

13 septembre 2024

Exercices Ex-Cathedra 1 : Ordres de grandeur, analyse dimensionnelle et rappels

1 Gravité et trous noirs

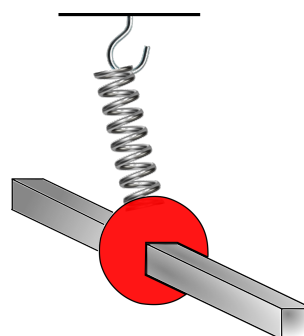
- (a) La période de rotation d'une planète autour du soleil, T_p , dépend de la distance R entre les deux, de la constante de gravitation universelle, G , qui a pour dimensions $[G] = [L]^3/([T]^2[M])$, et de la masse du soleil, M_0 . En utilisant l'analyse dimensionnelle, déduire l'expression de T_p à une constante multiplicative sans unités, k , près.
- (b) Dériver le rayon d'un trou noir par analyse dimensionnelle. Comme un trou noir est un objet si compact que l'intensité de son champ gravitationnel empêche toute forme de matière ou de rayonnement de s'en échapper, on peut s'attendre à ce que son rayon dépende de la constante de gravitation universelle, de la masse du trou noir et de la vitesse de la lumière. Estimer ensuite le rayon d'un trou noir ayant la masse de la terre.

$$\left[T_p^2 = \frac{k^2 R^3}{M_0 G}, R_{TN} \sim \frac{GM_{TN}}{c^2}, \text{ pour la Terre } 1\text{cm} \right]$$

2 Étude de fonction

Nous verrons dans les prochaines semaines que l'étude du mouvement d'une masse qui est attachée à un ressort et glisse le long d'une tige (voir figure) se réduit à l'étude d'une fonction du type

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \sqrt{x^2 + 1}.$$



Dans cet exercice, on souhaite déterminer le graphique de $f(x)$.

- (a) Déterminer le domaine, le signe et les limites de la fonction.
- (b) Calculer et analyser le signe de la dérivée première. Déterminer les minimums et maximums, s'il existent.
- (c) Avec les informations ainsi obtenues, esquisser la fonction.

