

Optique et Photonique

Benjamin Dwir

LMSC2 – IPHYS – SB

EPFL

Exercices: Stefano Marinoni

Moodle: <https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=18492>

Examen: Oral, 2 questions (théorie, exercice)

Livres du cours

Livres de référence :

- E. Hecht: Optics. Addison-Wesley, NY* (il y a aussi une édition en français)
- B.E.A. Saleh, M.C. Teich: Fundamentals of photonics. J. Wiley and Sons, NY*
- G. R. Fowler, Introduction to modern optics, Dover, NY

D'autres livres utiles:

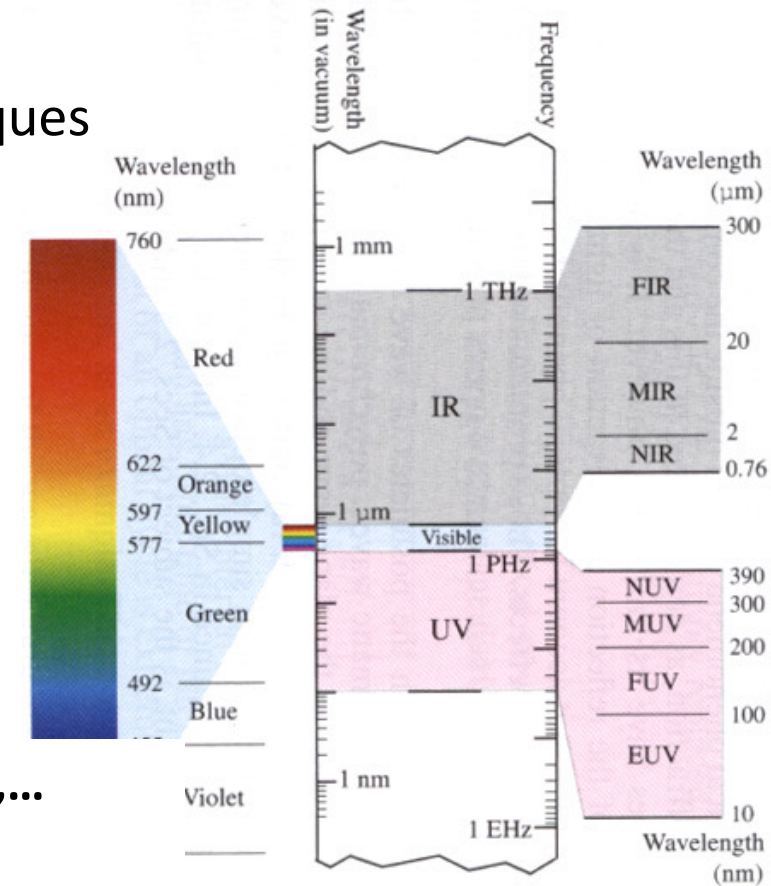
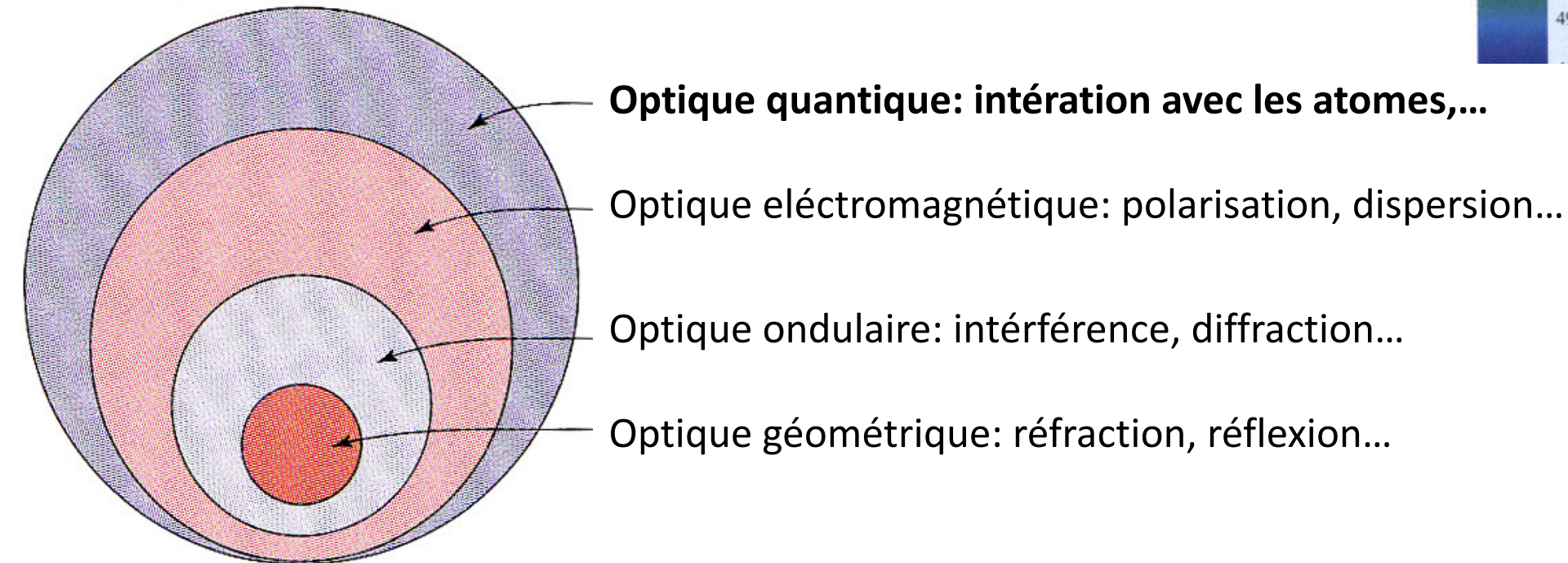
- E. Rosencher, B. Vinter: Optoélectronique. Masson, Paris (1998)
- J.-P. Pérez: Optique, 5ème Ed. Masson, Paris (1996)
- B.D. Guenther: Modern Optics. Wiley, NY (1990)
- H.D. Young: Fundamentals of waves, optics and modern physics. Mc Graw Hill, NY, 2nd Ed. (1976)
- Born and Wolf, Principles of optics, Cambridge

*ces deux livres sont aussi les sources des images présentés dans le matériel du cours s'il n'y a pas d'autre attribution de source

Les différentes facettes de l'optique

- L'optique traite de la lumière, qui fait partie des ondes électromagnétiques
- La gamme large: entre l'EUV (10 nm) et le FIR (300 μm)
- La gamme restreinte (UV-VIS-IR): 100 nm - 20 μm
- Le spectre visible: env. 400-700 nm

On applique différents modèles physiques:



Les cours en optique

- Le cours "Optique et Photonique" traite l'optique géométrique, ondulatoire, électromagnétique.
- Le cours "AMO" traite l'optique quantique, l'interaction matière-lumière, les lasers.

Les bases requises pour le cours "Optique et Photonique":

- Les équations de Maxwell
- La transformé de Fourier
- Quelques identités vectorielles
- Quelques notions de la physique des solides

Optique et Photonique

Plan du cours

1. Les équations d'ondes (développement, différents cas, solutions)
2. La propagation: absorption, diffusion, réfraction et réflexion, dispersion, lien avec l'optique géométrique
3. L'optique géométrique: rappel des bases et sujets avancés (aberrations, étendue optique)
4. L'approximation paraxiale et le faisceau Gaussien
5. La polarisation: principes, applications
6. La superposition, les battements et les paquets d'onde
7. L'interférence: principes, applications, différents interféromètres
8. Les guides d'onde: en 2D et en 3D, rectangulaires et cylindriques; les fibres optiques
9. La diffraction: développement mathématique, types de diffraction, applications, l'optique de Fourier, l'holographie

Ch. 1: Les équations des ondes

La base des ondes: l'équation des ondes (de d'Alembert)

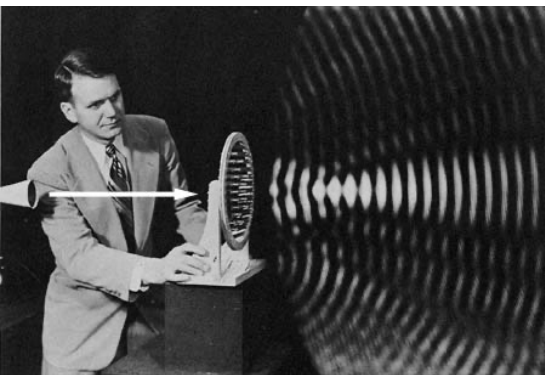
- Dans un système physique, une perturbation Ψ se propage sous la forme d'une onde, qui satisfait l'équation de d'Alembert (1746), avec une vitesse de l'onde v :

$$(1D): \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \qquad (3D): \nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$
- Toute fonction: $\Psi(\varphi)$, $\varphi = kx \pm \omega t$ (1D) ou $\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t$ (3D) satisfait cette équation, si: $v = \omega/k$:

$$(1D): \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = k^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = \omega^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \Rightarrow k^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{v^2} \omega^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \Rightarrow v = \pm \omega/k.$$
- La solution avec $\varphi = kx - \omega t$ est une onde se propageant de gauche à droite (en avançant), et la solution avec $\varphi = kx + \omega t$ est une onde se propageant de droite à gauche (en reculant).

Ondes acoustiques

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$



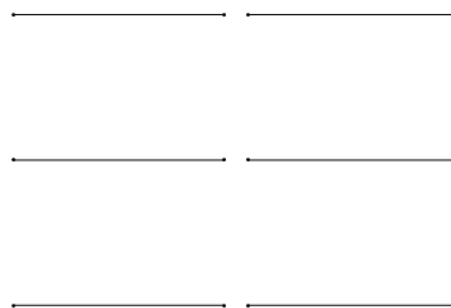
Ondes dans l'eau

$$\nabla_{xy}^2 z = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$



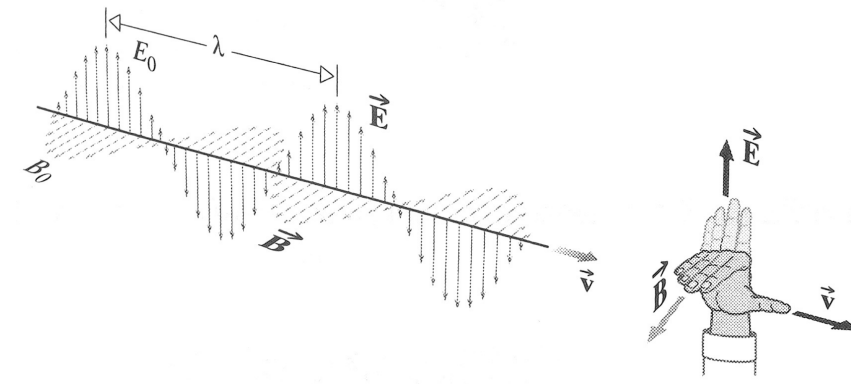
Ondes dans une corde

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



Ondes électromagnétiques

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$



La base de l'équation des ondes: les équations de Maxwell

- Pour développer l'équation des ondes électromagnétiques, on part des équations de Maxwell (1862):
- Faraday: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ou: $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$
- Ampère: $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$ ou: $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) \cdot d\mathbf{A}$
- Gauss (E): $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ ou: $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \rho dV$
- Gauss (M): $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ou: $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$
- Il faut ajouter les relations entre les champs dans la matière:
- $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E}$ (matière diélectrique)
- $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H}$ (matière magnétique)
- $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ (loi d'Ohm – quand il y a des porteurs libres; c'est une approximation linéaire)
- Dans toutes les équations, les vecteurs $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \dots$ sont des fonctions de $\mathbf{r}$ et de t .
- Valeurs numériques (SI): $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$, $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-7} \text{ Ns}^2/\text{C}^2$

L'équation des ondes électromagnétiques

- Faraday: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
- Ampère: $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$
- Gauss (E): $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$
- Gauss (M): $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
- $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$
- $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$

- Nous utilisons la relation vectorielle: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$.
- En utilisant les équations de Maxwell (Faraday, Ampère) on obtient:

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times (\mathbf{H} + \mathbf{M})) = \\ &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M} \right) = -\mu_0 \frac{\partial^2 (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{M}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \\ &\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{M}) . \end{aligned}$$

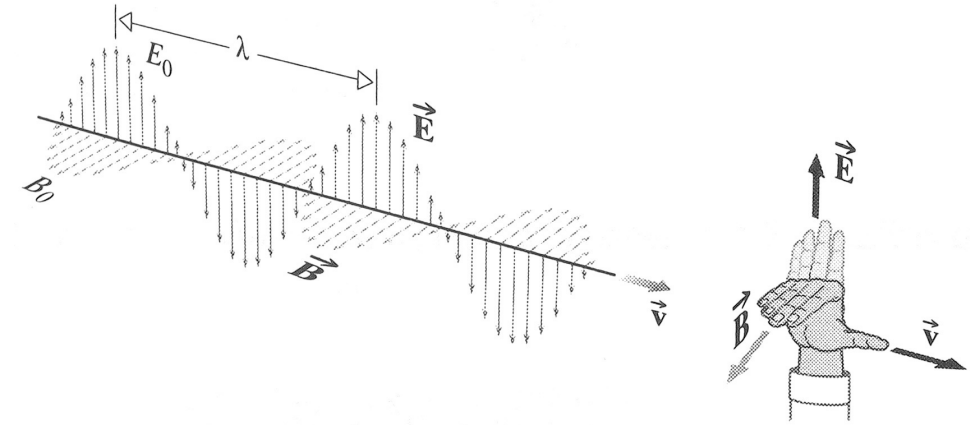
- Cela donne une **équation des ondes générique** pour $\mathbf{E}$:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{M})$$

- De la même façon, on peut aussi obtenir une équation similaire pour $\mathbf{H}$:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2} - \nabla \times \mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{P})$$

- Le membre de gauche de ces équations est une équation des ondes "classique", mais il y a le membre de droite ...
- Reste à démontrer: comment le membre de droite est (presque) zéro.
- Cela dépend de la situation, et des matériaux!



Les approximations de l'équation des ondes - généralités

- Dans le vide (cas limité): $\mathbf{P} = 0$, $\mathbf{M} = 0$, $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$, donc: $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$
- Dans un milieu matériel, tout dépend des propriétés du milieu:
 - Magnétisation? (très rare) : $\mathbf{M} \neq 0$
 - Charges libres? (semiconducteurs, métaux) : $\rho \neq 0$ (plus rare), $\mathbf{j} \neq 0$
 - Polarisation? (presque toujours) : $\mathbf{P} \neq 0$
- L'influence de la polarisation $\mathbf{P}$:
 - Non-linéaire ? Dépendance de l'intensité : $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}, \mathbf{E}^2, \mathbf{E}^3, \dots)$
 - Anisotrope? Dépendance de la direction : $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \vec{\chi} \mathbf{E}$, ou: $P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j$
 - Dispersive? Dépendance de la fréquence : $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}$
 - Non-uniforme? Dépendance de l'espace : $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi(\mathbf{r}) \mathbf{E}$

Les approximations de l'équation des ondes (1)

- L'équation générique: $\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{M})$
- Dans le vide, toute la partie droite est nulle ($\mathbf{P} = 0, \mathbf{j} = 0, \mathbf{M} = 0, \nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$) ; il reste: $\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$.

C'est l'équation des ondes classique: $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$ avec la vitesse: $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

- Milieu diélectrique **linéaire**, non-dispersif, uniforme, scalaire: $\mathbf{M} = 0, \rho = 0, \mathbf{j} = 0$, puis: $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$. Le terme $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$, car: $\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon_0(1 + \chi) \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Le terme à droite: $\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \chi \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ peut être ajouté au terme $-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ à gauche, pour donner: $\mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$. Si nous définissons: $n \equiv \sqrt{1 + \chi} = \sqrt{\varepsilon / \varepsilon_0}$, nous avons la même équation des ondes que dans le vide : $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$, sauf que la vitesse de l'onde devient: c/n .
- Milieu diélectrique linéaire, non-dispersif, **non-uniforme**, scalaire: On a : $\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}$, donc:

$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \varepsilon(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} + \varepsilon(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Cela donne: $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \varepsilon(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})} \cdot \mathbf{E} = -\nabla(\ln(\varepsilon)) \cdot \mathbf{E}$, ce qui est petit dans la plupart des

cas (quand ε ne varie pas trop sur une distance λ). Notre équation devient: $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\nabla[\nabla \ln \varepsilon(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}] \approx 0$.

Les approximations de l'équation d'ondes (2)

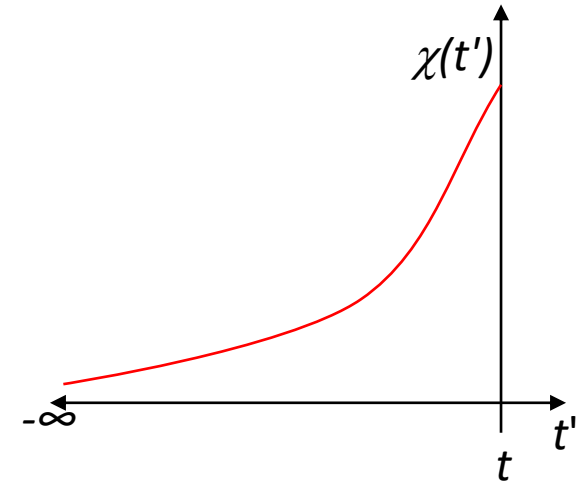
- L'équation générique: $\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{M})$
- Milieu diélectrique linéaire, non-dispersif, **anisotrope**: $\mathbf{P}_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} \mathbf{E}_j$. Cela donne: $\mathbf{D}_i = \varepsilon_{ij} \mathbf{E}_j$ et notre équation devient: $\nabla^2 \mathbf{E}_i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{E}_i + \chi_{ij} \mathbf{E}_j) = -\nabla[\nabla \ln \varepsilon(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}] \approx 0$ (somme implicite sur j). Nous développerons d'avantage ce cas au Ch.5.
- Milieu diélectrique **non-linéaire**, non-dispersif, **anisotrope**: Ici: $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ est une fonction non-linéaire, qu'on peut développer: $\mathbf{P}_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} \mathbf{E}_j + 2d_{ijk} \mathbf{E}_j \mathbf{E}_k + 4f_{ijkl} \mathbf{E}_j \mathbf{E}_k \mathbf{E}_l + \dots = \varepsilon_0 \chi^L \mathbf{E} + \mathbf{P}^{NL}$ ($\chi_i^L = \chi_{ii}$)

L'équation des ondes devient: $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} (1 + \chi^L) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{NL}}{\partial t^2}$

La partie non-linéaire devient importante pour des fortes intensités de champ et des temps courts.

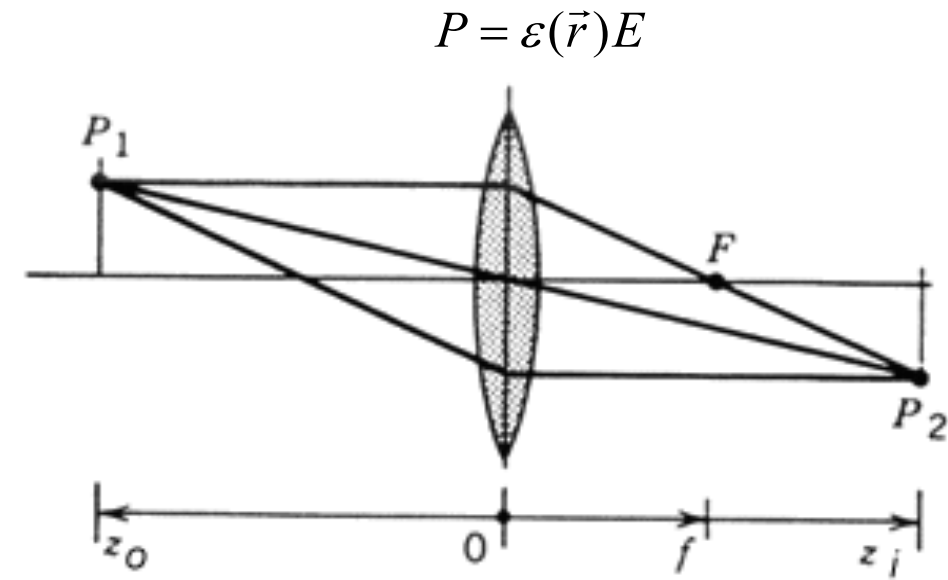
Les approximations de l'équation d'ondes (3)

- L'équation générique: $\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{M})$
- Milieu diélectrique linéaire, **dispersif**, uniforme, scalaire: La réponse $\mathbf{P}$ au changement de champ $\mathbf{E}$ est **retardé**:
 $\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t dt' \chi(t - t') \mathbf{E}(t')$. Nous en verrons un modèle détaillé au Ch.2.
- Nous utilisons la transformé de Fourier: Définissons $\mathbf{E}(\omega)$, $\mathbf{P}(\omega)$, $\chi(\omega)$ (fonctions complexes) comme la transformé de Fourier de $\mathbf{E}(t)$, $\mathbf{P}(t)$, $\chi(t)$: $\mathbf{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t) e^{-i\omega t} dt$, $\mathbf{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(t) e^{-i\omega t} dt$, $\chi(\omega) = \int_0^{\infty} \chi(t) e^{-i\omega t} dt$.
- La transformé remplace la convolution par une multiplication, et nous obtenons: $\mathbf{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}(\omega)$. Le déplacement électrique est aussi donnée par: $\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon_0 (1 + \chi(\omega)) \mathbf{E}(\omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega)$.
- Nous pouvons donc définir: $n(\omega) \equiv \sqrt{1 + \chi(\omega)} = \sqrt{\varepsilon(\omega) / \varepsilon_0}$.
- Avec ces définitions, et les conditions "habituels": $\mathbf{M} = 0$, $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$, $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$,
nous retrouvons notre équation des ondes: $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n(\omega)^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$.
- **Conclusion générale**: dans la plupart des cas: $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$ avec différents n : $n(\omega)$, $n(\mathbf{r})$, ...

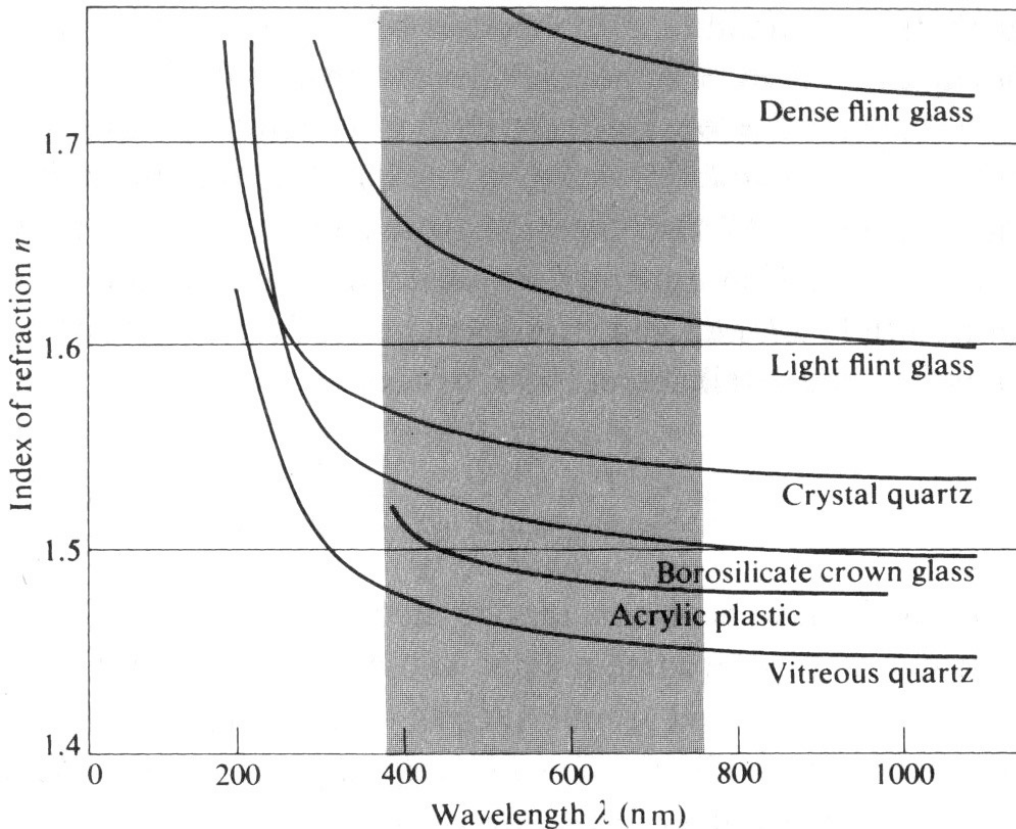


Exemples de la dépendance de n

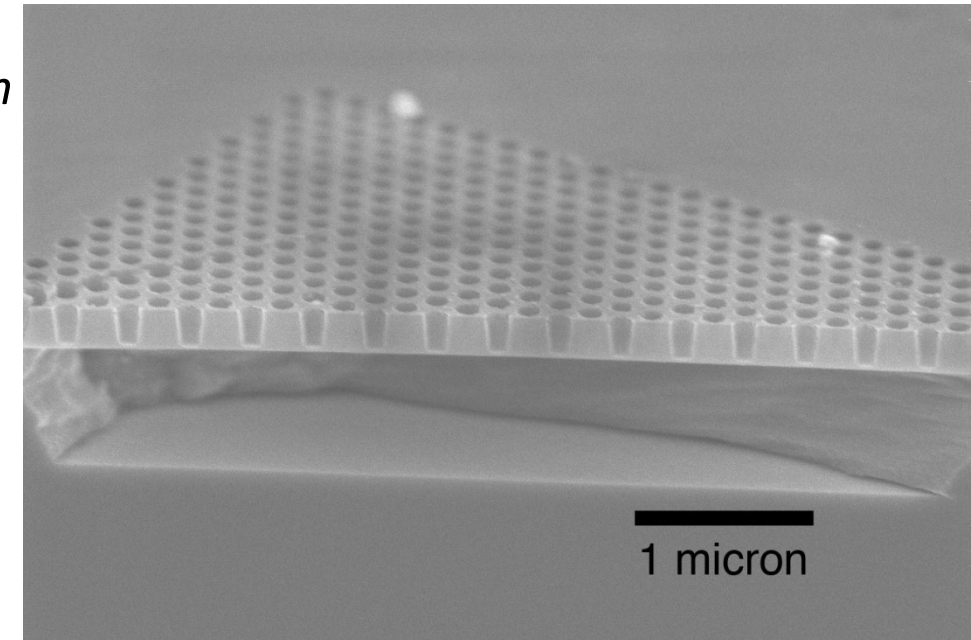
Système optique classique
(variations locales de n sur
une échelle $> \lambda$):



La dispersion: $P = \varepsilon(\omega)E$



Crystal photonique
(variations locales de n
sur une échelle $< \lambda$):

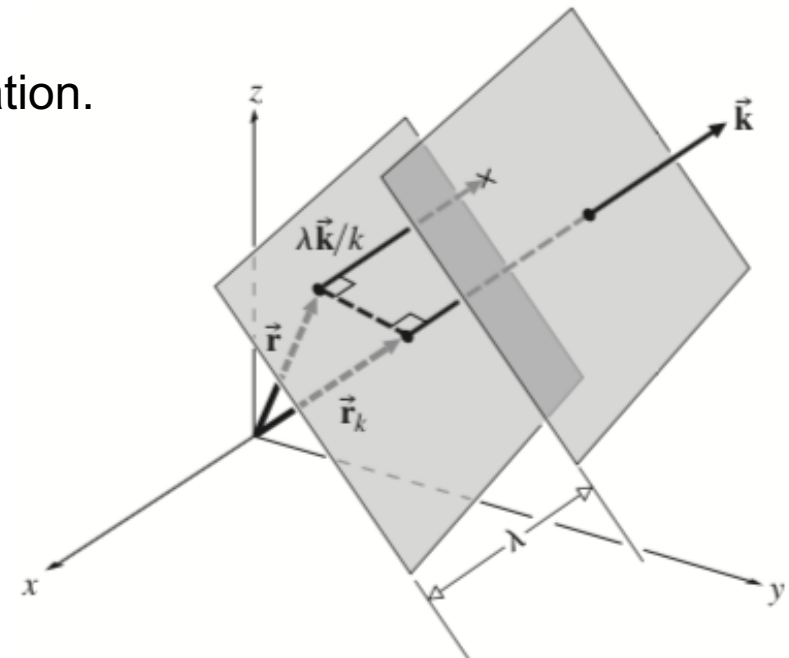


Les solutions des équations des ondes - généralités

- Les équations dans la plupart des cas: $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$ et $\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$
- Ces équations sont **linéaires**, donc la superposition des solutions est possible:
Si Ψ_1 et Ψ_2 sont des solution, $A_1 \Psi_1 + A_2 \Psi_2$ est aussi une solution (A_1, A_2 scalaires).
- Dans un système cartésien, toute fonction $\Psi(\varphi)$, $\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t$ est une solution, si $\omega/k = c/n$.
- En particulier, la solution simple (**ondes planes**) est: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi) = \Re(\mathcal{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi)})$
- On a les relations: $c/n = \omega/k$, $\lambda = 2\pi/k$, $\omega = 2\pi\nu$, $c/n = \lambda\nu$
- Ordres de grandeur: $\lambda = 500 \text{ nm}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $k \approx 10^7 \text{ m}^{-1}$, $\omega \approx 4 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$
- Pour simplifier, nous allons souvent prendre z comme la direction de propagation.

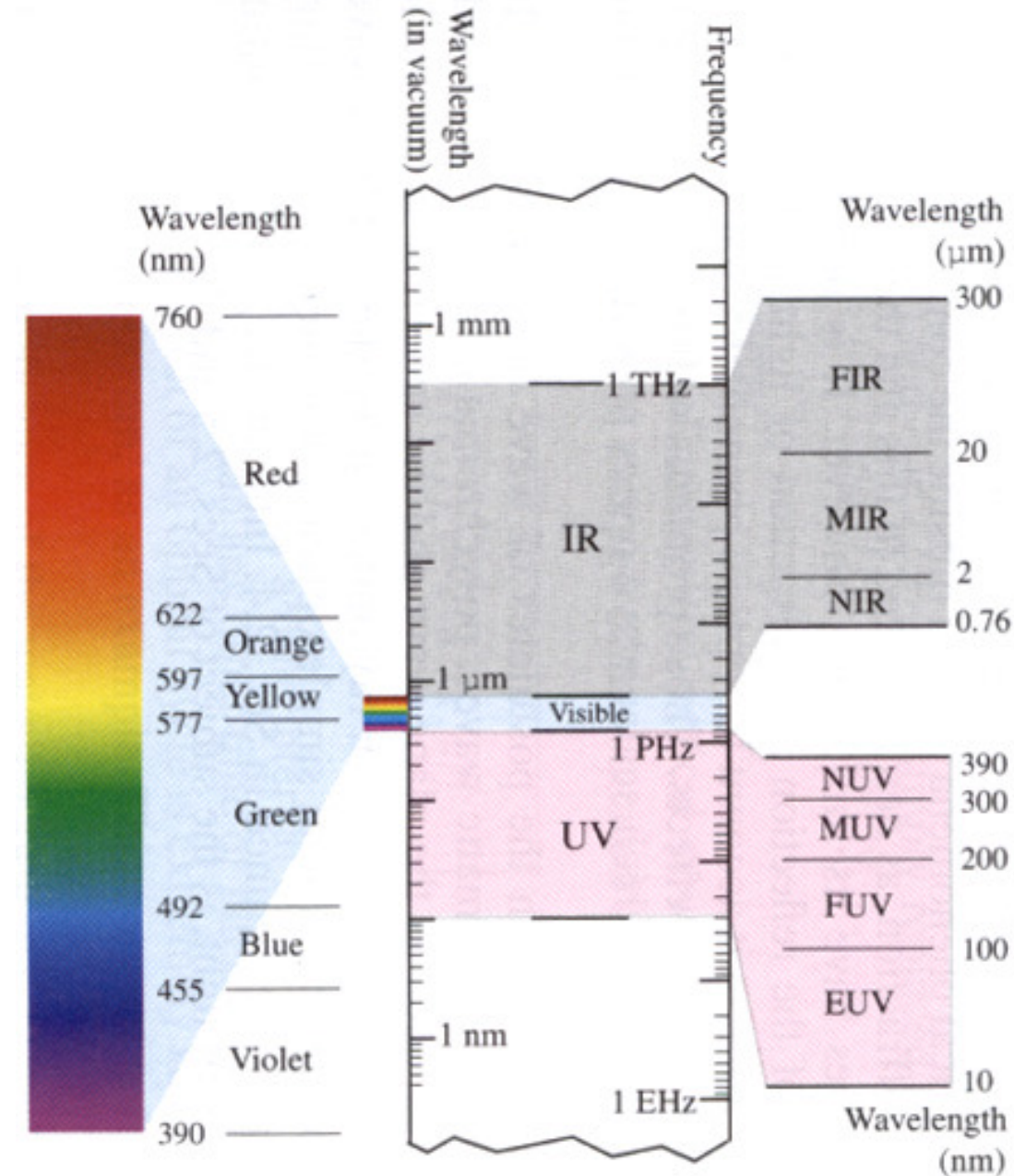
- Note: Une solution générale $\Psi(\varphi)$ (qui est une fonction périodique) peut toujours être décomposée en une **série de Fourier** des ondes planes: $\Psi(\varphi) =$

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} [A_j \cos(j\varphi) + B_j \sin(j\varphi)]$$



Le spectre électromagnétique et la lumière visible

- Le spectre visible ($\lambda=400\text{-}750\text{ nm}$) est très limité par rapport au spectre électromagnétique
- Les mêmes calculs que nous utilisons en optique peuvent servir pour l'étude des ondes radio, micro-ondes, etc.
- Quelques approximations dépendent de la longueur d'onde: elles sont plus faciles à réaliser pour une partie du spectre.



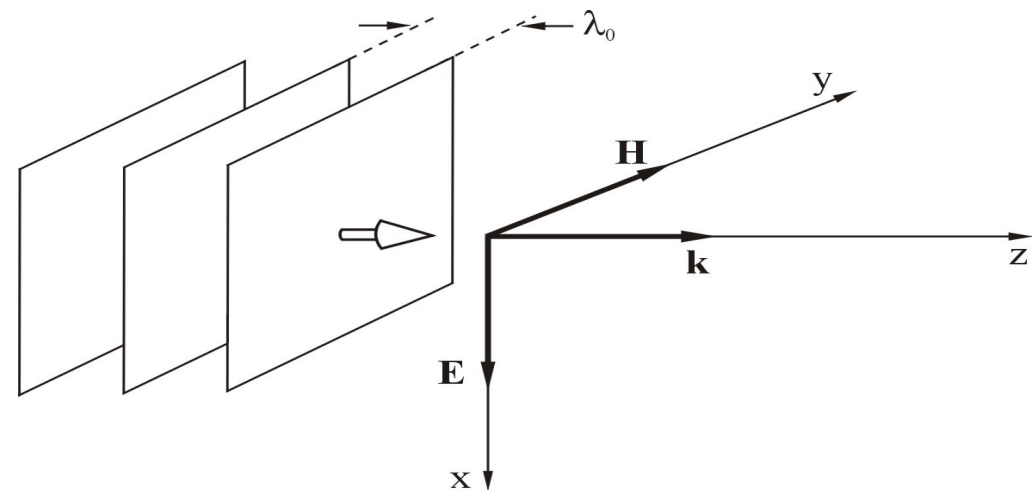
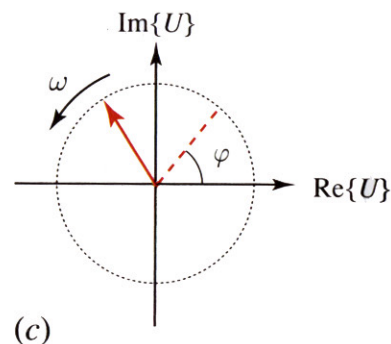
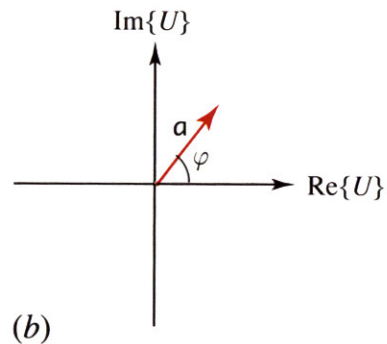
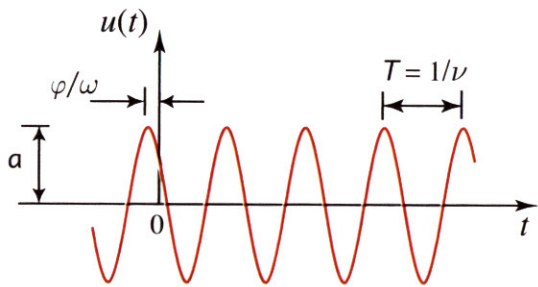
Les ondes planes et monochromatiques (1)

- Les ondes planes: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re e(\boldsymbol{\varepsilon}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi)})$ sont des solutions de l'équation: $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$
- La phase est constante (à l'instant t) pour les plans: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{Cte}$ (voir dessin ci-dessous, où: $\mathbf{k} \parallel \mathbf{z}$)
- Dans un cas plus général, $\mathbf{E}_0$ et n dépendent de $\mathbf{r}$, mais ω est constante et connue (**ondes monochromatiques**):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re e(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}) \quad \text{et:} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \Re e(\mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t})$$

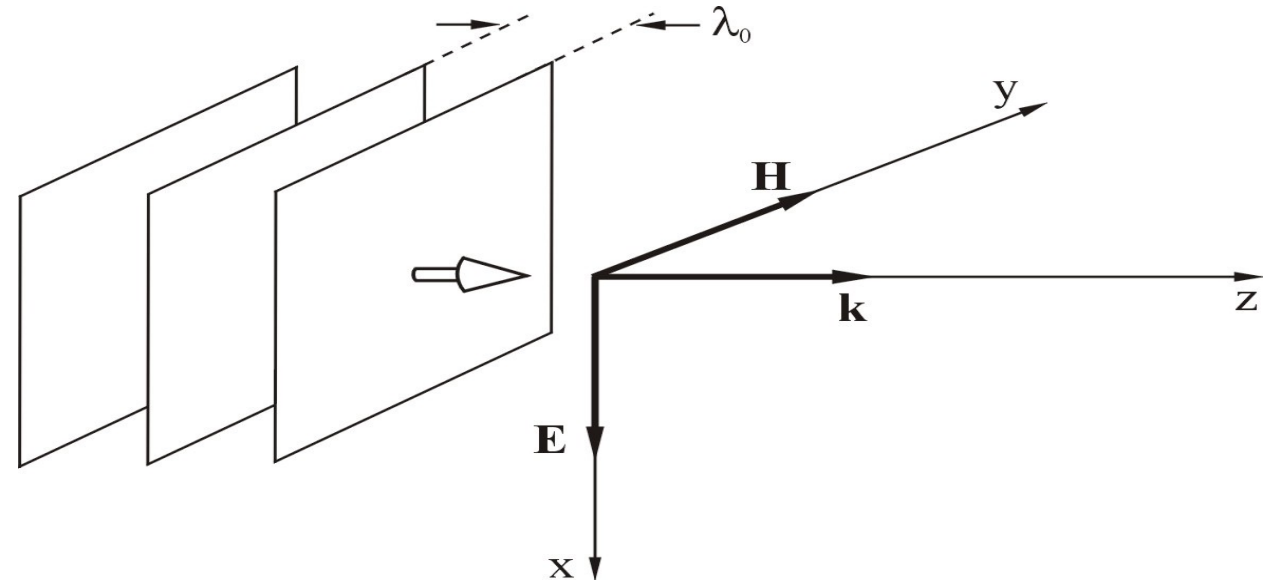
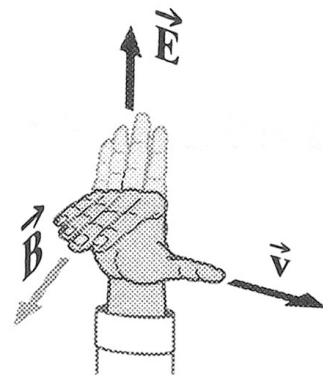
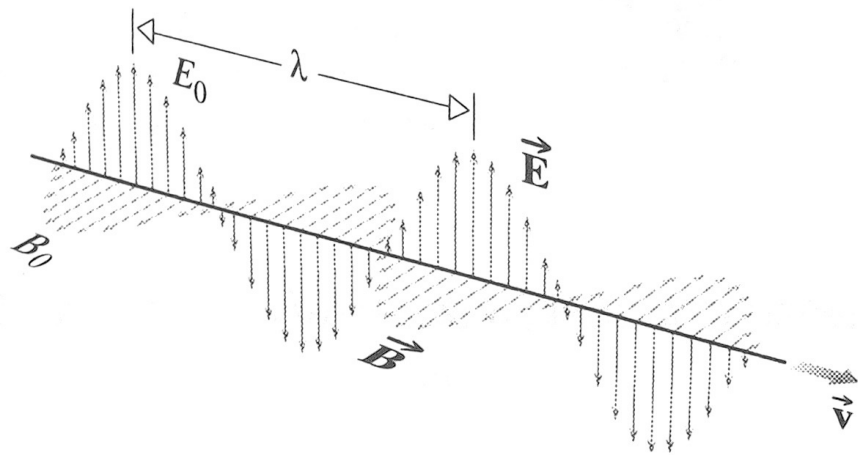
- Les dérivées temporelles sont donc: $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})$ et: $\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{H}(\mathbf{r})$.
- L'équation d'onde devient: $\nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) + \frac{n^2(\mathbf{r})}{c^2} \omega^2 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) = 0$
- En définissant: $k(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{c} n(\mathbf{r})$ (dans le vide: $k_0 = \frac{\omega}{c}$) nous obtenons l'**équation de Helmholtz**:

$$\nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) + k^2(\mathbf{r}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) = 0$$



Les ondes planes et monochromatiques (2)

- Pour les ondes planes monochromatiques: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re e(\mathcal{E}_0(\mathbf{r})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)})$ et: $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \Re e(\mathcal{H}_0(\mathbf{r})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)})$ nous pouvons simplifier les équations de Maxwell:
- En place de: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, nous avons: $\mathbf{k} \times \mathcal{E}_0 = \omega \mu_0 \mathcal{H}_0$
- En place de: $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, nous avons: $\mathbf{k} \times \mathcal{H}_0 = -\omega \epsilon \mathcal{E}_0$
- Les vecteurs $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{k}$, sont toujours perpendiculaires l'un à l'autre (règle de la main droite) !
- Nous pouvons calculer l'**impédance**: $Z \equiv \frac{E_0}{H_0} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{Z_0}{n}$, avec: $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega = \text{"l'impédance du vide"}$.

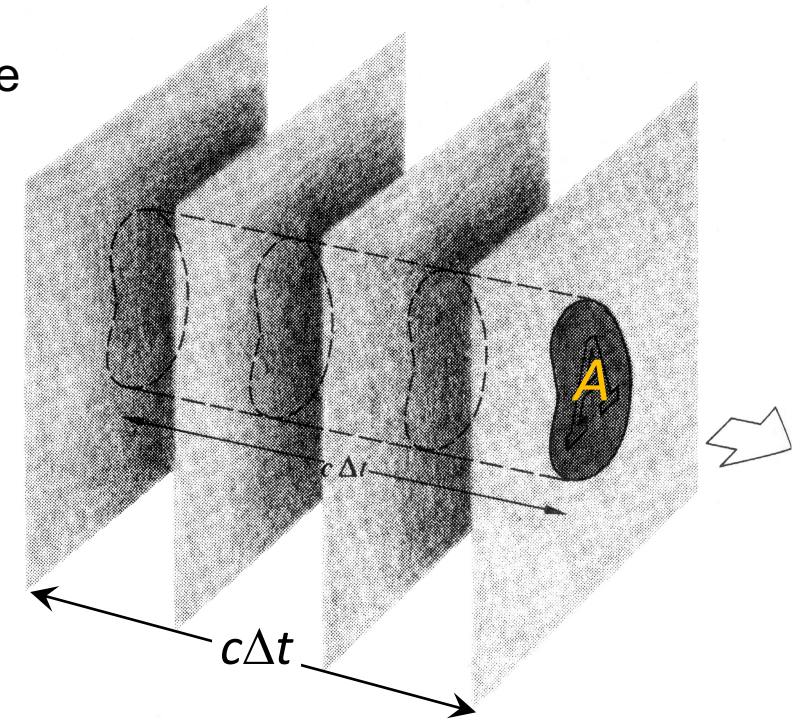


L'énergie des ondes planes – vecteur de Poynting

- L'énergie électromagnétique par unité de volume est: $u = u_E + u_B = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{1}{\mu_0} \frac{B^2}{2}$
- Pour les ondes planes dans le vide: $E=cB$, donc: $u_E=u_B$, donnant: $u = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$
- Une onde plane perpendiculaire à une surface A va transmettre une énergie $uc\Delta t A$ dans un temps Δt , donc l'intensité (par unité de temps et de surface) est:

$$I = cu = c\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} EB = EH$$

- Ceci nous amène à définir le **vecteur de Poynting**: $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ pour quantifier le transport de l'énergie par l'onde.
- L'intensité **mesuré** est donnée par la moyenne temporelle: $I = \langle |\mathbf{S}| \rangle_T$, car la vitesse de réaction des appareils de mesure est beaucoup plus lente que la fréquence de la lumière ($10^{14} - 10^{15}$ Hz).
- Dans un matériel avec indice n : l'énergie est multiplié par $\varepsilon/\varepsilon_0=n^2$, mais la vitesse est c/n , ce qui donne: $I = \langle |\mathbf{S}| \rangle_T = nc\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle_T$.



Le vecteur de Poynting - dérivation

- Prenons les équations de Maxwell: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ et: $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$, multiplions la première par $\mathbf{H}$ et la deuxième par $\mathbf{E}$, pour obtenir: $\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, et: $\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$.
- La relation vectorielle: $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ avec $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ donne: $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$.
- En utilisant le théorème de Gauss: $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV$ avec $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, et les équations précédentes, on obtient:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} &= \int_V (\nabla \cdot \mathbf{S}) dV = \int_V dV [\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})] = \int_V dV [\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})] = \int_V dV \left[-\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) \right] \\ &= \int_V dV \left[-\mu_0 \mathbf{H} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right) - \mathbf{E} \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) \right] = - \int_V dV \left[\mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \right] \\ &= - \int_V dV \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0 \mathbf{H}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} \right) + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \right] \end{aligned}$$

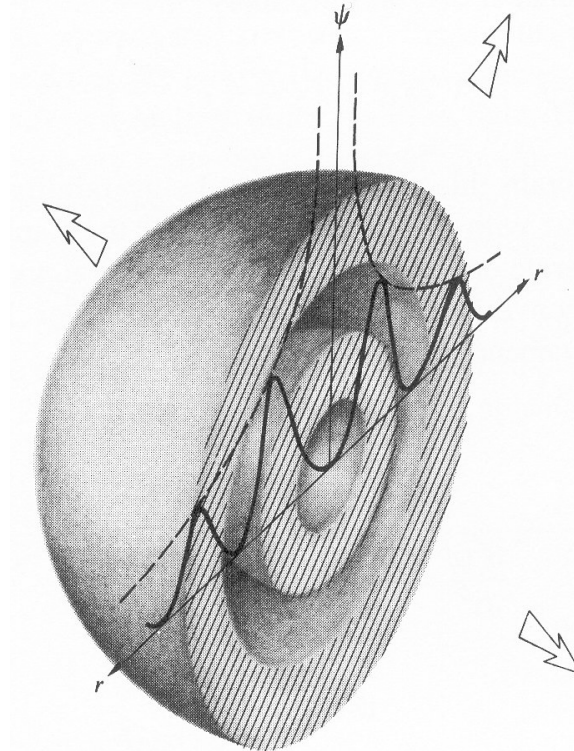
- C'est la conservation de l'énergie: Le flux d'énergie ($\mathbf{S}$) sortant par une surface fermée est égal à la diminution ($-\frac{\partial}{\partial t}$) de l'énergie à l'intérieur du volume*. L'énergie interne est composé de 4 termes:
 - $\frac{\mu_0 \mathbf{H}^2}{2}$ = Énergie du champ magnétique
 - $\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2}$ = Énergie du champ électrique
 - $\mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}$ = Énergie lié à l'interaction entre champ magnétique et magnétisation de la matière
 - $\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}$ = Énergie lié à l'interaction entre champ électrique et polarisation de la matière
- * En plus, il y a le terme (sans facteur $-\frac{\partial}{\partial t}$): $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ = la dissipation Ohmique (énergie électrique qui se transforme en chaleur). Cette partie est une perte nette d'énergie dans le volume V .

Le vecteur de Poynting - utilisation

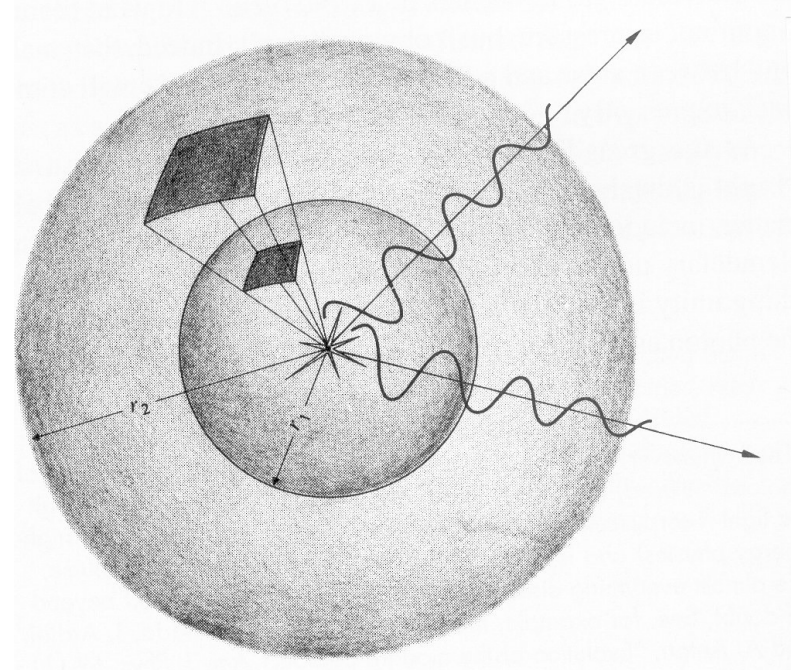
- Le flux de l'énergie est donné par le vecteur de Poynting: $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$
- L'intensité mesurée est toujours la moyenne du vecteur $\mathbf{S}$: $I = \langle |\mathbf{S}| \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t |\mathbf{S}(t')| dt'$
- Pour les ondes monochromatiques, on a: $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \Re e(\boldsymbol{\mathcal{E}} e^{-i\omega t}) \times \Re e(\boldsymbol{\mathcal{H}} e^{-i\omega t}) = \frac{1}{4} [(\boldsymbol{\mathcal{E}} e^{-i\omega t} + \boldsymbol{\mathcal{E}}^* e^{i\omega t}) \times (\boldsymbol{\mathcal{H}} e^{-i\omega t} + \boldsymbol{\mathcal{H}}^* e^{i\omega t})] = \frac{1}{4} [(\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}) e^{-2i\omega t} + \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}^* + \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \times \boldsymbol{\mathcal{H}} + (\boldsymbol{\mathcal{E}}^* \times \boldsymbol{\mathcal{H}}^*) e^{2i\omega t}]$ et la moyenne est: $\langle \mathbf{S} \rangle_T = \frac{1}{4} [\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}^* + \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \times \boldsymbol{\mathcal{H}}] = \Re e(\boldsymbol{\mathcal{S}})$ avec: $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}^*]$.
- Note: L'onde plane n'est pas physique! L'énergie totale: $U = \int_A \mathbf{I} \cdot d\mathbf{s} = cn\epsilon_0 \frac{E_0^2}{2} A$ est infinie pour une surface infinie $A \rightarrow \infty$

Autres solutions de l'équation d'ondes: ondes sphériques

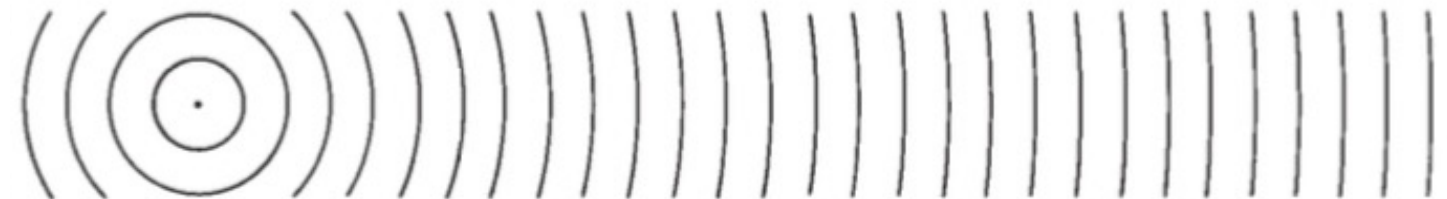
- Dans des systèmes de coordonnées sphérique, nous allons prendre une solution $\Psi(r)$, qui ne dépend que de la coordonnée r : $\Psi(r, \theta, \varphi) = \Psi(r)$
- Le Laplacien a la forme: $\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Psi)$
- La solution générale: $\Psi(r, \theta, \varphi) = \frac{f(kr - \omega t)}{r}$
- Une solution simple*:
$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{r} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$
$$= \Re e \left(\frac{\varepsilon_0}{r} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right)$$
- Conservation de l'énergie:
$$P = \int_A \mathbf{I} \cdot d\mathbf{s} = cn\varepsilon_0 \frac{E^2}{2} 4\pi r^2$$
$$= cn\varepsilon_0 \frac{E_0^2}{2r^2} 4\pi r^2 = 2\pi cn\varepsilon_0 E_0^2$$
- L'onde sphérique est donc physique*!



Onde sphérique



Onde (presque) plane



* Voir commentaire, 3 pages plus loin

Autres solutions de l'équation d'ondes: ondes cylindriques

- Dans des systèmes de coordonnées cylindrique, nous allons prendre une solution $\Psi(\mathbf{r})$, qui ne dépend que de la coordonnée r : $\Psi(r, \theta, z) = \Psi(r)$

- Le Laplacien a la forme: $\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)$

- Solution générale:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = H_n^{(2)}(kr) e^{-i\omega t} \text{ (fonction de Hankel)}$$

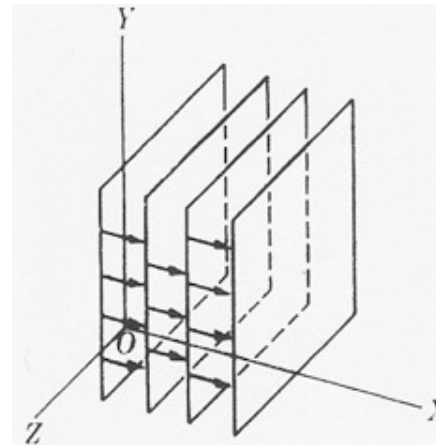
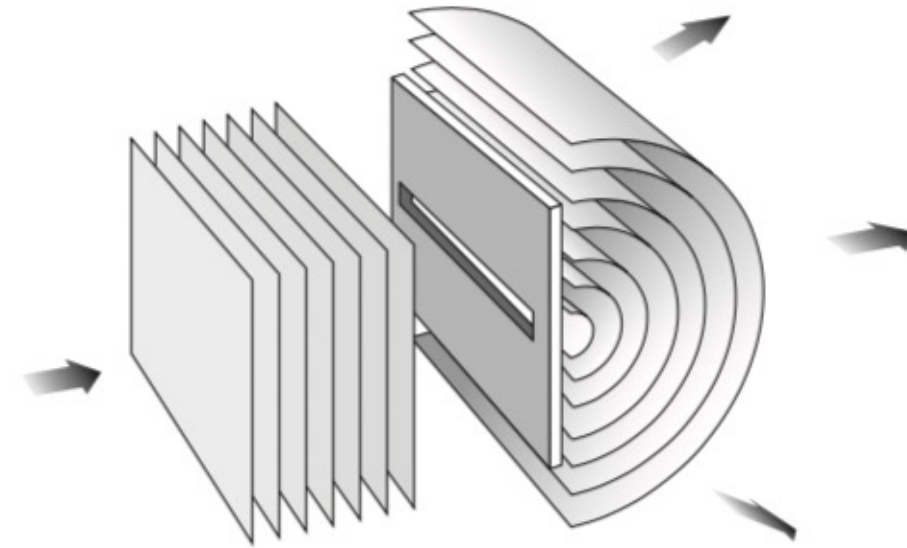
- Une solution simple:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{E_0}{\sqrt{r}} \cos(k \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\ &= \Re e \left(\frac{E_0}{\sqrt{r}} e^{i(k \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right) \end{aligned}$$

- Conservation de l'énergie:

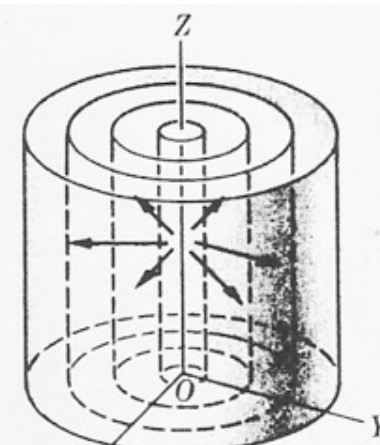
$$\begin{aligned} P &= \int_A \mathbf{I} \cdot d\mathbf{s} = cn\epsilon_0 \frac{E^2}{2} 2\pi r z \\ &= cn\epsilon_0 \frac{E_0^2}{2r} 2\pi r z = \pi cn\epsilon_0 E_0^2 z \end{aligned}$$

L'onde cylindrique n'est pas physique!



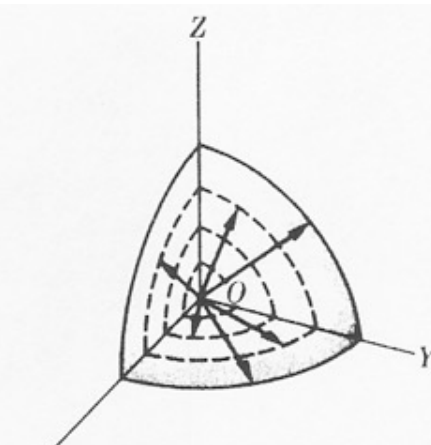
(a)

Ondes: plane



(b)

cylindrique



(c)

sphérique

Le dipôle oscillant comme source d'ondes

- Un dipôle électrique oscillant $\mathbf{p}(t) = p \hat{\mathbf{e}}_z \cos(\omega t)$ est formé par une charge q oscillant avec une amplitude d : $z(t) = d \cos(\omega t)$. Le moment dipolaire oscillant est donc: $p(t) = qd \cos(\omega t)$.
- Le dipôle oscillant est une source des champs électrique et magnétique. En utilisant les coordonnées sphériques, nous obtenons les composants non-nulles:

- $$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p}{r^3} + \frac{\omega p}{cr^2} \right) \cos \theta \cos \left(\frac{\omega r}{c} - \omega t \right)$$

- $$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p}{r^3} + \frac{\omega p}{cr^2} + \frac{\omega^2 p}{c^2 r} \right) \sin \theta \cos \left(\frac{\omega r}{c} - \omega t \right)$$

- $$H_\phi = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{\omega p}{cr^2} + \frac{\omega^2 p}{c^2 r} \right) \sin \theta \cos \left(\frac{\omega r}{c} - \omega t \right)$$

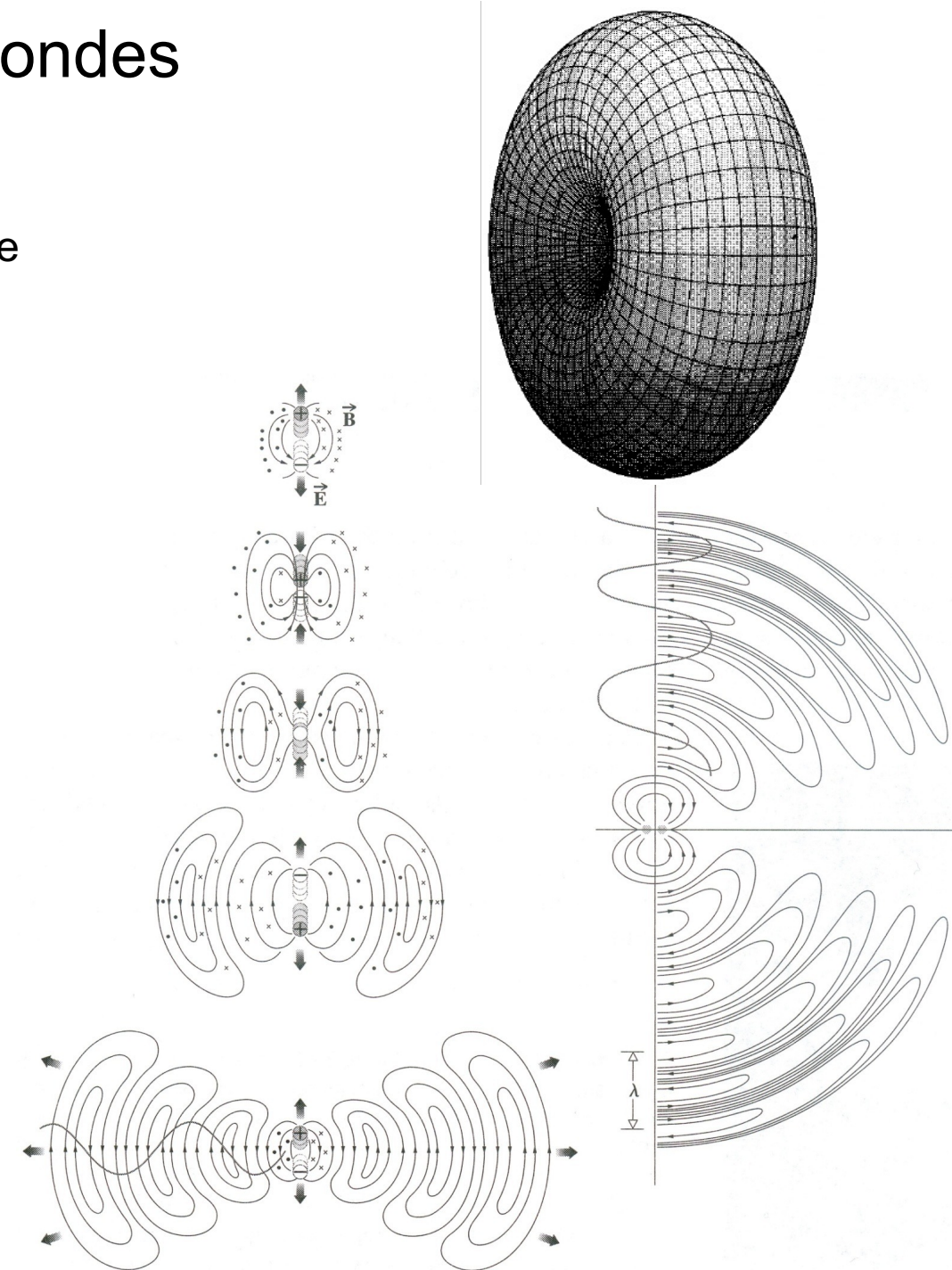
- Les champs lointains (on ne garde que les termes $\sim 1/r$) sont:

$$E_\theta \approx \frac{\mu_0 \omega^2 p}{4\pi r} \sin \theta \cos \left(\frac{\omega r}{c} - \omega t \right) ; \quad H_\phi \approx \frac{\omega^2 p}{4\pi cr} \sin \theta \cos \left(\frac{\omega r}{c} - \omega t \right)$$

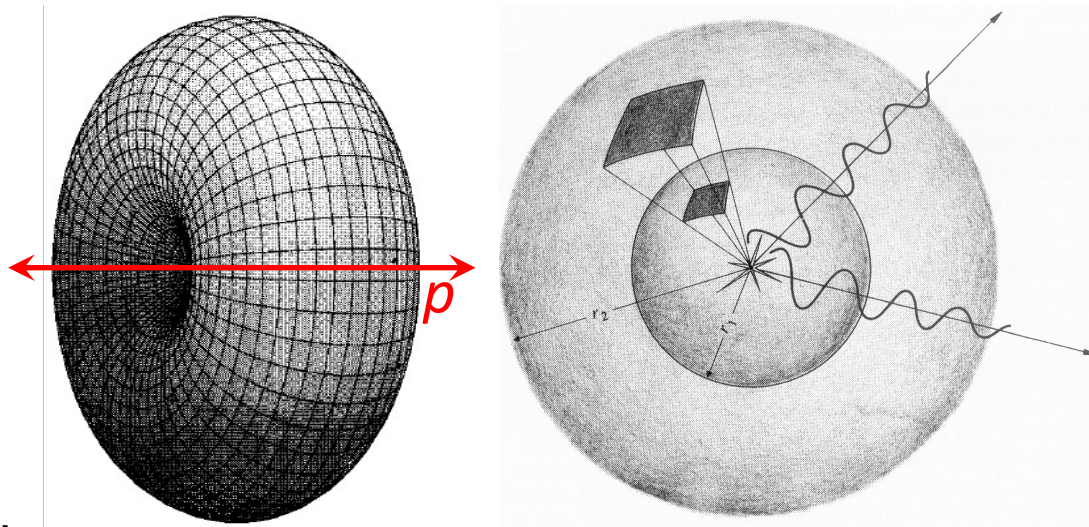
- La moyenne temporelle de la norme du vecteur de Poynting est:

- $$\langle |\mathbf{S}| \rangle_T = \langle E_\theta H_\phi \rangle_T = \frac{\omega^4 p^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \theta$$

- C'est aussi une onde physique, similaire à l'onde sphérique.



Bonus: Commentaire concernant l'onde sphérique

- Nous avons écrit l'onde sphérique: $E(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{r} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \Re \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right)$
 - Il y a un problème des unités ($\mathbf{E}_0/r$ n'a pas les unités d'un champ électrique...).
 - Pour corriger cela, il faut plutôt écrire: $E(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{r} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$, avec $\mathbf{A}$ ="force de la source" (unités de champ x distance). (voir Hecht, 4^{ème} ed. pp.29-30).
 - En réalité, il n'existe pas une source ponctuelle des ondes sphériques (divergence du champ au $r = 0$).
 - On peut imaginer que la source "ponctuelle" est un atome, une molécule, etc., que nous pouvons modeler par un dipôle électrique oscillant (voir Ch.2).
 - Nous avons vu que le champ lointain d'un tel dipôle est:
$$E_\theta = \frac{\mu_0 \omega^2 p}{4\pi r} \sin \theta \cos \left(\frac{\omega r}{c} - \omega t \right)$$
 - Si nous regardons dans le plan $\theta = \pi/2$, cela donne:
$$E = \frac{\mu_0 \omega^2 e d}{4\pi r} \cos \left(\frac{\omega r}{c} - \omega t \right), \text{ avec } d = \text{"taille" du dipôle } (p = -e \cdot d).$$
 - Cette équation a la forme d'une onde sphérique, avec des unités correctes.
 - Une petite source d'une taille d pourrait aussi être prise comme une source des ondes sphériques, en utilisant la même équation.
- 
- Pour simplifier, dans ce cours, nous allons continuer à écrire: $E(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{r} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$, en sachant que dans cette équation, $E_0 = E'_0 \cdot d$ (d = constante, des unités de distance) pour avoir les unités correctes.

Le photon

- La mécanique quantique nous enseigne que l'énergie du champ électromagnétique est quantifiée en unités discrètes: $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ ($h=6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$). En unités pratiques: $E [\text{eV}] \cong \frac{1.24}{\lambda[\mu\text{m}]}$ ($E=1.7\text{-}3.1\text{eV}$ pour $\lambda=400\text{-}730\text{nm}$).
- En effet, l'onde électromagnétique est composée d'un flux de particules sans masse (vitesse = c) appelés **photons**. La probabilité de trouver un photon à un point de l'image est proportionnelle à l'intensité de l'onde classique.
- L'intensité d'un faisceau est donc liée au flux des photons (par unités de temps et de surface): $\phi = \frac{I}{h\nu} = \frac{I\lambda}{hc}$. Le flux des photons dépend donc aussi de la longueur d'onde, car l'énergie transmise par photon en dépend.
- Si le flux est raisonnablement faible, on peut compter les photons. Dans ce cas, l'intensité donne la probabilité de trouver un photon (par seconde).
- La quantité de mouvement du photon (particule sans masse, vitesse= c) est: $p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$.
- On peut calculer la **pression de radiation** d'une manière semi-classique:
 - Un flux de ϕ photons/ m^2/s apporte une quantité de mouvement $P = (\phi A \Delta t)p = (\phi A \Delta t)\hbar k$ à une surface A pendant un temps Δt .
 - Dans le cas d'absorption totale, cette quantité de mouvement exerce une force $F=P/\Delta t$, qui donne lieu à une pression: $P_r = \frac{F}{A} = \frac{P}{A \Delta t} = \frac{\phi A \Delta t \hbar k}{A \Delta t} = \frac{I \hbar k}{h\nu} = \frac{I}{c}$. C'est la pression de radiation.
 - Dans le cas de réflexion totale, on apporte le double de quantité de mouvement, donc: $P_r = \frac{2I}{c}$.

La lumière: particule ou onde ?

Particule:

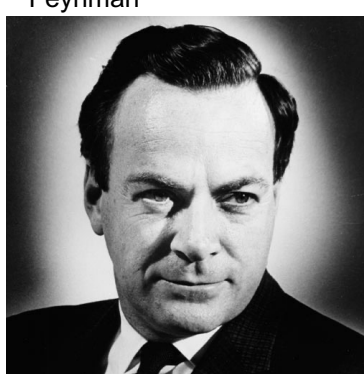
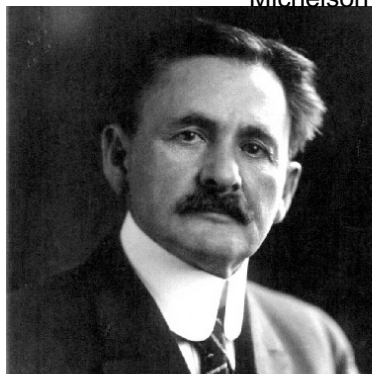
- Propagation en ligne droite
- Réflexion géométrique
- Energie et quantité de mouvement
- Propagation dans le vide
- Effet photoélectrique
- Création de paires de particules



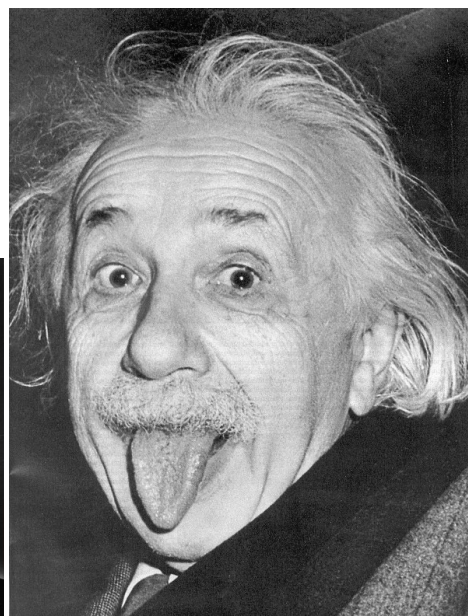
Newton
Michelson



Fermat
Feynman



Les deux!



Onde

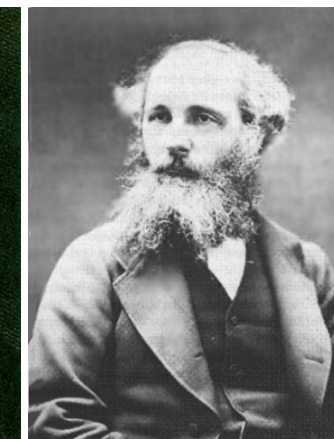
- Interférence
- Diffraction
- Battement
- Les équations de Maxwell

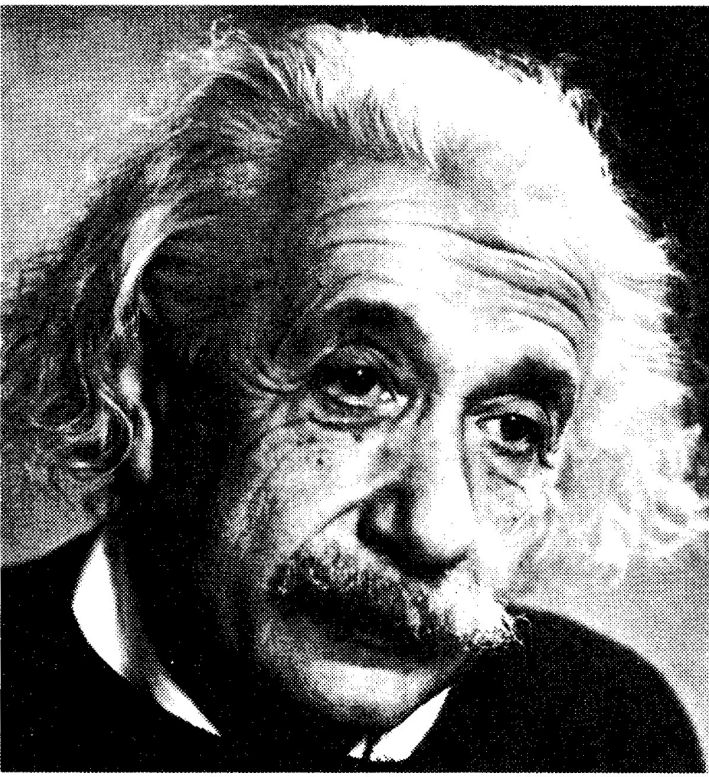


Huygens
Young

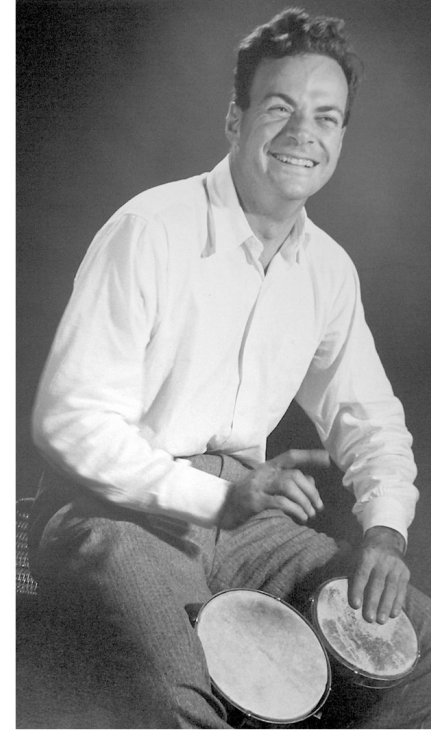


Descartes
Maxwell





Einstein (1879–1955): “Every physicist thinks that he knows what a photon is; I spent my life to find out what a photon is and I still don’t know it.”



I want to emphasize that light comes in this form—particles. It is very important to know that light behaves like particles, especially for those of you who have gone to school, where you were probably told something about light behaving like waves. I’m telling you the way it *does* behave—like particles.

