

26 avril 2024

Pré-corrigé 8 : Propriétés de base des ondes électromagnétiques

1 Polarisation : représentation de Jones

La représentation de Jones est un formalisme vectoriel décrivant les ondes polarisées. Pour le cas d'une onde EM polarisée, $\vec{E} = E_x \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \phi_x) \vec{e}_x + E_y \sin(\vec{k} \cdot \vec{y} - \omega t + \phi_y) \vec{e}_y$ peut aussi s'écrire comme :

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} E_x e^{i\phi_x} \\ E_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right]$$

L'intensité I d'une onde est donnée par $I \propto \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}$. L'avantage de ce formalisme est de représenter simplement les ondes EM polarisées et également représenter matriciellement les polariseurs :

(a) Écrivez dans la représentation de Jones les ondes électromagnétiques polarisées suivantes :

- Polarisée rectiligne parallèle à $\vec{e}_x$
- Polarisée rectiligne faisant un angle $\theta = \pi/4$ avec $\vec{e}_x$
- Polarisée circulaire droite et gauche
- Polarisée elliptiquement de demi-grand axe égale 2 fois plus grand que le demi-petit axe

Solution:

- Polarisée rectiligne parallèle à $\vec{e}_x$

$$\mathbf{E}_1 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Polarisée rectiligne faisant un angle $\theta = \pi/4$ avec $\vec{e}_x$

$$\mathbf{E}_2 \propto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Polarisée circulaire droite et gauche

$$\mathbf{E}_3 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

ou

$$\mathbf{E}_4 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

- Polarisée elliptiquement de demi-grand axe égale 2 fois plus grand que le demi-petit axe

$$\mathbf{E}_5 \propto \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}.$$

(b) Un polariseur rectiligne est perméable à la composante parallèle à l'axe du polariseur. En supposant une onde EM incidente polarisée rectiligne de norme E et parallèle à $\vec{e}_x$, donner la forme matricielle du polariseur rectiligne idéale qui fait un angle θ avec l'axe $\vec{e}_x$. En déduire la loi de Malus, qui donne l'expression de l'intensité de l'onde sortante I en fonction de l'intensité I_0 de l'onde incidente sur le polariseur et de l'angle θ :

$$I = I_0 \cos^2(\theta). \quad (6)$$

Quelle est l'intensité moyenne d'une onde EM non polarisée ?

Solution:

La valeur moyenne de l'intensité est :

$$\langle I \rangle = \frac{I_0}{2} \quad (7)$$

- (c) Le Polaroid est un filtre rectiligne non-idéale, c'est-à-dire que celui-ci a une transmittance T_1 le long de la direction privilégiée et T_2 le long de la direction perpendiculaire., où $T_2 < T_1 \leq 1$. En considérant ces hypothèses, réécrire la forme matricielle de la matrice représentant le filtre Polaroid quand la direction privilégiée est :

- parallèle à l'axe $\vec{e}_x$
- faisant un angle θ avec l'axe $\vec{e}_x$

Dériver la loi de Malus dans le cas du filtre Polaroid. Que constate-t-on ?

Solution:

La loi de Malus pour le Polaroid est donnée par :

$$I = \|P(\theta)E\vec{e}_x\|^2 = (T_1 \cos^2(\theta) + T_2 \sin^2(\theta))I_0. \quad (14)$$

- (d) Les lames à retard sont des polariseurs particuliers, introduisant une phase $\phi/2$ qui retarde la composante perpendiculaire à l'axe optique, un axe de symétrie de la lame à retard qui est choisi comme référence. Donner la forme générale d'une lame à retard si l'axe optique fait un angle θ avec $\vec{e}_x$. Que peut-on dire de ce polariseur si $\phi = \pi$? et quand $\phi = \pi/2$?

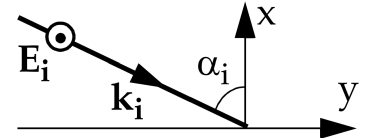
Solution:

la forme générale de la lame à retard pour un angle θ quelconque entre l'axe optique et $\vec{e}_x$.

$$Q_\phi(\theta) = R(\theta)Q_\phi(\theta=0)R(\theta)^T = e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)e^{i\phi} & \sin(\theta)\cos(\theta)(1 - e^{i\phi}) \\ \sin(\theta)\cos(\theta)(1 - e^{i\phi}) & \cos^2(\theta)e^{i\phi} + \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

2 Réflexion d'une onde EM sur un miroir parfaitement réfléchissant

Une onde électromagnétique plane sinusoïdale se propage dans le vide. Elle arrive, sous un angle d'incidence α_i sur une surface plane Σ parfaitement réfléchissante. Le champ électrique $\mathbf{E}_i$ est normal au plan d'incidence O_{xy} , O_x étant normal à Σ .



- (a) Montrer que le champ électrique $\mathbf{E}$, résultant de l'interférence de $\mathbf{E}_i$ avec le champ $\mathbf{E}_r$ de l'onde réfléchie, est une onde se propageant selon y , dont l'amplitude dépend de x .

Solution:

Le champ électrique totale est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}_i(\mathbf{x}, t) + \mathbf{E}_r(\mathbf{x}, t) = E_0(\sin(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega t) - \sin(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} - \omega t))\mathbf{e}_z \\ &= 2E_0 \cos(k \sin(\alpha_i)y - \omega t) \sin(k \cos(\alpha_i)x)\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

- (b) Déterminer les plans nodaux et les plans ventraux de $\mathbf{E}$.

Solution:

Les plans nodaux et ventraux, parallèles à O_{yz} , sont tels que $\mathbf{E}$ est nul, respectivement

maximal et minimal, en tenant compte que $k = 2\pi/\lambda$:

$$x_{no} = \frac{(n + \frac{1}{2})\lambda}{2 \cos(\alpha_i)} \text{ et } x_v = \frac{n\lambda}{2 \cos(\alpha_i)}, \text{ où } n \text{ est un entier positif ou nul.}$$

- (c) Exprimer la vitesse de phase u de $\mathbf{E}$ en fonction de la vitesse de la lumière c et α_i , puis discuter.

Solution:

La vitesse de phase vaut :

$$u = \frac{\omega}{k_y} = \frac{\omega}{k \sin(\alpha_i)} = \frac{c}{\sin(\alpha_i)} > c$$

- (d) Exprimer, par un raisonnement mathématique puis par un raisonnement géométrique, la vitesse de groupe v de $\mathbf{E}$.

Solution:

$$v = \frac{d\omega}{dk_y} = \frac{d}{dk_y}(ck) = c \frac{d}{dk_y} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \frac{ck_y}{k} = c \sin(\alpha_i).$$

On place un second miroir plan parfait Σ' parallèle à Σ , à une distance X de Σ égale à celle de l'un des plans nodaux de $\mathbf{E}$. L'onde incidente subit ainsi des réflexions multiples entre Σ et Σ' .

- (e) Calculer la vitesse de phase u en fonction de X , λ et c . Montrer ensuite que pour tout X donné, il existe une longueur d'onde λ_c et donc une pulsation ω_c de coupure au-dessous de laquelle l'onde de $\mathbf{E}$ ne se propage pas.

Solution:

La vitesse de phase u est :

$$u = \frac{\omega}{k_y} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{n^2 \lambda^2}{4X^2}}}$$

La fréquence de coupure est donnée par $f_c = \frac{c}{2X}$.

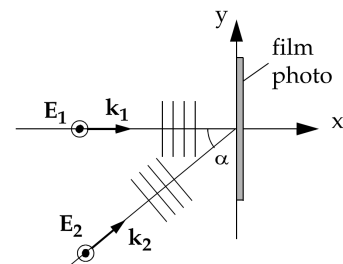
- (f) Déterminer la relation de dispersion de cette onde

Solution:

$$\omega^2 = c^2 k_y^2 + \omega_c^2$$

3 Holographie : principe de base

Le principe de l'holographie repose sur l'interférence entre 2 ondes incidentes. Soit deux ondes lumineuses planes, cohérentes, de même longueur λ , de même intensité, polarisée linéairement et de vecteur $\mathbf{E}$ parallèle à l'axe z . Le vecteur d'onde $\mathbf{k}_1$ de la 1ère onde est parallèle à x et le vecteur d'onde $\mathbf{k}_2$ de la seconde forme un angle α par rapport à x .



- (a) Montrer que l'intensité résultant de la superposition des 2 ondes dans le plan $x = 0$ est donnée par :

$$I(y) = I_0 \cos^2 \left(\frac{1}{2} k y \sin(\alpha) \right)$$

On place dans le plan $x = 0$ un film photographique dont le noircissement est proportionnel à l'intensité $I(y)$ incidente sur ce film.

- (b) Montrer que si l'on envoie sur le film noirci une onde incidente de vecteur $\mathbf{k}_1$, seules les intensités diffractées dans les directions $\theta = 0$ et $\theta = \pm a$ sont non nulles : principe de l'holographie.

