR, la phase de l'onde change avec l'angle!
On peut l'utiliser pour changer la phase sans perte (ch.5).

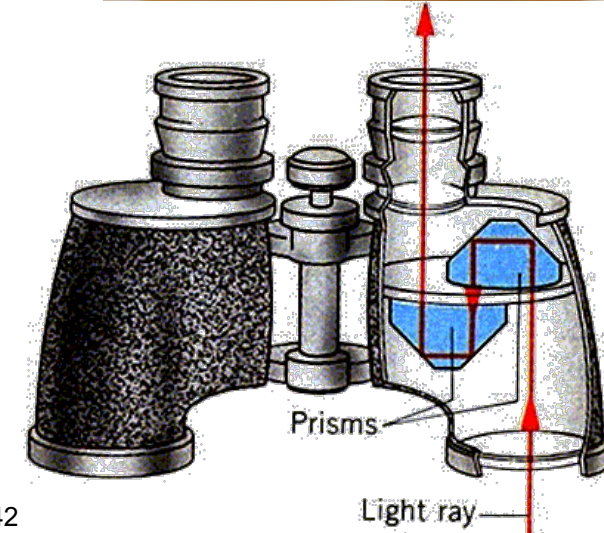
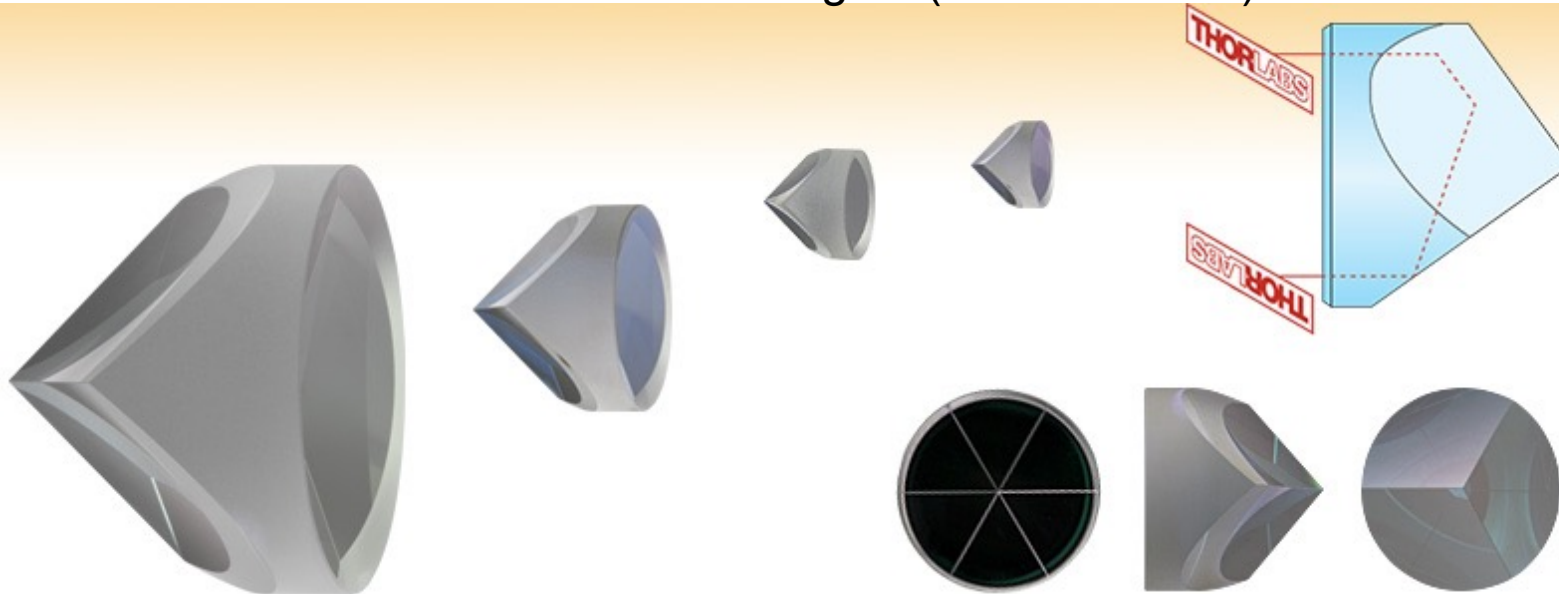


Utilisation du TIR: prisme, retrorélecteur

- Un prisme à 90° peut être utilisé comme miroir de deux manières, pour changer la direction du faisceau de 90° ou de 180° :

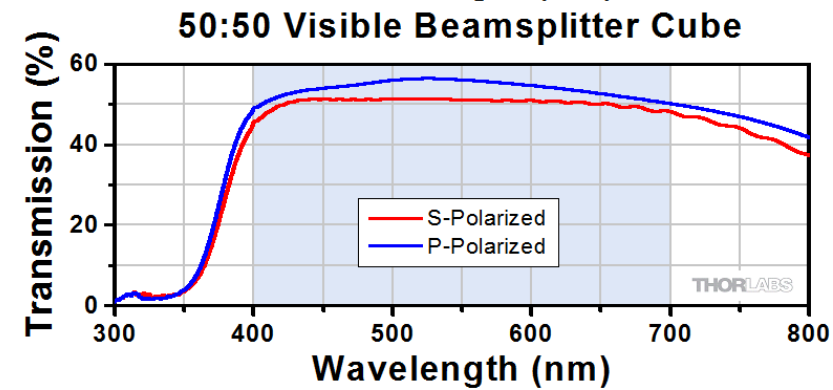
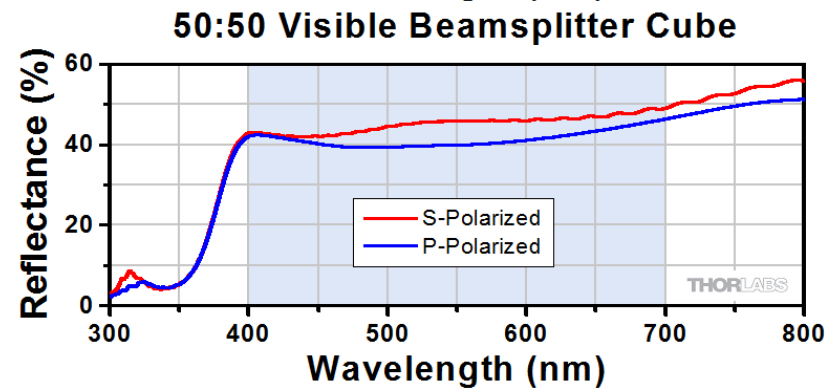
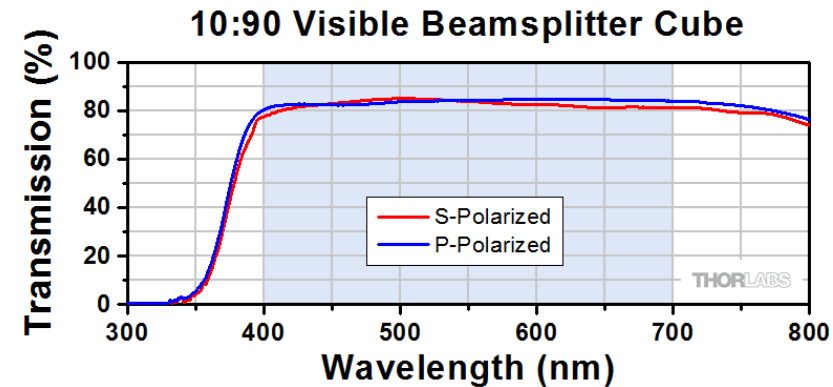
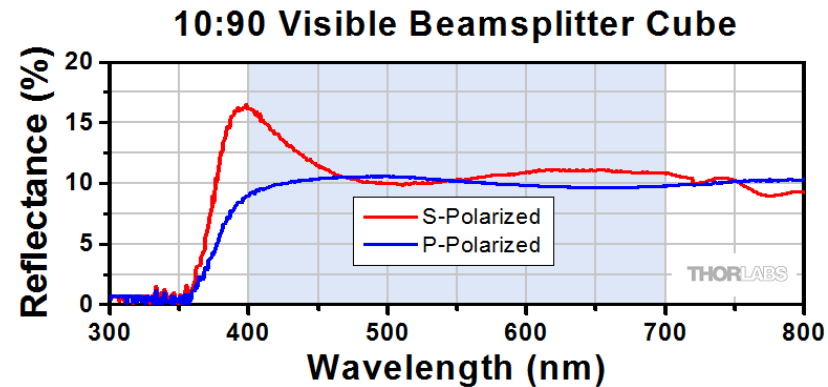
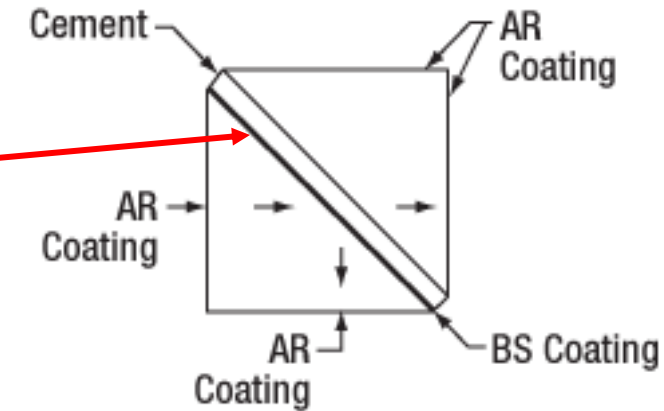
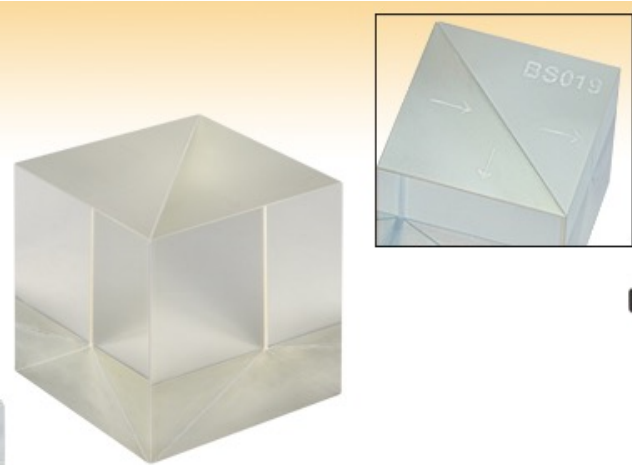
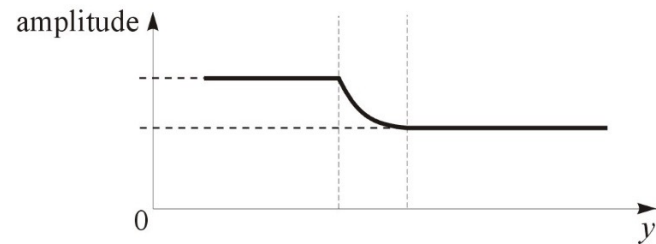
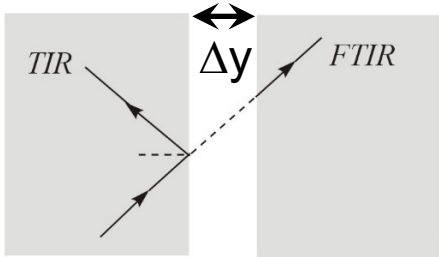


- Utilisation: dans les jumelles, pour diminuer la taille.
- La réflexion est efficace à 100% !
- Un cube réfléchit le faisceau à l'origine (retrorélecteur):



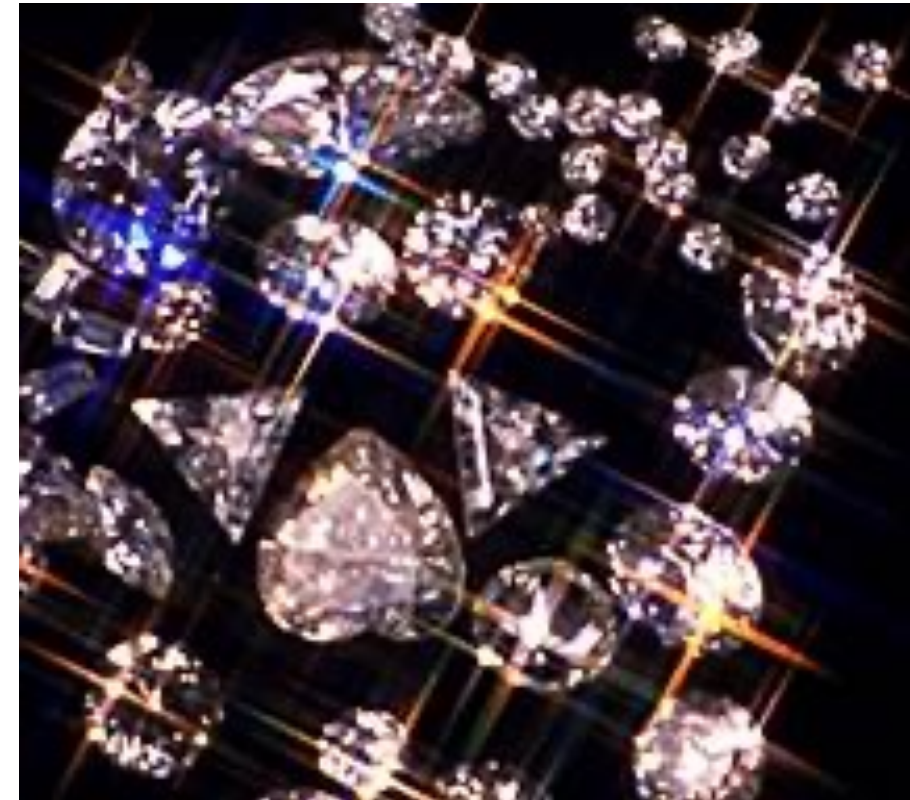
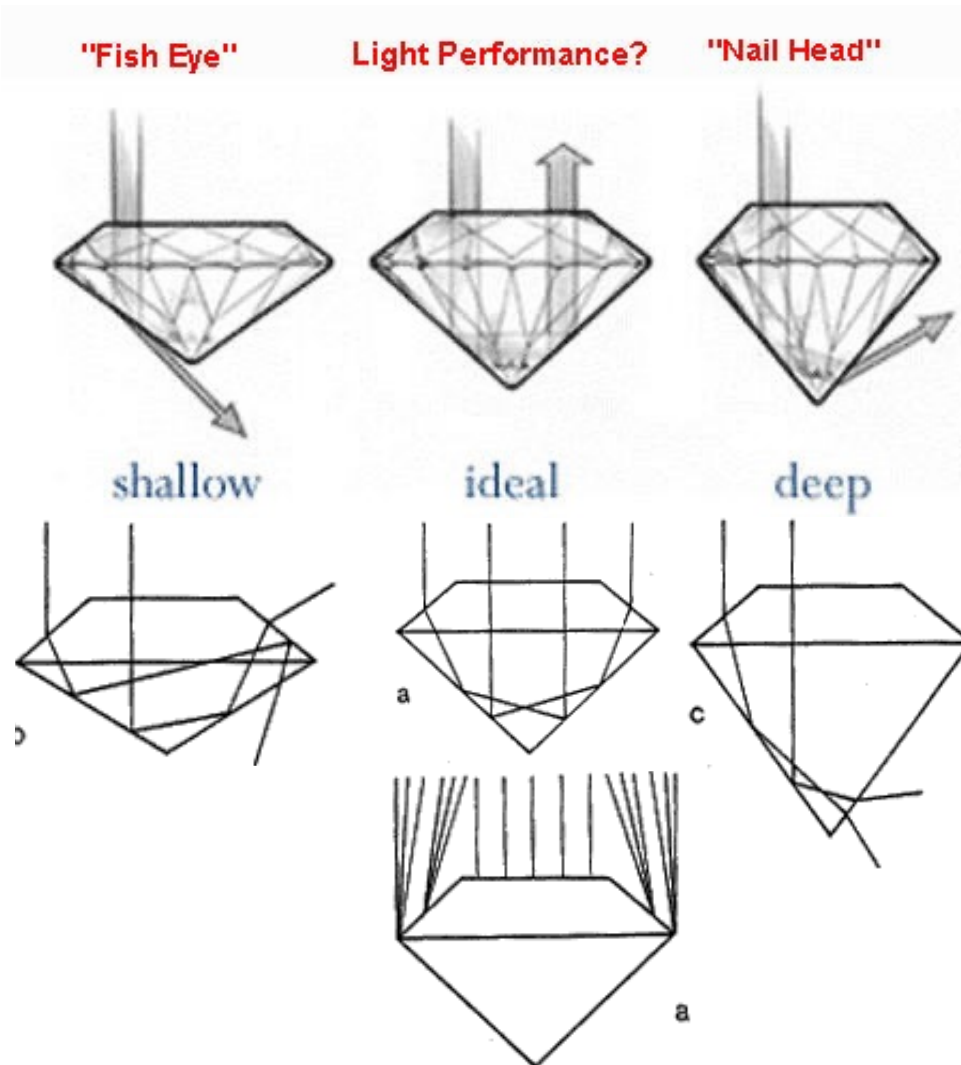
Utilisation du FTIR: diviseur de puissance à prisme

- On peut récupérer une partie de l'intensité par un autre milieu diélectrique, si la distance Δy est petite: $I_t(\mathbf{r}) = I_{0t}e^{-2\kappa_y\Delta y}$. C'est la réflexion interne frustrée (F-TIR).
- Avec un bon contrôle de la distance Δy entre les prismes, on peut fixer le rapport de puissance entre réflexion et transmission, mais qui est dépendant de λ .
- Des meilleurs diviseurs sont construits avec des couches métalliques très fines



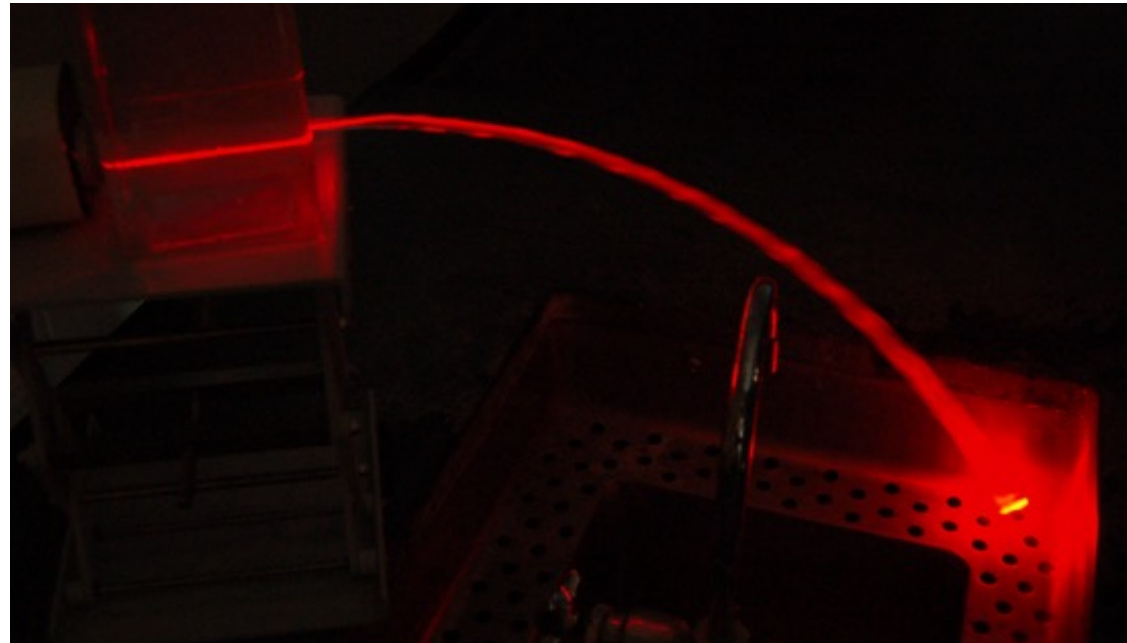
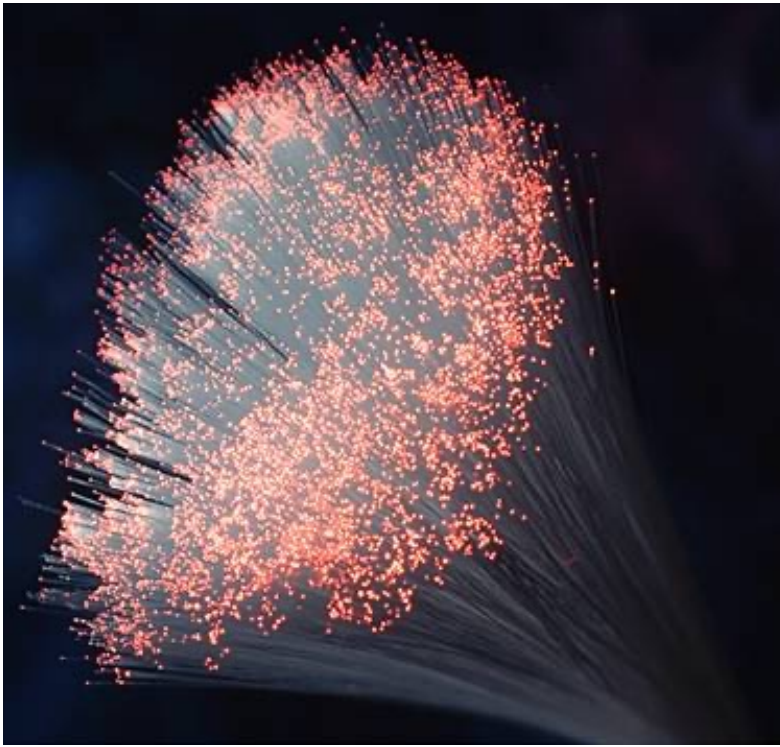
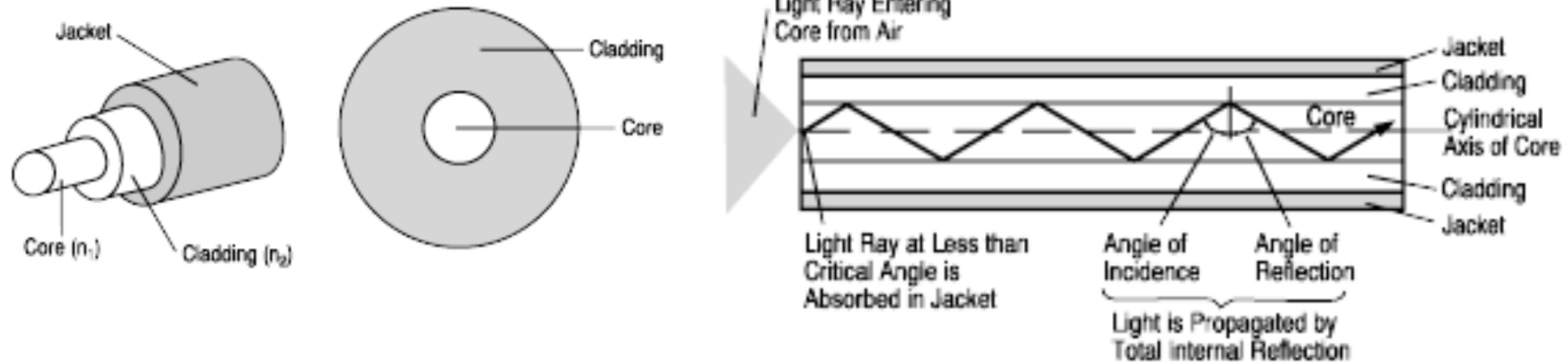
La brillance des diamants: pourquoi?

- Forte réflexion interne totale: diamants ($n=2.3$, $\theta_c=25.8^\circ$)
- La coupe "brilliant" produit un retrorélecteur



Les fibres optiques: tout dépend de la réflexion interne totale

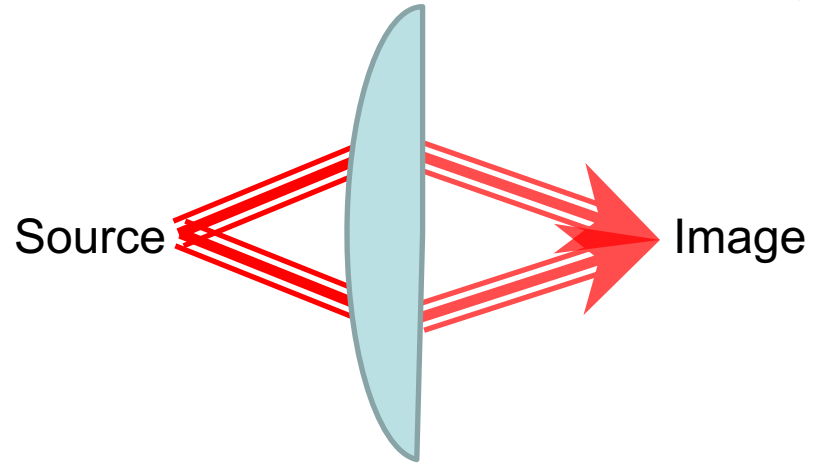
- Plus de détails au ch. 8



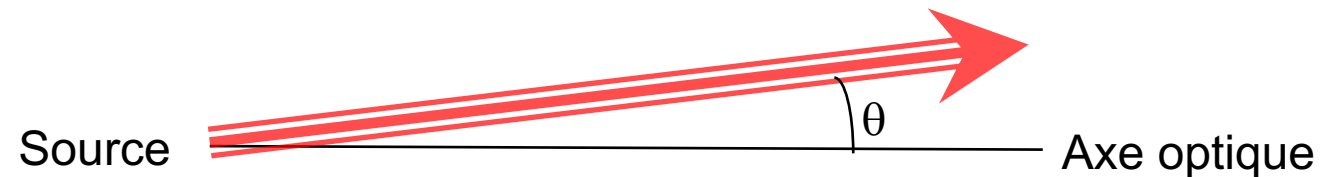
Des approximations dans la propagation de la lumière

Nous décrivons deux approximations importantes qui facilitent le traitement de la propagation:

1. L'approximation $\lambda \ll D$: l'optique géométrique (ch.3)



2. L'approximation $\theta \ll$ (ou $x, y \ll z$) : l'approximation paraxiale (ch.4)

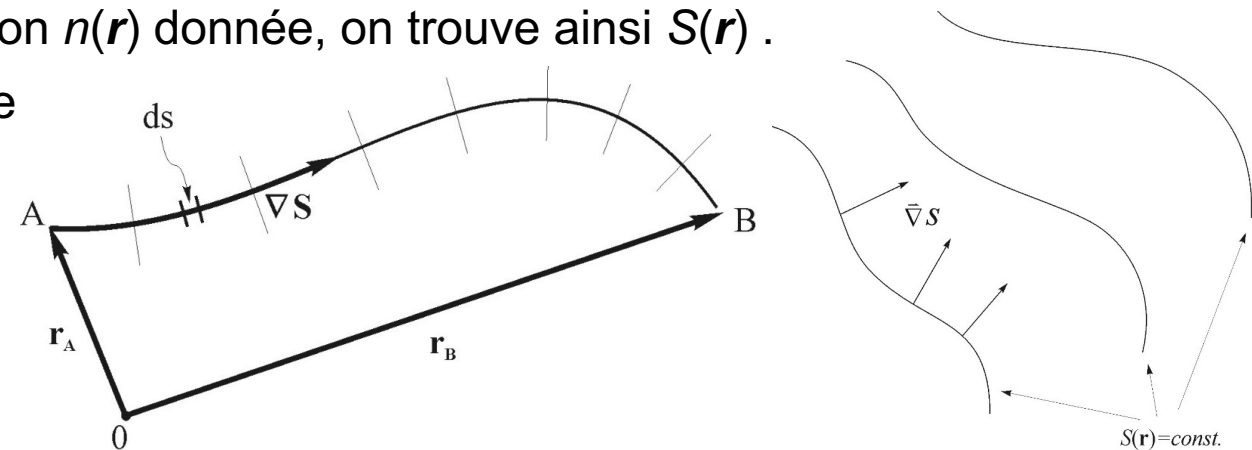


Le lien entre l'optique géométrique et les ondes: l'Eikonal

- La propagation de l'onde monochromatique: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathcal{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ dans un milieu où l'indice $n(\mathbf{r})$ varie dans l'espace, est dirigée par la phase $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = n(\mathbf{r}) \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}$.
- Nous écrivons donc le champ: $\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) e^{ik_0 S(\mathbf{r})}$, avec l'**Eikonal** $S(\mathbf{r})$ qui est similaire à un potentiel.
- La surface $S(\mathbf{r}) = \text{Cste.}$ est le front d'onde; la direction des rayons (perpendiculaire au front) est donnée par: $\nabla S(\mathbf{r})$.
- Nous essayons de résoudre l'équation d'Helmholtz: $\nabla^2 \mathcal{E}(\mathbf{r}) + (n(\mathbf{r})k_0)^2 \mathcal{E}(\mathbf{r}) = 0$ avec cette forme du champ.
- Il faut donc calculer les dérivés: $\nabla \mathcal{E}(\mathbf{r}) = \nabla \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) e^{ik_0 S(\mathbf{r})} + ik_0 \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) \nabla S(\mathbf{r}) e^{ik_0 S(\mathbf{r})}$, puis:

$$\nabla^2 \mathcal{E}(\mathbf{r}) = (\nabla^2 \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) + 2ik_0 \nabla \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) \nabla S(\mathbf{r}) + ik_0 \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) \nabla^2 S(\mathbf{r}) - k_0^2 \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) |\nabla S(\mathbf{r})|^2) e^{ik_0 S(\mathbf{r})}.$$
- L'équation devient: $\nabla^2 \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) + 2ik_0 \nabla \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) \nabla S(\mathbf{r}) + ik_0 \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) \nabla^2 S(\mathbf{r}) - k_0^2 \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) |\nabla S(\mathbf{r})|^2 + (n(\mathbf{r})k_0)^2 \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) = 0$.
- On garde la partie réelle: $\nabla^2 \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) + k_0^2 [n^2(\mathbf{r}) - |\nabla S(\mathbf{r})|^2] \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) = 0$.
- En **optique géométrique**, on suppose que les dimensions du système sont grandes (et les variations de $n(\mathbf{r})$, $\mathcal{E}_0(\mathbf{r})$ sont lentes) par rapport à $\lambda = 2\pi/k_0$. Donc, $\nabla^2 \mathcal{E}_0(\mathbf{r})$ est petit par rapport aux termes qui sont multipliés par k_0^2 .
- Le résultat est simple: $|\nabla S(\mathbf{r})| \cong n(\mathbf{r})$. Pour une distribution $n(\mathbf{r})$ donnée, on trouve ainsi $S(\mathbf{r})$.
- Pour un trajet optique entre deux points (A→B), on intègre $dS = |\nabla S(\mathbf{r})| ds \cong n(\mathbf{r}) ds$ pour obtenir:

$$\delta S_{AB} = S(\mathbf{r}_B) - S(\mathbf{r}_A) = \int_A^B |\nabla S(\mathbf{r})| ds \cong \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = ct_{AB}$$
- Par le principe de Fermat, δS_{AB} est **stationnaire** (Ch.3).



Bonus: La propagation dans un milieu inhomogène

- Avec l'Eikonal nous dérivons une formule pour le chemin des faisceaux:
- Le vecteur unité le long du chemin optique est: $\mathbf{s} = \frac{\nabla S(\mathbf{r})}{|\nabla S(\mathbf{r})|} = \frac{\nabla S(\mathbf{r})}{n}$. Mais aussi: $\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$, donc: $\nabla S(\mathbf{r}) = n\mathbf{s} = n \frac{d\mathbf{r}}{ds}$
- Pour l'Eikonal, nous trouvons: $\frac{dS(\mathbf{r})}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla S(\mathbf{r}) = \frac{\nabla S(\mathbf{r})}{n} \cdot \nabla S(\mathbf{r}) = \frac{|\nabla S(\mathbf{r})|^2}{n} = n$.
- Finalement, nous avons: $\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} (\nabla S(\mathbf{r})) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla (\nabla S(\mathbf{r})) = \frac{\nabla S(\mathbf{r})}{n} \cdot \nabla (\nabla S(\mathbf{r})) = \frac{1}{2n} \nabla (\nabla S(\mathbf{r}))^2 = \frac{1}{2n} \nabla n^2 = \nabla n$.
- Cette équation: $\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n$ permet de trouver le chemin optique d'un faisceau, en fonction de l'indice de réfraction $n(\mathbf{r})$ dans un milieu où l'indice change d'une manière continue.
- Dans le cas où le faisceau reste à proximité de l'axe optique $\mathbf{z}$ (approximation paraxiale), nous pouvons simplifier cette équation et écrire :

$$\frac{d}{dz} \left(n \frac{dx}{dz} \right) \approx \frac{\partial n}{\partial x} \quad , \quad \frac{d}{dz} \left(n \frac{dy}{dz} \right) \approx \frac{\partial n}{\partial y}.$$

