17 mai 2024

Pré-corrigé 11 : Relativité restreinte : Contraction des longueurs et dilatation du temps

1 Invariance des équations de Maxwell, partie 1

Note : La deuxième partie de cet exercice sera proposée comme exercice dans la série de la semaine prochaine.

Dans cet exercice, on se propose de trouver quelle transformation laisse l'équation d'onde des champs électromagnétiques invariante. En définissant l'opérateur d'Alembertien $\Box = \partial^2/\partial(ct)^2 - \nabla^2$, l'équation d'onde s'écrit :

$$\Box\vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \Box\vec{B} = 0$$

(a) On commence par supposer un référentiel $\mathcal{R}'$ en mouvement rectiligne uniforme le long de l'axe $\vec{e}_x$ de vitesse v par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ supposé au repos. En utilisant les transformations galiléennes, réécrivez les équations d'onde électromagnétiques en termes des coordonnées (t',$\vec{x}'$) de $\mathcal{R}'$.

Solution:
L'équation d'onde dans les nouvelles coordonnées s'écrit :

$$\begin{aligned}\Box\vec{E} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'^2}\right)\vec{E} - \nabla'^2\vec{E} \\ &= \Box'\vec{E} - \frac{v}{c^2}\left(2\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x'\partial t'} - v\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x'^2}\right)\end{aligned}$$

(b) Conclure qu'il est impossible de réécrire les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ de sorte à ce que l'équation d'onde soit invariante. On supposera que seul les transformations linéaires des champs électromagnétiques du type $\vec{E'} = C\vec{E}$ sont possibles.

2 Fusée relativiste

Un observateur S est sur une plateforme de longueur $D_0 = 65\,m$, dans une station spatiale. Une fusée passe à une vitesse relative $u = 0.8c$ parallèle au côté de la plateforme. L'observateur S remarque qu'à un certain instant, l'avant et l'arrière de la fusée passent simultanément en face des deux extremités de la plateforme.

(a) Selon S, quel est le temps mis par la fusée pour passer en face d'un point donné de la plateforme ?

Solution:

$$\Delta t_0 = \frac{L}{0.8c} = \frac{65\,m}{2.4 \cdot 10^8\,ms^{-1}} = 0.27\,\mu s$$

(b) Quelle est la longueur propre L_0 de la fusée ?

Solution:

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{65\,m}{\sqrt{1-0.8^2}} = 108\,m$$

(c) Pour un observateur S' se situant dans la fusée, quelle est la longueur D de la plateforme ?

Solution:

$$D = D_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = 65\,m \cdot \sqrt{1-0.8^2} = 39\,m$$

(d) Pour S', combien de temps cela prend-il pour que l'observateur S passe d'un bout à l'autre de la fusée ?

Solution:

$$\Delta t' = \frac{L_0}{0.8c} = \frac{108\,m}{2.4\cdot 10^8\,ms^{-1}} = 0.45\,\mu s$$
$$\Delta t' = \gamma\Delta t = \frac{0.27\,\mu s}{\sqrt{1-0.8^2}} = 0.45\,\mu s$$

(e) Selon S, les deux extrémités de la fusée s'alignent simultanément avec les deux extrémités de la plateforme. Ces deux événements sont-ils également simultanés pour S' ?

3 Cinématique relativiste

Une barre de longueur l voyage dans la direction Ox à une vitesse v par rapport à un référentiel R. Dans son référentiel propre R', cette barre est inclinée d'un angle θ_0 par rapport à l'axe Ox. Quelle doit être sa vitesse pour que dans R, elle ait un angle d'inclinaison $\theta = \frac{\pi}{4}$?

Solution:

$$v = c\sqrt{1-\tan^2\theta_0}$$