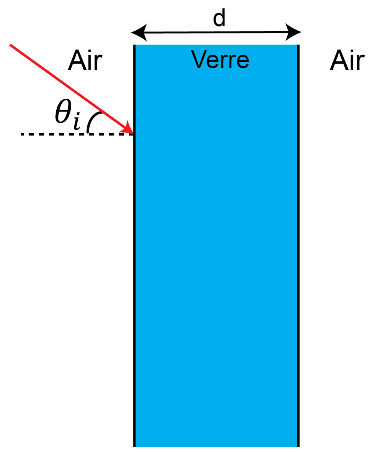
19 avril 2024

Pré-corrigé 7 : Interférences et diffraction

1 Interferométrie de Fabry-Perot



Un interferomètre de Fabry-Parot est un instrument optique composé de 2 miroirs semi-réflechissants. Il permet de laisser passer uniquement les longueurs d'onde de la lumière incidente qui sont en résonance avec la cavité optique formée par les 2 miroirs. Dans cet exercice, on se propose d'étudier la figure d'interférences de cet interféromètre et déduire certaines de ces propriétés. Pour simplifier l'analyse, on considère une onde chromatique incidente sur une lame de verre de largeur d et d'indice de réfraction n avec un angle incident θ_i par rapport à la normale. Le premier rayon incident est réfracté avec un angle θ_r.

(a) Expliquer avec un diagramme comment se comporte le rayon lumineux incident dans la lame de verre, puis en sortie de l'autre côté de la lame de verre. Pour deux rayons successif en sortie, calculer la différence de marche delta et en déduire la différence de phase $\Delta\phi$ entre deux rayons réfractés par les 2 miroirs en fonction de θ_r

Solution:
La différence de marche est donnée par :

$$\delta = 2nd\cos(\theta_r)$$

La différence de phase δ est donc donnée par :

$$\Delta\phi = \frac{4\pi nd}{\lambda}\cos(\theta_r)$$

(b) On suppose que le coefficient de réflexion à l'interface verre-air est égal à $R < 1$. Calculer l'amplitude $s_n(\Delta\phi)$ de chaque refraction en sortie de l'interféromètre. En déduire l'intensité total s_{tot}.

Solution:
L'amplitude totale de l'onde transmise s_{tot} :

$$s_{tot} = s_0\left(\sum_{m=0}^{\infty} Re^{im\Delta\phi}\right) = \frac{s_0}{1-Re^{i\Delta\phi}} = \frac{(1-R)s_i}{1-Re^{i\Delta\phi}}$$

(c) Montrer que la transmittance est donnée par l'expression :

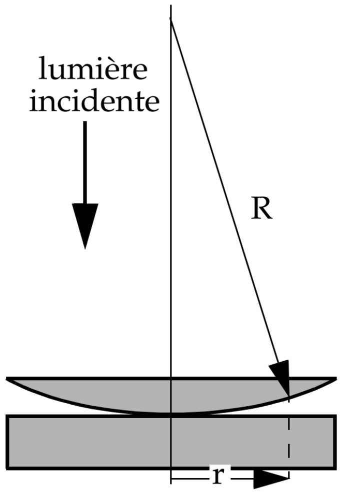
$$T(\theta_r) = \frac{1}{1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\Delta\phi(\theta_r)}{2}}$$

(d) Donner les conditions pour avoir un maximum la transmittance et dessiner la transmittance pour un angle θ_r fixe en fonction de $\Delta\phi$ puis de λ. Que remarque-t-on ? En déduire une application de l'interferomètre de Fabry-Perot.

Solution:
Les maximas de la transmittance ont lieu quand :

$$\text{maximas} : \frac{\Delta\phi}{2} = m\pi \Longrightarrow \lambda_m = \frac{2nd\cos(\theta_r)}{m}$$

2 Anneaux de Newton



Une lentille optique plan-convexe, posée sur une plaque de verre, est illuminée par une onde monochromatique. On suppose que l'épaisseur d de la couche d'air sous la lentille est négligeable par rapport au rayon R, i.e $d \ll R \, \forall r$.

(a) En utilisant l'approximation citée ci-dessus, déterminer l'épaisseur $d(r)$ de la couche d'aire sous la lentille. Sous cette hypothèse, la surface de la lentille peut être approximée comme parallèle à la plaque de verre. Décrire le comportement d'un faisceau incident réfléchi aux différents interfaces.

(b) Montrer qu'un observateur placé au-dessus de la lentille observe des interférences qui se manifestent par des anneaux concentriques alternativement sombres et clairs appelés *Anneaux de Newton*. Déterminer le rayon r_m du m i-ème anneau sombre ainsi que la loi décrivant l'augmentation du rayon entre deux anneaux sombres consécutifs.

Solution:

$$r_m = \sqrt{m\lambda R}.$$

(c) Quelle est l'aire séparant deux anneaux sombres ; dépend-elle de m ?
Solution:
L'aire séparant r_m et r_{m+1} est donnée par :

$$A_m = \pi(r_{m+1}^2 - r_m^2) = \pi\lambda R = \text{cst}$$

(d) Déterminer la loi décrivant le rayon r'_m de la même interférence constructive.
Solution:

$$r'_m = \sqrt{(m + \frac{1}{2})\lambda R}$$

3 Pression de radiation

Dans cet exercice, on s'intéresse à dériver l'expression de la pression de radiation par 2 approches différentes.

On considère une onde électromagnétique plane progressive se propageant dans le vide et incidente sur une surface plane en $x = 0$.

$$\vec{E}_i = Re\left(E_{0,i}e^{i(kx-\omega t)}\vec{e}_y\right) = E_{0,i}\cos(kx-\omega t)\vec{e}_y$$

En $x = 0$, on suppose que la surface plane correspond à un miroir métallique, parfaitement conducteur. Les conditions aux bords imposent que, en $x = 0$, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls. Ceci implique donc une onde électromagnétique réflechie

$$\vec{E}_r = Re\left(E_{0,r}e^{i(kx+\omega t)}\vec{e}_y\right) = E_{0,r}\cos(kx+\omega t)\vec{e}_y$$

(a) Déterminer l'amplitude $E_{0,r}$ en fonction de $E_{0,i}$. Donner une expression pour les champs électrique et magnétique $\vec{E}$ et $\vec{B}$ résultants pour $x < 0$. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\langle\vec{S}\rangle$, ainsi que la densité volumique d'énergie moyenne de l'onde électromagnétique.

Solution:
On a $E_{0,r} = -E_{0,i}$. Le champ électrique est donné par :

$$\vec{E}_{\text{tot}} = 2E_0\sin(kx)\sin(\omega t)\vec{e}_y.$$

Le champ magnétique est :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos\Big(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\Big)\left(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\times\vec{u}\right)$$

La densité volumique d'énergie moyenne de l'onde électromagnétique est donnée par :

$$u_v = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0|\vec{E}|^2 + \frac{|\vec{B}|^2}{\mu_0}\right).$$

La moyenne du vecteur de Poynting peut s'écrire comme :

$$\langle\vec{S}\rangle = c\langle u_v\rangle\vec{e}_x.$$

(b) Déterminer la charge surfacique σ et le courant surfacique $\vec{J}_s$ en $x = 0$
Indication Les conditions de bord à l'interface entre 2 milieux s'écrivent :

$$(\vec{D}_2-\vec{D}_1)_\perp = \sigma \qquad (\vec{E}_2-\vec{E}_1)_\parallel = 0$$
$$(\vec{B}_2-\vec{B}_1)_\perp = 0 \qquad (\vec{H}_2-\vec{H}_1)_\parallel\cdot(\vec{t}\times\vec{n}) = \vec{J}_s\cdot\vec{t}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface, en direction du matériau 2, et $\vec{t}$ un vecteur tangeant à la surface

Solution:
La charge surfacique $\sigma = 0$. Le courant surfacique est :

$$\vec{J}_s = 2\frac{E_{0,i}}{c\mu_0}\cos(\omega t)\vec{e}_y = 2c\epsilon_0E_{0,i}\cos(\omega t)\vec{e}_y.$$

(c) L'expression de la force résultante est donnée par :

$$d\vec{F} = \frac{1}{2}\sigma\vec{E} + \vec{J}_s\times\vec{B})dS,$$

où dS est un petit élément de surface. Donner une explication pour le terme $1/2$. En déduire que l'onde exerce une pression P sur le miroir dont on calculera la valeur moyenne $\langle P \rangle$ en fonction de la densité volumique moyenne d'énergie $\langle u_v \rangle$ de l'onde incidente, puis de la densité volumique moyenne d'énergie $\langle u_{v,tot} \rangle$ de l'onde totale

Solution:

$$P = \frac{\langle d\vec{F} \rangle}{dS} = \epsilon_0 E_{0,i}^2 = 2\langle u_v \rangle$$
$$P = \langle u_{v,tot} \rangle$$

Dans un second temps, l'expression de la pression de radiation peut être également dérivée en considérant la nature corpusculaire de la lumière. Pour la suite de l'exercice

(d) En utilisant la relation $E = c|\vec{p}| = hf$, déterminer l'expression de la pression de radiation produite en fonction de P et de la distance r de la surface considérée par rapport à la source.

Solution:

$$P = 2\frac{\langle \vec{S} \rangle}{c} = \epsilon_0 E_0^2$$

(e) Déterminer le rayon limite R_{lim} d'une sphère métallique pour lequel celle-ci pourrait être éjectée du système solaire, en tenant compte de la pression de radiation. On suppose que la soleil émet un rayonnement avec une pression de radiation P. La section efficace de la sphère est donnée par πR^2.

Solution:

$$R_{lim} = \sqrt{\frac{2GcMm}{P}}.$$