

Série 4:

* Exercice 1 Le gaz parfait classique

Un gaz *parfait* à l'équilibre est constitué de N particules de masse m enfermées dans une enceinte de volume V et d'énergie totale égale à E (à δE près).

Part I — Particules discernables

Comme dans la dernière Série, on suppose que les particules du gaz sont *discernables*.

- Q1.** Ce système est-il ergodique ?
- Q2.** Rappeler l'expression du nombre $\Omega(E, V, N)$ de microétats compris entre E et $E + \delta E$.
- Q3.** Donner l'expression de l'entropie S_d du gaz parfait. Montrer que la contribution provenant de l'incertitude sur l'énergie δE est négligeable devant les autres termes. En utilisant la formule de Stirling montrer que l'on a :

$$S_d(E, V, N) = Nk \ln \left(\frac{V}{h^3} \left(\frac{4\pi m E}{3N} \right)^{3/2} \right) + \frac{3}{2} Nk + O(\ln N). \quad (1)$$

L'entropie S_d est-elle bien extensive ?

- Q4.** Calculer la température en fonction de l'énergie à partir de l'expression (1) de l'entropie. En déduire la chaleur spécifique à volume constant C_V que l'on comparera aux données expérimentales suivantes mesurées à 300K : Pour l'argon et l'hélium $C_V = 12,47 \text{ J.mol}^{-1}\text{K}^{-1}$ et pour l'air $C_V = 20,85 \text{ J.mol}^{-1}\text{K}^{-1}$.
- Q5.** Donner l'expression de la pression p et retrouver la loi des gaz parfaits.

Distribution de vitesses de Maxwell-Boltzmann

- Q6.** Montrer que la probabilité pour qu'une particule donnée ait une impulsion comprise entre $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ s'écrit

$$P(\mathbf{p}) = \left(\frac{V}{h^3} \right) \frac{\Omega(E - \mathbf{p}^2/2m, V, N - 1)}{\Omega(E, V, N)}. \quad (2)$$

En déduire que dans la limite $N \rightarrow \infty$.

$$P(\mathbf{p}) = \left(\frac{1}{2\pi m k T} \right)^{3/2} e^{-\frac{\mathbf{p}^2}{2mkT}}. \quad (3)$$

Part II — Particules indiscernables

On suppose et prouve que les particules sont *indiscernables*.

- Q1.** Comment $\Omega(E, V, N)$ est-il modifié ? Donner alors l'expression de l'entropie correspondante $S_i(E, V, N)$. L'entropie S_i est-elle bien extensive ?

- Q2.** Les expressions de la température, de la chaleur spécifique à volume constant et de la pression sont-elles modifiées dans le cas de particules indiscernables ?

*** Exercice 2 Cristal paramagnétique, températures négatives et anomalie de Schottky**

Un cristal est constitué de N ions de moment magnétique μ , localisés aux nœuds d'un réseau cristallin placé dans un champ magnétique uniforme et constant $\mathbf{B}$ dirigé selon Oz . On négligera les interactions entre les moments magnétiques et on ne prendra en compte que l'interaction des moments magnétiques avec le champ $\mathbf{B}$. Les valeurs propres d'une composante du moment magnétique d'un porteur sont notées $\pm\mu$ (spin $1/2$). Le système est supposé *isole*. On désigne par N_+ et N_- les nombres de moments magnétiques parallèles et antiparallèles au champ $\mathbf{B}$. On négligera les degrés de liberté autres que le spin.

- Q1.** Pour quelle raison les ions sont-ils discernables ?
- Q2.** Donner l'expression de l'énergie totale E du système en fonction de N_+ et N_- . Exprimer N_+ et N_- en fonction de N et $\epsilon = \frac{E}{N\mu B}$.
- Q3.** Calculer le nombre total $\Omega(E, B, N)$ de microétats accessibles au système en fonction de N et ϵ .
- Q4.** Donner l'expression de l'entropie S du cristal dans la limite $N_+, N_- \gg 1$. L'entropie calculée est-elle extensive ? Montrer que pour N et $\mathbf{B}$ fixes, la fonction $S(E)$ présente un maximum. Tracer la fonction $S(E)$.
- Q5.** Calculer la température T du système en fonction de l'énergie E , pour $\mathbf{B}$ et N fixes. En déduire l'expression des fractions de spins parallèles, $n_+ = N_+/N$, et antiparallèles, $n_- = N_-/N$, en fonction de T .
- Q6.** Tracer la température T du système en fonction de l'énergie E sur tout son domaine de variation possible. La température peut prendre des valeurs négatives. Préciser dans quel domaine d'énergie E . Quelle est l'origine de ce phénomène ? Donner la raison pour laquelle la température du cristal est toujours positive lorsque tous les degrés de liberté du système (ceux de vibration des ions autour des nœuds du réseau, par exemple) sont pris en compte.
- Q7.** Calculer l'aimantation M du système, en déduire l'expression de son énergie et tracer ces deux grandeurs en fonction de la température pour $T > 0$. Calculer sa susceptibilité magnétique:

$$\chi := \lim_{B \rightarrow 0} \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right) \quad (4)$$

- Q8.** Calculer la probabilité P_+ pour qu'un porteur donne ait son moment magnétique parallèle au champ. Exprimer P_+ en fonction de μ , B et T . Quelle est l'énergie moyenne d'un ion ?
- Q9.** Calculer la chaleur spécifique $C = dE/dT$ du système et donner l'allure de la courbe $C(T)$. Que constate-t-on ?