- **COORDONNEES CARTESIENNES :**

1. Gradient

$$\mathbf{grad}\ \psi \equiv \nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{e_x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{e_y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e_z}$$

2. Rotationnel

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{A} \equiv \nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{e_x}\ +\ \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{e_y}\ +\ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{e_z}$$

3. Divergence

$$\mathrm{div}\ \mathbf{A} \equiv \nabla\cdot\mathbf{A}\ =\ \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

4. Laplacien

$$\mathrm{div}\ \mathbf{grad}\ \psi \equiv \Delta\psi\ =\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

- **COORDONNEES CYLINDRIQUES :** base $(\mathbf{e_r},\ \mathbf{e}_\varphi,\ \mathbf{e_z})$ usuelle

1. Gradient

$$\nabla\psi\ =\ \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e_z}$$

2. Divergence

$$\nabla\cdot\mathbf{A}\ =\ \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

3. Rotationel

$$\nabla\times\mathbf{A}\ =\left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\mathbf{e_r} + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]\mathbf{e_z}$$

4. Laplacien

$$\Delta\psi\ = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

- **COORDONNEES SPHERIQUES :** base $(\mathbf{e_r},\ \mathbf{e}_\theta,\ \mathbf{e}_\varphi)$ usuelle

1. Gradient

$$\nabla\psi \;=\; \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

2. Divergence

$$\nabla\cdot\mathbf{A} \;=\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\ A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

3. Rotationel

$$\nabla\times\mathbf{A} \;=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\mathbf{e_r}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\mathbf{e}_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\mathbf{e}_\varphi$$

4. Laplacien

$$\Delta\psi \;= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

- **FORMULES UTILES :**

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\big(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\big) &= \big(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\big)\mathbf{b}-\big(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\big)\mathbf{c}\\
\big(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\big)\cdot\big(\mathbf{c}\times\mathbf{d}\big) &= \big(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\big)\big(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\big)-\big(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}\big)\big(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\big)\\
\nabla\times\nabla\psi &= 0\\
\nabla\cdot\big(\nabla\times\mathbf{A}\big) &= 0\\
\nabla\times\big(\nabla\times\mathbf{A}\big) &= \nabla\big(\nabla\cdot\mathbf{A}\big)-\Delta\mathbf{A}\\
\nabla\cdot\big(\psi\mathbf{A}\big) &= \psi\nabla\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\nabla\psi\\
\nabla\times\big(\psi\mathbf{A}\big) &= \psi\nabla\times\mathbf{A}+\nabla\psi\times\mathbf{A}\\
\nabla\big(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\big) &= \mathbf{A}\times\big(\nabla\times\mathbf{B}\big)+\mathbf{B}\times\big(\nabla\times\mathbf{A}\big)+\big(\mathbf{A}\cdot\nabla\big)\mathbf{B}+\big(\mathbf{B}\cdot\nabla\big)\mathbf{A}\\
\nabla\cdot\big(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\big) &= \mathbf{B}\cdot\big(\nabla\times\mathbf{A}\big)-\mathbf{A}\cdot\big(\nabla\times\mathbf{B}\big)\\
\nabla\times\big(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\big) &= \mathbf{A}\big(\nabla\cdot\mathbf{B}\big)-\mathbf{B}\big(\nabla\cdot\mathbf{A}\big)+\big(\mathbf{B}\cdot\nabla\big)\mathbf{A}-\big(\mathbf{A}\cdot\nabla\big)\mathbf{B}\\
\Delta\big(\psi\phi\big) &= \psi\Delta\phi+2\nabla\psi\cdot\nabla\phi+\phi\Delta\psi\\
\Delta\big(\psi\mathbf{A}\big) &= \psi\Delta\mathbf{A}+2(\nabla\psi\cdot\nabla)\mathbf{A}+\mathbf{A}\Delta\psi
\end{aligned}$$

$\mathbf{x}$ les cordonnées d'un point et $\mathbf{n}=\mathbf{x}/\left|\mathbf{x}\right|$ un vecteur unitaire radial, alors

$$\nabla\cdot\mathbf{x}=3 \qquad \nabla\times\mathbf{x}=0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{n}=\frac{2}{|\mathbf{x}|} \qquad \nabla\times\mathbf{n}=0$$

- **THEOREMES DE L'ANALYSE VECTORIELLE :**

Ci-dessous, ϕ et ψ sont des fonctions scalaires, $\mathbf{A}$ est un champ vectoriel et V est un volume 3-dimensionel avec l'élément de volume dV. Le volume V est délimité par une surface 2-dimensionelle fermée $S = \partial V$ avec $d\sigma$ son élément d'aire et $\mathbf{n}$ un vecteur unitaire de la normale, ayant son sens sortant du volume.

1. Théorème de la divergence (Théorème de Gauss)
   - **Flux** d'un champ vectoriel sortant de S: $\int\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma$.

   $$\int\int\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \; dV \;=\; \int\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \; d\sigma$$

   L'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel, étendue à un volume est égale au flux de ce champ sortant de la surface qui limite ce volume.

2. Formule du gradient

   $$\int\int\int_V \nabla\psi \; dV \;=\; \int\int_S \psi\mathbf{n} \; d\sigma$$

3. Formule du rotationnel

   $$\int\int\int_V \nabla \times \mathbf{A} \; dV \;= \int\int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} d\sigma$$

4. Théorème de Green

   $$\int\int\int_V (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi) \; dV \;=\; \int\int_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot \mathbf{n} \; d\sigma$$

5. Théorème de Stokes

   Ci-après, S est une surface 2-dimensionelle ouverte, délimitée par la courbe C avec l'élément curviligne $\mathbf{dl}$. La normale $\mathbf{n}$ de S est définie selon la règle de la main droite, le sens positif étant fixé le long de la courbe.
   - **Circulation** d'un champ vectoriel $\mathbf{A}$ le long de C: $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl}$

   $$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl} \;=\; \int\int_S \big(\nabla \times \mathbf{A}\big) \cdot \mathbf{n} \; d\sigma$$

   La circulation d'un champ vectoriel $\mathbf{A}$ le long d'une courbe fermée C est égale au flux de son rotationnel passant par S, surface délimitée par C.