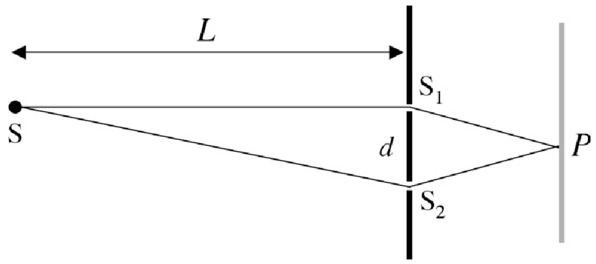
15 mars 2024

Pré-corrigé 4 : Superpositions d'onde et Principe de Huygens

1 Interférences fentes décalées

Une onde sphérique monochromatique de longueur d'onde λ illumine deux fentes identiques S_1 et S_2 sur une plaque située à une distance L de la source S. La fente S_1 est placée à la même position horizontalement que la source S, et la fente S_2 est à une distance d en dessous de S_1, comme indiqué sur le schéma ci-dessous. On suppose $d \ll L$. On néglige les effets de la diffraction, c'est-à-dire l'interférence de chaque faisceau avec lui-même.



(a) On observe la lumière au point P, placé sur l'écran à égale distance de S_1 et de S_2. Lorsqu'une seule des deux fentes est ouverte (S_1 ou S_2), on observe une intensité moyenne de I_0. Lorsqu'il y a deux fentes, l'intensité moyenne mesurée est alors de $3I_0$. Quelle est la plus petite valeur de d compatible avec ces observations ?

Solution:

$$d_{min} = \sqrt{\frac{\lambda L}{3}}$$

(b) Étudier les figures d'interférences produites lorsque les deux fentes S_1 et S_2 sont ouvertes. On supposera que l'écran est placé à une distance $R \gg d$ de la plaque.

Solution:

$$\text{Interférences constructives : } \frac{2\pi}{\lambda}\frac{d\sin(\theta)}{2} = n\pi + \frac{d^2}{4L^2}$$
$$\text{Interférences destructives : } \frac{2\pi}{\lambda}\frac{d\sin(\theta)}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{d^2}{4L^2}$$

(c) Montrer que dans la limite où l'écran est placé à une distance $R \gg d$ de la plaque, on retrouve la figure d'interférence simple des fentes de Young vue en cours, dont la position verticale est décalée vers le bas d'une distance $dR/(2L)$.

(d) Comment est modifiée la réponse donnée en a) si un milieu d'indice de réfraction $n = 2$ remplissait : 1. l'espace entre la plaque et l'écran, 2. l'espace entre la source S et les deux fentes.

Solution:

$$d'_{min} = \sqrt{\frac{4L}{k'}\frac{\pi}{6}} = \sqrt{\frac{\lambda L}{3n}}$$

2 Diffraction de Fraunhofer

L'intérêt de cet exercice est de dériver la formule de la figure de diffraction crée par le passage d'une onde plane à travers une fente rectangulaire.

Dans un premier temps, on considère le cas de 3 sources cohérentes S_1, S_2 et S_3, distantes chacunes de d, situées à une distance $R \gg d$ de l'écran. La longueur d'onde des ondes émises est λ.

(a) Dériver l'intensité moyenne de l'onde résultante des trois sources I_{tot}

Solution:

$$I_{tot}(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin(\frac{3}{2}\phi)}{\sin(\frac{1}{2}\phi)} \right)^2$$

On considère désormais le cas d'une fente de largeur d. Pour étudier le phénomène de diffraction, on fait l'hypothèse que l'onde plane incidente sur la fente peut être décrite à l'aide de N sources cohérentes équidistantes d'amplitude S_0/N

(b) Dériver l'intensité moyenne sur l'écran en fonction de θ. Comment l'expression se simplifie-t-elle dans la limite $N \longrightarrow \infty$?

Solution:
L'intensité moyenne est donc donnée par

$$I_{tot}(\theta) = \frac{I_0}{N^2} \left(\frac{\sin(\frac{kd}{2}\sin(\theta))}{\sin(\frac{kd}{2N}\sin(\theta))} \right)^2$$

Dans la limite où $N \longrightarrow \infty$:

$$I_{tot}(\theta) = I_0 \mathrm{sinc}^2(\frac{\pi d}{\lambda}\sin(\theta))$$

(c) Donner une condition pour que plusieurs pics de diffraction soient visibles ? À partir de ce résultat, dessiner qualitativement la figure de diffraction pour : i) $a/\lambda = 1$, ii) $a/\lambda = 2$. Indication : raisonner sur les zéros de la fonction sinus cardinal.

Solution:
La condition pour qu'une $n^{\text{ième}}$ tâche soit visible sur l'écran est donnée par :

$$\pi\frac{d}{\lambda} > (n-1)\pi \Longrightarrow \frac{d}{\lambda} > n-1$$

3 Rayon laser courbe

Au cours, l'expérience du rayon laser courbe a été montrée. La raison pour laquelle la lumière prend une trajectoire courbe est que le liquide dans le récipient est en réalité un mélange graduel entre de l'eau et de la glycérine. Ces deux liquides ont des indices de réfraction différents : $n_{eau} = 1.33$ et $n_{gly} = 1.44$. Ceci implique un gradient d'indice de réfraction qui est la cause de la courbature du rayon laser. On cherche à comprendre intuitivement comment un indice de réfraction variable induit un rayon laser courbe. Soit $n(x) = n_0 + \alpha x$, l'indice de réfraction du mélange eau-glycérine. On suppose que l'onde lumineuse incidente est une onde plane qui se propage selon l'axe y.

challenge

(a) Monter que la trajectoire du laser est un arc de cercle de rayon $R(x) = n(x)/\alpha$. Indication : à l'aide du principe de Huygens, considérer l'avancement du front d'onde du laser à différentes positions, pour en déduire la trajectoire du front d'onde global.

(b) Est-ce que les ondes lumineuses vont converger ou diverger dans ce milieu ?