

Série 2: Probabilités

*** Exercice 1 Pile ou face: petites et grandes déviations**

On dispose d'un grand nombre N de pièces de monnaie identiques pour lesquelles la probabilité de tomber du côté pile vaut p et du côté face $q = 1 - p$. On les jette en l'air. On modélise les lancers comme étant indépendants avec chaque lancer étant la réalisation de $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ avec la valeur 1 si la pièce tombe du côté face et la valeur 0 sinon. On définit la somme S_N et la moyenne empirique s_N comme

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i, \quad s_N = \frac{S_N}{N}, \quad (1)$$

- Q1.** Rappelez l'énoncé de la loi des grand nombres. Vers quelle valeur s_N converge ? (et dans quel sens ?)
- Q2.** Donner la formule de la probabilité $\mathbb{P}(S_N = k)$ de trouver exactement k faces parmi les N lancers. (*Bien vérifier la normalisation de la distribution de probabilité!*)
- Q3.** On veut considérer les fluctuations typiques maintenant
- a) Calculer la valeur moyenne du nombre de pièces tombées du côté face et l'écart quadratique moyen. En pratique, pour N grand comment varie l'écart quadratique moyen (et donc la taille des fluctuations typiques) avec N ?
 - b) Donnez le théorème central limite (TCL) dans le cadre de ce problème. Quel est la distribution limite ?
- Q4.** On veut considérer la fluctuation large maintenant
- a) on veut maintenant calculer la probabilité d'observer au moins S faces après N essais. Pour commencer, montrer que pour chaque X_i la fonction caractéristique définie

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}e^{tX} \quad (2)$$

vaut $\varphi_X(t) = (1 - p) + pe^t$. En déduire avec le théorème de Cramers que pour N grand on a en posant $s = S/N$,

$$\mathbb{P}(s_N \geq s) \asymp e^{-NI(s)} \quad (3)$$

avec $I(x) = x \log \frac{x}{p} + (1 - x) \log \frac{1-x}{1-p}$.¹

- b) Montrer par un calcul direct, en approximant le coefficient binomial avec la méthode de Stirling, que l'on peut obtenir directement le même résultat à partir de la probabilité exacte de la question 2. Pourquoi est-ce une conséquence du théorème de Sanov ?
- Q5.** Montrer que l'on retrouve "heuristiquement" le TCL en regardant la fonction de taux $I(\cdot)$ proche de la moyenne. Comment retrouver la moyenne et la variance de X à partir de celle-ci ?

¹on rappelle que la notation $a_N \asymp b_N$ désigne l'égalité des limites: $\lim_{N \rightarrow \infty} \log(a_N)/N = \lim_{N \rightarrow \infty} \log(b_N)/N$.

- Q6.** Vérifier numériquement que la loi de probabilité de la question **Q1** se comporte bien de cette façon à grand N . La comparer l'histogramme avec une distribution Gaussienne Est-ce que la Gaussienne est elle une bonne approximation pour les fluctuations typiques? Jusqu'à quel valeur? Et pour les fluctuations large? Vérifier numériquement que l'on peut bien observer cette fonction de grande déviation en simulation et comparée pour différentes valeurs de N .

* Exercice 2 Volume de l'Hypersphère

Le but de cet exercice est de calculer le volume V_D d'une hypersphère de rayon R dans un espace à D dimensions. Un argument dimensionnel permet d'écrire $V_D = C_D R^D$, où C_D est le volume de l'hypersphère de rayon $R = 1$.

- Q1.** En déduire l'expression de la surface S_D de l'hypersphère de rayon R avec la connaissance de la formule $V_D = C_D R^D$
- Q2.** Représenter la fonction $f(r) = r^D$, où $0 \leq r \leq 1$, pour $D = 1, 2, 10$ et 100 . Soit une boule en dimension D de rayon R et densité massique uniforme ρ . Montrer que la masse de l'enveloppe de surface S_D et d'épaisseur $dR \ll R$ est du même ordre de grandeur que la masse totale de la boule lorsque D est grand.

Reste à calculer la constante C_D .

- Q3.** Donner la valeur de l'intégrale gaussienne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. En déduire la valeur de

$$I_D = \prod_{i=1}^D \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_i^2} dx_i \right) \quad (28)$$

- Q4.** Effectuer le changement de variables $\sum_{i=1}^D x_i^2 = R^2$ et $\prod_{i=1}^D dx_i = dV_D$ et montrer que

$$I_D = \frac{D}{2} C_D \int_0^{+\infty} y^{D/2-1} e^{-y} dy \quad (29)$$

- Q5.** En utilisant la représentation intégrale de la factorielle donnée dans la première Série, en déduire que

$$C_D = \frac{\pi^{D/2}}{\left(\frac{D}{2}\right)!} \quad (30)$$

- Q6.** Vérifier ce résultat pour $D = 1, 2$ et 3 , sachant que $\frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.