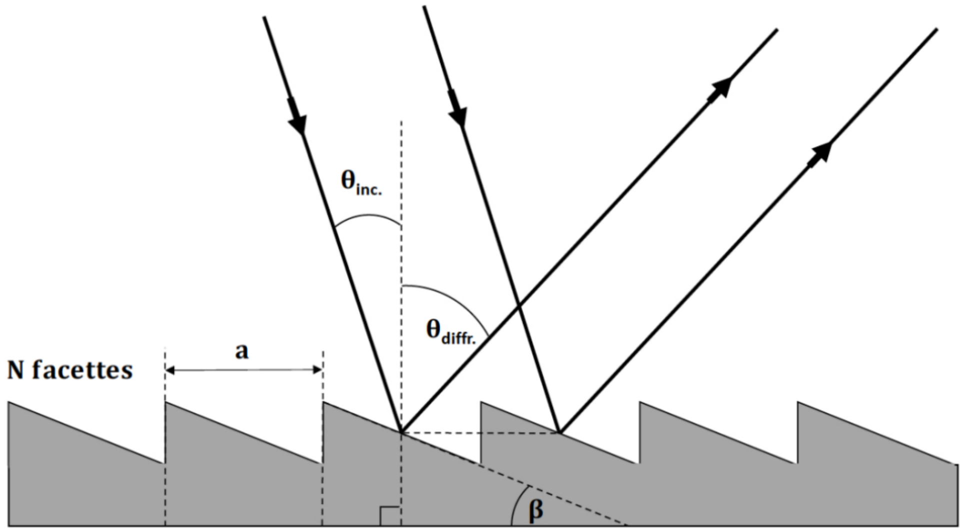
10 mai 2024

Pré-corrigé 10 : Test à blanc

1 Diffraction par un réseau échelette

Dans les spectromètres optiques, les réseaux échelettes de diffraction sont un composant essentiel. Ces derniers permettent de concentrer une grande partie de l'intensité diffractée dans une direction donnée afin d'augmenter la résolution spectrale. Un réseau échelette est constitué de N facettes réfléchissantes, espacées d'une distance a et inclinées d'un angle β par rapport au plan macroscopique de réseau (voir figure ci-dessous). On considère un tel réseau éclairé par des ondes planes monochromatiques d'une longueur d'onde λ, toutes incidentes à un angle θ_{inc} par rapport à la normale au plan macroscopique du réseau. On se pose l'objectif de calculer la distribution angulaire de l'intensité lumineuse selon l'angle θ_{diffr} collectée sur un écran lointain (approximation de Fraunhofer).



Dans un premier temps, on considère la figure de diffraction de l'onde réfléchie par une seule facette

(a) Montrer que la figure de diffraction d'une facette peut être écrite comme

$$I = I_0 \,\text{sinc}^2(\chi), \tag{1}$$

où $\chi = k\Delta/2$, avec k le vecteur d'onde et Δ la différence de chemin parcourue par la lumière pour deux rayons, qu'on devra spécifier en fonction des paramètres donnés.

Ensuite, on considère la figure d'interférences produite par N facettes en négligeant la diffraction.

(b) Exprimer la distribution d'intensité de la figure d'interférence des N facettes. Montrer qu'elle peut être exprimée comme

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(N\Delta\phi/2)}{\sin(\Delta\phi/2)}\right]^2,$$

avec $\Delta\phi$ le déphasage créé entre deux faisceaux réfléchis par deux facettes qu'il faudra exprimer en fonction des données du problème. Donner la condition pour obtenir les maxima d'intensités.

Maintenant, on considère l'effet combiné de l'interférence et de la diffraction.

(c) Exprimer la distribution d'intensité de la figure de diffraction totale du réseau de la figure ci-dessus en fonction de χ et des autres paramètres du système.

Solution:
La figure de diffraction totale observée correspond à une combinaison de la diffraction trouvée au point (a) et les interférences trouvées au point (b).

$$I(\theta_{\text{diffr}}) = I_0 \cdot \text{sinc}^2(\chi) \cdot \left[\frac{\sin(N\Delta\phi/2)}{\sin(\Delta\phi/2)}\right]^2$$

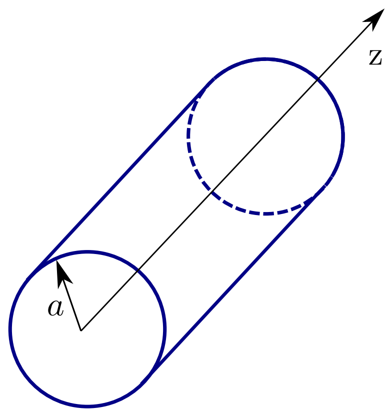
(d) Comment pourrait-on faire coïncider le maximum de diffraction avec un maxima d'interférence ? Donner l'expression de β qui permettrait cette coïncidence.

Solution:

$$\beta = \frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{m\lambda}{a} + \sin(\theta_{\text{inc}})\right) - \frac{\theta_{\text{inc}}}{2}$$

2 Guide d'onde et cavité cylindrique

Dans cet exercice, on s'intéresse à la propagation d'une onde dans un guide d'onde cylindrique, infiniment long et de rayon a. On considère une onde électromagnétique qui se propage dans la direction de l'axe de symétrie du cylindre, noté z. Pour simplifier, on va considérer un mode dont le champ électrique possède des composantes uniquement dans le plan transverse à la propagation, autrement dit $E_z = 0$. De plus, on considère une propagation avec des réflections totales sur les parois du guide d'onde (conducteur parfait).



(a) Dans un premier temps, on se propose de dériver l'expression du champ électrique. Pour un problème de ce type, il est plus simple d'utiliser le potentiel vecteur $\vec{F}$ (noter qu'il ne s'agit pas du potentiel vecteur $\vec{A}$ usuel) définit comme

$$\vec{E} = -\frac{1}{\epsilon}\vec{\nabla} \times \vec{F}, \tag{19}$$

avec ϵ la permittivité du milieu remplissant le cylindre. Montrer que $\vec{F}$ satisfait la même équation d'onde que $\vec{E}$. Si on considère les champs électriques et magnétiques avec une dépendance harmonique (c'est à dire $E, B \sim \exp(i\omega t)$), montrer qu'on obtient :

$$\nabla^2\vec{F} = -k^2\vec{F}, \tag{20}$$

où $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$, avec μ la perméabilité magnétique du milieu remplissant le cylindre. L'avantage de l'utilisation de $\vec{F}$ vient du fait que dans ce cas, on peut faire l'hypothèse que $\vec{F} = F_z\hat{z}$. En considérant les coordonnées cylindriques et une solution pour F_z de la forme $F_z(\rho, \phi, z) = f(\rho)g(\phi)h(z)$, montrer que le champ électrique peut être exprimé comme :

$$E_\rho = -\frac{m}{\epsilon\rho}\left[A_1 J_m(k_\rho\rho) + B_1 Y_m(k_\rho\rho)\right]\left[-C_2\sin(m\phi) + D_2\cos(m\phi)\right] \cdot \left[C_3\cos(k_z z) + D_3\sin(k_z z)\right],$$

$$E_\phi = \frac{k_\rho}{\epsilon}\left[A_1 J_m'(k_\rho\rho) + B_1 Y_m'(k_\rho\rho)\right]\left[C_2\cos(m\phi) + D_2\sin(m\phi)\right] \cdot \left[C_3\cos(k_z z) + D_3\sin(k_z z)\right],$$

$$E_z = 0,$$

où k_ρ et k_z sont des constantes qu'on déterminera par la suite.

(b) Quels sont les conditions aux bords que le champ électrique doit satisfaire ? Appliquer les conditions aux bords que le champ électrique doit satisfaire et trouver une expression pour k_z en fonction du rayon a, de k et de χ_{mn}, le n-ième zéro de J'_m, la dérivée première de la fonction de Bessel J_m d'ordre m. Déterminer la fréquence de coupure, définie comme la fréquence minimale en dessous de laquelle l'onde devient evanescente (décroit exponentiellement) dans le guide d'onde. Déterminer finalement la longueur d'onde guidée.

Solution:

La solution pour $(k_z)_{mn}$ est :

$$(k_z)_{mn} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\chi_{mn}}{a}\right)^2} \tag{43}$$

Le fréquence de coupure est donnée par :

$$(f_c)_{mn} = \frac{\chi_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}}. \tag{44}$$

La longueur d'onde guidée est donnée par :

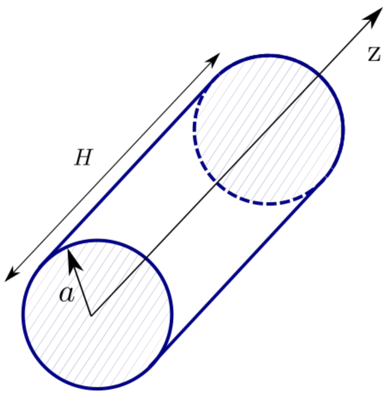
$$(\lambda_g)_{mn} = \begin{cases} \frac{2\pi}{k\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} & \text{si } k > \left(\frac{\chi_{mn}}{a}\right) \\ \infty & \text{si } f = (f_c)_{mn} \end{cases}$$

(c) Comme application numérique (estimation d'ordre de grandeur), considérons un guide d'onde cylindrique de rayon $a = 3\,\mathrm{cm}$ rempli d'un matériau diélectrique ($\epsilon_r = 3$) qui est utilisé pour propager le mode qui correspond à $m = 1$ et $n = 1$. Calculer la bande de fréquence où le guide d'onde peut être utiliser pour la propagation de ce mode. On donne dans le tableau ci-dessous quelques valeurs approximées de χ_{mn}(pour les calculs, on approximera $\epsilon_0 \sim 9{\cdot}10^{-12}\,\mathrm{Fm}^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Hm}^{-1}$).

	m = 0	m = 1	m = 2
n = 1	4	2	3
n = 2	7	5	7

Solution:
Le mode $m = 1$,$n = 1$ peut être excité dans le guide d'onde entre 2 GHz, sa propre fréquence de coupure, et 3 GHz. En dessus de cette fréquence, le premier mode d'ordre supérieur, le mode avec $m = 2$,$n = 1$ peut également être excité. La bande de fréquence qui permet de propager uniquement le mode TE_{11} est donc large de 1 GHz.

(d) Considérons maintenant une situation similaire au guide d'onde cylindrique traité auparavant, mais avec deux extrémités axiales fermées espacées d'une distance H. Cette configuration correspond à une cavité résonante qui peut être utilisée pour stocker de l'énergie sous forme électromagnétique. Trouver la condition de résonance d'une telle cavité en appliquant les conditions aux bord et exprimer la fréquence de l'onde satisfaisant cette condition (c'est à dire la fréquence de résonance).



Solution:

$$(fr)_{mnp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{\chi_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2},$$

(e) Un des paramètres les plus importants d'une cavité résonante est son facteur de qualité Q, qui est défini comme le rapport entre l'énergie électromagnétique stockée dans la cavité et la puissance dissipée à chaque période de l'oscillation.

$$Q = \omega \frac{\text{Energie stockée}}{\text{Puissance dissipée}}. \tag{61}$$

Pour le cas de la cavité cylindrique, exprimer le facteur de qualité Q dans le cas où le mode résonant étudié à la question (d) est excité dans la cavité. Pour le terme dissipatif, on va considérer que les parois du cylindre ont une résistance de surface R_s non nulle, où une partie de la puissance électromagnétique est dissipée. La résistance de surface R_s est définie comme le rapport entre le champ électrique à la surface et la densité de courant de surface.

Comme une expressions analytique est difficile à dériver, on se contentera de trouver une expression de Q en fonction des composantes des champs électriques et magnétiques.

Solution:

$$Q = \omega\frac{W}{P_d} = \frac{\omega\epsilon}{R_s}\frac{\int\int\int_V E_\rho^2 + E_\phi^2 dV}{\int_0^{2\pi}\int_0^H (H_\rho^2 + H_\phi^2 + H_z^2)_{\rho=a} a d\phi dz + 2\int_0^{2\pi}\int_0^a (H_\rho^2 + H_\phi^2 + H_z^2)_{z=0}\rho d\rho d\phi}$$