24 mai 2024

Pré-corrigé 12 : cinématique relativiste

1 Astronaute sur internet

Un astronaute à bord d'une fusée se déplaçant à une vitesse constante u par rapport à la Terre désire surfer sur internet.

(a) Lorsque son horloge de bord indique t'_A après son départ de la Terre, il clique pour se connecter. À quelle position par rapport à la Terre (dans le référentiel de la Terre), se trouve-t-il alors ? Qu'indique l'horloge de la Terre ? Commencer par placer les différents événements sur un diagramme espace temps.

Solution:
$\gamma = 3.2$, $x_A = 1.4 \times 10^{10}$ [m] et $t_A = 48.0$ [s].

(b) Le signal étant transmis par onde radio, qu'indique l'horloge de la Terre lorsque le signal est reçu sur Terre ?

Solution:
$t_B = 93.7$ [s].

(c) Qu'indique alors l'horloge de la fusée ? Vu de la fusée, à quel endroit la Terre se trouve-t-elle alors ?

Solution:
$x'_B = -8.5 \times 10^{10}$ [m] et $t'_B = 300$ [s].

$$t'_B = \frac{t'_A}{1 - \frac{u}{c}} \qquad\qquad x'_B = \frac{-ut'_A}{1 - \frac{u}{c}} = -ut'_B$$

(d) La Terre renvoie immédiatement un signal de confirmation, également par onde radio. Qu'indique l'horloge de la fusée lorsque l'astronaute reçoit le signal de confirmation ? Sur son horloge, combien de temps s'est-il écoulé entre l'instant où il a cliqué et l'instant où il reçoit la confirmation ?

Solution:
$t'_C = 585$ [s] et $\Delta t = 570$ [s].

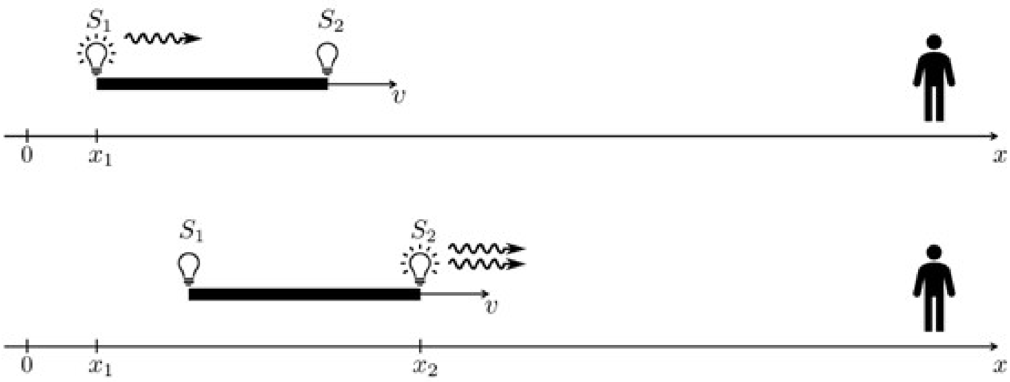
Application numérique : $u = 0.95c$, $t'_A = 15s$

2 Barre relativiste en mouvement

Une barre de longueur au repos L_0 se déplace à vitesse v vers un observateur immobile. Deux lampes S_1 et S_2 sont fixées aux extrémités de la barre. La lampe S_1 s'allume plus tôt que la lampe S_2 de sorte que les deux impulsion lumineuses arrivent à l'observateur en même temps. Au moment de l'émission de la lumière, les lampes S_1 et S_2 se trouvaient respectivement aux points x_1 et x_2 (voir figure). Quelle est la distance $x_2 - x_1$ entre les lampes mesurées par l'observateur ?

Solution:

$$x_2 - x_1 = L_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$



3 Physique des particules

Parmi les innombrables particules observées dans l'accélérateur du LHC au CERN (Genève), on rencontre parfois la particule nommée Λ_0. Sa durée de vie au repos est de τ_0, après quoi elle se désintègre. Les appareils de mesure la repèrent pendant $\tau = \frac{13}{5}\tau_0$. *Indication : Le problème est unidimensionnel.*

(a) Montrer que la vitesse de la particule par rapport aux appareils de mesure est de $v = \frac{12}{13}c$. Quelle est la longueur L de sa trace (le chemin enregistré par le détecteur depuis son apparition jusqu'à sa désintégration) ? De quelle longueur L_0 est la trace de la particule dans son référentiel propre ?

Solution:

$$L = v\tau = \frac{12}{13}c\tau, \tag{15}$$

$$L_0 = v\tau_0 = \frac{12}{13}c\tau_0 \tag{16}$$

(b) On détecte deux particules Λ_0 créées au même moment et au même endroit. Elles se déplacent avec des vitesses de normes égales à $v = \frac{12}{13}c$, mais de directions opposées. Quelle est la vitesse u de l'une par rapport à l'autre ? Est-ce qu'elles se désintègrent en même temps dans le laboratoire ? Même question, dans le référentiel de l'une des particules ? Justifier les réponses par des calculs.

4 Simultanéité

Dans un référentiel R, deux événements 1 et 2 ont lieu en $(x_1 = x_0,\ t_1 = x_0/c)$ et $(x_2 = 2x_0,\ t_2 = x_0/2c)$. Quelle est la vitesse du référentiel R' dans lequel les deux événements ont lieu simultanément ? Déterminer l'instant correspondant.

Solution:

$$v = -\frac{c}{2}, \tag{25}$$

$$t'_1 = t'_2 = \sqrt{3}\frac{x_0}{c}. \tag{26}$$

5 Invariance des équations de Maxwell, partie 2

Note : La première partie de cet exercice a été traitée comme exercice dans la série de la semaine précédente.

Dans cet exercice, on se propose de trouver quelle transformation laisse l'équation d'onde des champs électromagnétiques invariante. En définissant l'opérateur d'Alembertien $\Box = \partial^2/\partial(ct)^2 - \nabla^2$, on a montré que l'équation d'onde n'est pas invariante sous les transformations de Gallilée et donc que les transformations gallileénes ne sont pas adaptés pour l'électromagnétisme. On va maintenant identifier les transformations qui rendent l'équation d'onde invariante et vérifier que c'est bien le cas pour les transformations de Lorentz.

(a) Décomposer l'opérateur $\Box$ à l'aide de l'opérateur $\nabla \equiv (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)^T$ et d'une matrice diagonale G qu'il faudra préciser.

Solution:
Il faut introduire une matrice G, appelée métrique de Minkoswki, dont l'expression est donnée par :

$$G = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{31}$$

et donc la décomposition suivante pour l'opérateur $\Box$:

$$\Box = \begin{pmatrix} \partial_t & \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \tag{32}$$

(b) Démontrer que celle-ci doit satisfaire la relation suivante :

$$G = \Lambda^T G \Lambda,$$

On supposera la transformation linéaire, c'est-à-dire $\vec{x}' = \Lambda\vec{x}$ où Λ est une matrice 4x4.

(c) Démontrer que ces matrices Λ forment un groupe. Montrer qu'elles prennent la forme suivante :

$$\Lambda_x(\beta) = \left(\begin{array}{cc|c} \gamma & -\beta\gamma & \multirow{2}{*}{0} \\ -\beta\gamma & \gamma & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I \end{array}\right),$$

ce qui correspond au changement de coordonnées du référentiel $\mathcal{R}'$ décrit au point (a) avec $\beta = v/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

(d) Pour les curieux : Montrer que les rotations spatiales appartiennent également à ce groupe.

Indication : Appliquer le changement de coordonnées comme précedemment au point (a) aux équations de Maxwell et écrire $\vec{E}' = C\vec{E}$. De quelle forme doit être C afin que les équations de Maxwell soient invariantes par $\Lambda_x(\beta)$.