

Série 6 : Ondes stationnaires et diffraction

1 Figures de Chladni sur une plaque carrée

Les figures de Chladni sont des motifs élégants pouvant être observés sur une plaque en vibration. Celles-ci correspondent aux modes propres de vibration de la plaque. Quand certains de ses modes sont excités, la poudre placée sur la plaque se concentrera alors aux points correspondant aux nœuds des ondes stationnaires excités par la vibration. On souhaite décrire un modèle simple de ces figures de Chladni. Pour réaliser une description simple, on considère une plaque rectangulaire de dimension L_x et L_y . On va tout d'abord considérer que les vibrations respectent l'équation d'onde. Les conditions aux bords de la plaque ne sont pas évidentes à définir. Par simplicité, on va considérer que la déformation principale de la plaque est une déformation sous forme de cisaillement. Pour ce type de déformation et pour éviter une accélération infinie, la pente de la déformation doit être nulle au bord dans la direction perpendiculaire au bord. On a donc les conditions aux bords :



$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, y, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(L_x, y, t) = 0, & 0 \leq y \leq L_y, \forall t \\ \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0, t) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, L_y, t) = 0, & 0 \leq x \leq L_x, \forall t \end{cases}$$

- En utilisant la méthode de séparation de variables, dériver les modes propres de la plaque.
- Quels motifs de Chladni les modes propres trouvés donneraient-ils ? Commenter avec les résultats présentés ci-contre.

2 Diffraction par un trou circulaire

La diffraction par un trou circulaire produit ce qu'on appelle une tâche d'Airy. Cette tâche est notamment la cause d'une limite de résolution des instruments optiques que l'on utilise. Dans cet exercice, on souhaite décrire la figure de diffraction produite par un trou circulaire de rayon R à une distance d d'un écran.

- En supposant que, selon le principe de Huygens-Fresnel, chaque élément de surface $dS(x, y)$ du trou circulaire émet une onde sphérique d'amplitude ξ_0 , montrer que l'amplitude totale de l'onde sur un point $P(X, Y)$ de l'écran est donnée par :

$$\xi(X, Y) = \frac{\xi_0}{d} e^{i(kd - \omega t)} e^{ik\left(\frac{X^2 + Y^2}{2d}\right)} \int_{\text{trou}} e^{-ik\left(\frac{xX + yY}{d}\right)} dS(x, y). \quad (17)$$

Faire les hypothèses $x, y, X, Y \ll d$ (approximation de Fraunhofer) et $x \ll X, y \ll Y$ pour dériver ce résultat.

- Démontrer que l'expression de l'intensité moyenne est donnée par :

$$I(r) = I_0 \left(\frac{2J_1\left(\frac{krR}{d}\right)}{\frac{krR}{d}} \right)^2$$

Considérer des coordonnées polaires et utiliser les identités trigonométriques $\cos(\theta) \cos(\phi) = 1/2(\cos(\theta - \phi) + \cos(\theta + \phi))$ et $\sin(\theta) \sin(\phi) = 1/2(\cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi))$.

Le motif décrit par l'équation ci-dessus correspond au phénomène de tâche d'Airy, qui correspond à la figure de diffraction qui peut être observée lorsque l'instrument de mesure utilisé est de forme circulaire. Cette tâche est donc une limite intrinsèque au pouvoir de résolution.

- (c) Quelle condition est nécessaire à l'observation d'une figure de diffraction ? Si on considère 2 tâches de Airy, discuter des conditions sur l'angle θ_0 séparant les deux objets de sorte qu'ils soient distinguables. On donne que le premier zéro de $J_1(x)$ est donnée par $x_1 \cong 3.83$

Indication La fonction de Bessel d'ordre n J_n est définie par l'intégrale suivante :

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-i(n\theta - x \sin(\theta))} \underset{x \ll 1}{\sim} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

et satisfait à la propriété suivante :

$$x^n J_n(x) = \int_0^x dy y^n J_{n-1}(y)$$

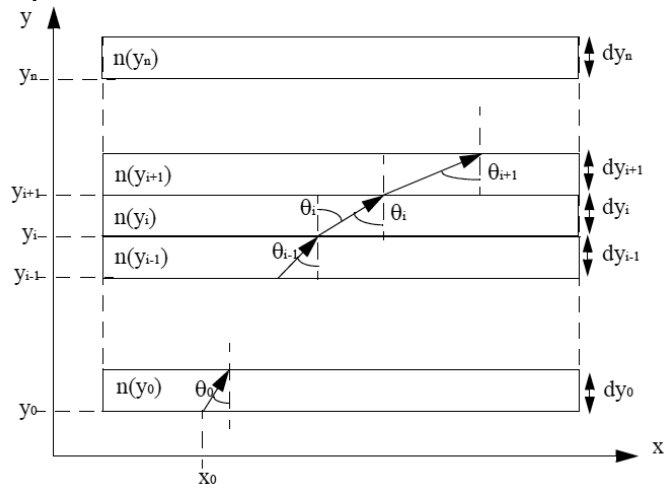
3 Trajectoire dans un milieu non-homogène

Un milieu non-homogène possède un indice de réfraction variant suivant la direction y : $n = n(y)$. Comme illustré sur la figure, un rayon de lumière se propageant dans la direction y entre dans le milieu.

- (a) Montrer que l'équation de la trajectoire du rayon est :

$$x = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{n^2(y)/C^2 - 1}}$$

où $C = n(y_i) \sin(\theta_i)$, pour $i \in [0, a]$.



- (b) On souhaite calculer la trajectoire de la lumière pour un milieu où l'indice de réfraction est linéaire, i.e $n(y) = n_0 + ay$. On suppose le point de départ en $(0,0)$ et que la lumière est initialement parallèle à la direction $\hat{x}$. Donner une expression de la trajectoire $y(x)$. Calculer le rayon de courbure au point $(0,0)$. Comparer ce résultat à celui de l'exercice 1, série 4.

Le phénomène de mirages est également dû à un indice de réfraction inhomogène dans les couches atmosphériques. L'indice de réfraction dépend de la pression, de la température et également de l'humidité. Pour simplifier, on considère que l'indice de réfraction est donné par la relation $n(y) = n_0 \sqrt{1 + ay}$.

- (c) Dériver la forme générale de la trajectoire $y(x)$ d'un rayon lumineux qui passerait par les points $(0,0)$ et $(L,0)$. En quoi cette trajectoire permet-elle d'expliquer le phénomène de mirage ? Discuter l'influence du signe du paramètre a sur le type de mirage observé.

challenge

- (d) Le principe de Fermat permet aussi de résoudre ce problème par une approche différente. Montrer que, en minimisant le temps de trajet de la lumière, le principe de Fermat consiste à minimiser le chemin optique entre A et B :

$$L_{AB} = \int_A^B n \, ds$$

où n est l'indice de réfraction du milieu.

Indication 1 : Imaginer que le milieu est stratifié, i.e. qu'il est composé de nombreuses couches d'épaisseur dy , parallèles à x , dans lesquelles l'indice de réfraction est constant.

Indication 2 : Pour le point b) : $d/dx \cosh^{-1}(x) = 1/\sqrt{x^2 - 1}$.

Indication 3 : La formule du rayon de courbure pour une trajectoire $y(x)$ est donnée par :

$$\rho(x) = \frac{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}}{y''(x)} \quad (44)$$

Indication 4 : Paramétriser la trajectoire du rayon lumineux comme $x(y)$ plutôt que $y(x)$