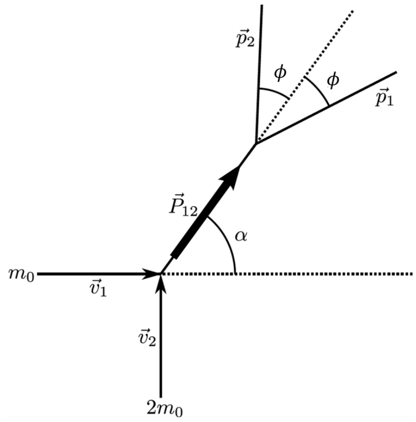
31 mai 2024

Corrigé 13 : Dynamique relativiste

1 Collision relativiste à l'équerre

Une particule de masse au repos m_0 et de vitesse scalaire v entre en collision avec une particule de masse au repos $2m_0$, de même vitesse scalaire v, mais sur une trajectoire perpendiculaire à celle de la première particule (voir dessin). Juste après la collision, les deux particules forment une nouvelle particule, qu'on appellera la "particule composite". Cette particule composite se décompose, après un certain temps, en deux photons. L'angle entre les deux photons vaut 2ϕ.



(a) Quel est le module de la quantité de mouvement de la particule composite ?

On calcule d'abord la quantité de mouvement de chaque particule. On appelle les vitesses des deux particules $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{P}_1 &= \gamma m_0 \vec{v}_1 \\ E_1 &= \gamma m_0 c^2\end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned}\vec{P}_2 &= 2\gamma m_0 \vec{v}_2 \\ E_2 &= 2\gamma m_0 c^2\end{aligned} \tag{1}$$

où le facteur $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ est le même pour les deux particules.

La quantité de mouvement de la particule composite, par conservation de la quantité de mouvement du système, est

$$\vec{P}_{12} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \gamma m_0 \left(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2\right) \tag{2}$$

dont le module vaut

$$\|\vec{P}_{12}\| = P_{12} = \sqrt{5}\gamma m_0 v \tag{3}$$

(b) Quelle est la masse au repos de cette particule composite ?

Pour trouver la masse de la particule composite, on calcule d'abord son énergie :

$$E_{12} = E_1 + E_2 = 3\gamma m_0 c^2 \tag{4}$$

En utilisant $M_{0_{12}}c^2 = \sqrt{E_{12}^2 - P_{12}^2 c^2} = \gamma m_0 c\sqrt{9c^2 - 5v^2}$, on obtient

$$M_{0_{12}} = 3\gamma m_0 \sqrt{1 - \frac{5}{9}\frac{v^2}{c^2}} \tag{5}$$

(c) Que vaut l'angle ϕ ?

Les deux photons sont identiques, et donc ils ont la même quantité de mouvement (en module) et ils se partagent l'énergie disponible :

$$p_1 = p_2 = p \qquad \text{et} \qquad E_1 = E_2 = \frac{E_{12}}{2} \tag{6}$$

La relation $E = pc$, valable pour les photons, implique $p = \frac{3}{2}\gamma m_0 c$. Finalement, par conservation de la quantité de mouvement, on obtient

$$P_{12} = \sqrt{5}\gamma m_0 v = 3\gamma m_0 c \cos\phi = \|\vec{p}_1 + \vec{p}_2\| \tag{7}$$

$$\Rightarrow \cos\phi = \frac{\sqrt{5}}{3}\frac{v}{c} \tag{8}$$

2 Choc relativiste

On considère deux particules élémentaires (1 et 2), de masses au repos $m_1 = m_2 = m$, dirigées l'une vers l'autre dans un référientiel R lié au laboratoire. Dans R, la première particule se déplace à une vitesse relativiste $\vec{v}_1 = v_1\hat{e}_x$ ($v_1 > 0$) et la deuxième particule se deplace à une vitesse relativiste $\vec{v}_2 = -v_2\hat{e}_x$ ($v_2 \geq 0$), où $\hat{e}_x$ est le vecteur unitaire le long de l'axe x. On définit les deux événements A et B comme

— événement A : la particule 1 se trouve aux coordonnées $t_A = 0$ et $x_A = 0$ (dans R)

— événement B : la particule 2 se trouve aux coordonnées $t_B = 0$ et x_B (dans R).

Dans le référentiel R' lié à la particule 1 (c'est-à-dire que la particule 1 est au repos dans R'), l'événement A a lieu aux coordonnées $t'_A = 0$ et $x'_A = 0$ et l'événement B a lieu aux coordonées t'_B et $x'_B > 0$.

(a) Déterminer x_B et t'_B. Est-ce que les deux événements A et B sont simultanés dans R' ? Déterminer aussi la vitesse $\vec{v}'_2$ de la particule 2 dans le référentiel R'.

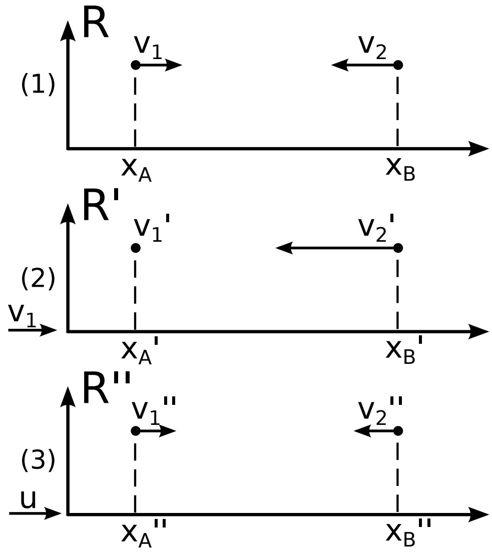


FIGURE 1

Les deux événements A et B sont représentés dans la Figure 1 pour les deux référentiels R (1) et R' (2). En utilisant les transformations de Lorentz, on peut calculer x_B :

$$x'_B - x'_A = \gamma_1\left[x_B - x_A - v_1(t_B - t_A)\right] = \gamma_1\left(x_B - x_A\right) \Leftrightarrow x_B - x_A = x_B = \frac{x'_B - x'_A}{\gamma_1} = x'_B\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}. \tag{12}$$

avec

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}. \tag{13}$$

De plus, en utilisant la transformation de Lorentz $t'_B = \gamma_1(t_B - v_1 x_B/c^2)$ on trouve

$$t'_B = \gamma_1(t_B - \frac{v_1 x_B}{c^2}) = -\gamma_1 \frac{v_1 x_B}{c^2} = -\frac{v_1 x'_B}{c^2}. \tag{14}$$

On voit que $t'_B \neq t'_A$. En effet, deux événements qui sont simultanés dans R, ne le sont pas dans R'.
En notant que dans le référentiel R', le référentiel R se déplace à la vitesse $-v_1 \cdot \hat{e}'_x$, on peut exprimer la vitesse $\vec{v}'_2$:

$$\vec{v}'_2 = \frac{\vec{v}_2 \cdot \hat{e}'_x - v_1}{1 + \frac{\vec{v}_2 \cdot \hat{e}'_x \cdot (-v_1)}{c^2}} \hat{e}'_x = -\frac{v_2 + v_1}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \hat{e}'_x, \tag{15}$$

avec $\hat{e}'_x$ le vecteur unitaire le long de l'axe x'.

(b) On définit l'événement C comme : la particule 1 et la particule 2 entrent en collision. Déterminer les coordonnées t_C et x_C de l'événement C dans le référentiel R. Faire de même pour les coordonnées t'_C et x'_C dans R'.

Dans R, les particules 1 et 2 doivent parcourir respectivement une distance $d = x_C - x_A$ et $d_0 - d = x_B - x_C$, avec $d_0 = x_B - x_A$. On peut donc poser

$$\frac{d}{v_1} = \frac{d_0 - d}{v_2} \Leftrightarrow d(v_1 + v_2) = d_0 v_1 \Rightarrow x_C - x_A = x_C = \frac{d_0 v_1}{v_1 + v_2} = \frac{x'_B v_1}{v_1 + v_2} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}. \tag{19}$$

Le temps t_C est tout simplement

$$t_C = \frac{x_C - x_A}{v_1} = \frac{x'_B}{v_1 + v_2} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}. \tag{20}$$

Dans R' on calcule les coordonnées en utilisant les transformations de Lorentz :

$$\begin{aligned} t'_C &= \gamma_1 \left(t_C - \frac{v_1 x_C}{c^2} \right) = \frac{x'_B}{v_1 + v_2} - \frac{v_1^2}{c^2} \frac{x'_B}{v_1 + v_2} = \frac{x'_B}{v_1 + v_2} \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2} \right) \\ x'_C &= \gamma_1 \left(x_C - v_1 t_C \right) = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Le même résultat peut être obtenu en considérant que la particule 2 doit parcourir une distance $d' = x'_B - x'_A = x'_B - x'_C$ dans R' ($x'_A = x'_C$ parce que la particule 1 est au repos dans R'), et que la particule 2 se trouve en x'_B à t'_B :

$$\begin{aligned} t'_C &= t'_B + \frac{d'}{|\vec{v}'_2|} = -\frac{v_1 x'_B}{c^2} + \frac{x'_B \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)}{v_2 + v_1} = \frac{x'_B \left(-v_1^2 - v_1 v_2 + c^2 + v_1 v_2\right)}{c^2 \left(v_1 + v_2\right)} \\ &= \frac{x'_B}{v_1 + v_2} \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2} \right). \end{aligned} \tag{22}$$

À partir de maintenant, on suppose que $v_2 = 0$, c'est-à-dire que la particule 2 est au repos dans le référentiel R avant la collision.

(c) Soit R'' le référentiel dans lequel la somme de la quantité de mouvement des deux particules est nulle (R'' est donc le référentiel du centre de masse). Déterminer la vitesse de R'' par rapport à R. Montrer que dans le cas $v_1 \ll c$ on retrouve le résultat de la mécanique classique.

Le référeniel R'' est représenté dans la Figure 1. En utilisant la formule des transformations des vitesses $v'' = (v - u)/(1 - vu/c^2)$, avec v'' (v) la vitesse d'une particule dans R'' (R) et

u la vitesse de R'' par rapport a R, on peut écrire

$$v_1'' = \frac{v_1 - u}{1 - \frac{v_1 u}{c^2}}, \qquad v_2'' = -u. \tag{24}$$

Pour que la somme des quantités de mouvement soit nulle, on doit avoir $m\gamma_1 v_1'' = -m\gamma_2 v_2''$, ce qui implique

$$\frac{v_1''}{\sqrt{1 - \frac{v_1''^2}{c^2}}} = -\frac{v_2''}{\sqrt{1 - \frac{v_2''^2}{c^2}}}. \tag{25}$$

Cette dernière égalité n'est possible que si $v_1'' = v_2''$, ce qui implique

$$\begin{aligned} v_1'' = -\,v_2'' \Leftrightarrow \frac{v_1 - u}{1 - \frac{v_1 u}{c^2}} = u \Leftrightarrow u^2 - 2\frac{c^2}{v_1}u + c^2 = 0 \\ \Rightarrow u = \frac{c^2}{v_1} \pm \sqrt{\frac{c^4}{v_1^2} - c^2} = \frac{c}{v_1}\left(c \pm \sqrt{c^2 - v_1^2}\right), \end{aligned} \tag{26}$$

où on a fait l'hypothèse $v_1 > 0$ (sinon on a tout simplement $u = 0$). En imposant $|u| < c$, on obtient

$$u = \frac{c}{v_1}\left(c - \sqrt{c^2 - v_1^2}\right). \tag{27}$$

Dans le cas $v_1 \ll c$, on peut faire l'approximation $\sqrt{c^2 - v_1^2} \simeq c[1 - v_1^2/(2c^2)]$, et on a donc

$$u \simeq \frac{c}{v_1}\left(c - c + \frac{v_1^2}{2c}\right) = \frac{v_1}{2}, \tag{28}$$

qui correspond au cas classique. En effet, pour le cas classique on a $v_1'' = v_1 - u$ et $v_2'' = -u$, et donc $v_1'' + v_2'' = 0$ implique $u = v_1/2$.

(d) Après la collision, les deux particules se déplacent respectivement à des vitesses $\vec{v}_{1,a}$ et $\vec{v}_{2,a}$ dans le référentiel R, avec $|\vec{v}_{1,a}| = |\vec{v}_{2,a}|$ (voir Figure, après la collision, toujours dans R). On suppose que la masse au repos de chacune des deux particules reste inchangée pendant la collision. Déterminer l'angle α que fait la vitesse $\vec{v}_{1,a}$ avec l'axe x dans R.

La quantité de mouvement dans R avant le choc est donnée par

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m\gamma_1 v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Après le choc on a

$$\vec{p}_a = m\gamma_a v_a \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + m\gamma_a v_a \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix} = 2m\gamma_a v_a \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

avec

$$v_a = |\vec{v}_{1,a}|, \qquad \gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}. \tag{32}$$

où on a imposé que l'angle que fait la deuxième particule avec l'axe x est $-\alpha$ pour conserver la quantité de mouvement le long de l'axe y. De plus, l'énergie du système avant la collision est

$$E = E_1 + E_2 = m\gamma_1 c^2 + mc^2 \tag{33}$$

et après la collision est

$$E_a = E_{1,a} + E_{2,a} = m\gamma_a c^2 + m\gamma_a c^2 = 2m\gamma_a c^2. \tag{34}$$

En utilisant la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, on peut écrire

$$m\gamma_1 v_1 = 2m\gamma_a v_a \cos\alpha, \qquad m\gamma_1 c^2 + mc^2 = 2m\gamma_a c^2. \tag{35}$$

La deuxième relation nous donne

$$\gamma_a = \frac{\gamma_1 + 1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{v_a^2}{c^2} = \left(\frac{2}{\gamma_1 + 1}\right)^2 \Leftrightarrow v_a = c\sqrt{1 - \left(\frac{2}{\gamma_1 + 1}\right)^2}. \tag{36}$$

En utilisant la conservation de la quantité de mouvement on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 v_1 = (\gamma_1 + 1) v_a \cos\alpha \\
\Leftrightarrow \cos\alpha &= \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \frac{v_1}{c\sqrt{1 - \left(\frac{2}{\gamma_1+1}\right)^2}} = \frac{\gamma_1 v_1}{\gamma_1 + 1} \frac{\gamma_1 + 1}{c\sqrt{(1+\gamma_1)^2 - 4}} \\
&= \frac{v_1}{c\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\gamma_1}\right)^2 - \frac{4}{\gamma_1^2}}} = \frac{v_1}{c\sqrt{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}\right)^2 - 4\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}} \\
&= \frac{v_1}{c\sqrt{1 + 2\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} - 3\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}},
\end{aligned} \tag{37}$$

et donc on a

$$\alpha = \cos^{-1}\left[\frac{v_1}{c\sqrt{1 + 2\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} - 3\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}}\right]. \tag{38}$$

Remarque 1 : On peut voir que dans la limite $0 < v_1 \ll c$ on a

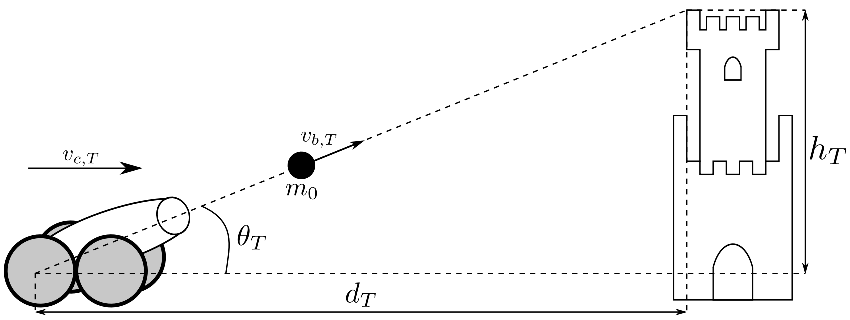
$$\begin{aligned}
\alpha = \cos^{-1}&\left[\frac{v_1}{c\sqrt{1 + 2\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} - 3\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}}\right] \simeq \cos^{-1}\left[\frac{v_1}{c\sqrt{1 + 2\left(1 - \frac{v_1^2}{2c^2}\right) - 3\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}}\right] \\
&= \cos^{-1}\left[\frac{v_1}{c\sqrt{2\frac{v_1^2}{c^2}}}\right] = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),
\end{aligned} \tag{39}$$

ce qui correspond au résultat de la mécanique classique pour une collision élastique. On obtient comme solution des équations $mv_1 = 2mv_a \cos\alpha$ et $mv_1^2/2 = mv_a^2$.

Remarque 2 : On peut aussi déterminer l'angle α'' que fait la particule 1 avec l'axe x dans R''. En effet, on sait que, après la collision, les deux particules ont la même composante x de la vitesse. Par conséquent, elles doivent aussi avoir la même composante x de la vitesse dans R''. Mais dans R'' la somme de la quantité de mouvement des deux particules est 0. Il suit que, après la collision, la composante x de la vitesse des deux particules est 0, ce qui implique que leur vitesse est perpendiculaire à l'axe x. Donc $\alpha'' = \pm 90^o$.

3 Bataille relativiste

Dans le but d'attaquer une tour fortifiée, les attaquants ont mis au point un canon capable de rouler et de tirer à des vitesses relativistes. Dans le référentiel de la tour, le canon roule avec une vitesse $v_{c,T}$ constante en direction de la tour et lorsqu'il fait feu, il se trouve à une distance d_T de la fortification. Toujours dans le référentiel de la tour, l'angle de tir θ_T est de sorte à ce que le boulet, qui a une vitesse de module $v_{b,T}$ et une masse au repos m_0, touche le haut de la tour. On peut négliger les effets de la gravité et de toute autre force (frottement, etc.).



(a) Calculer la hauteur h_T de la tour dans son référentiel. Puis, calculer le temps que met le boulet pour arriver à son objectif dans le référentiel de la tour, Δt_T, et dans celui du canon, Δt_C. De plus, calculer la distance horizontale parcourue par le boulet jusqu'à la tour vue dans le référentiel du canon, d_C.

Puisque la distance d_T et l'angle de tir θ_T sont définis dans le référentiel de la tour, la hauteur de cette dernière est facilement calculée,

$$h_T = d_T \tan\theta_T \tag{44}$$

Dans le référentiel de la tour, on peut définir deux événements. Le premier est l'instant du tir que l'on caractérise par les coordonnées $(t_0, x_0) = (0, 0)$. Le second, est l'arrivée du boulet sur la tour, $(t_1, x_1) = (\Delta t_T, d_T)$. Comme la vitesse du boulet est définie dans le référentiel de la tour, il est facile de calculer le temps qu'il met pour l'atteindre. En effet, dans ce cas, on a

$$\Delta t_T = \frac{d_T}{v_{b,T,x}} = \frac{d_T}{v_{b,T}\cos\theta_T} \tag{45}$$

où $v_{b,T,x}$ représente la vitesse du boulet en direction de la tour.

Notons que le même résultat peut être obtenu en considérant la hauteur de la tour. En effet,

$$\Delta t_T = \frac{h_T}{v_{b,T}\sin\theta_T} = \frac{d_T\tan\theta_T}{v_{b,T}\sin\theta_T} = \frac{d_T}{v_{b,T}\cos\theta_T} \tag{46}$$

Dans le référentiel du canon, on peut procéder de la même manière en utilisant la transformée de Lorentz sur les deux événements définis précédemment. Ainsi, on trouve que le premier événement est aussi $(t'_0, x'_0) = (0, 0)$ et le deuxième est donné par $(t'_1, x'_1) = (\Delta t_C, d_C)$ avec

$$\begin{aligned}\Delta t_C &= \gamma_C\left(\Delta t_T - \frac{v_{c,T}}{c^2}d_T\right) = \gamma_C\left(\frac{d_T}{v_{b,T}\cos\theta_T} - \frac{v_{c,T}}{c^2}d_T\right)\\ &= \gamma_C d_T\left(\frac{1}{v_{b,T}\cos\theta_T} - \frac{v_{c,T}}{c^2}\right)\end{aligned} \tag{47}$$

où $\gamma_C = 1/\sqrt{1 - \frac{v_{c,T}^2}{c^2}}$ et

$$d_C = \gamma_C\left(d_T - v_{c,T}\Delta t_T\right) = \gamma_C d_T\left(1 - \frac{v_{c,T}}{v_{b,T}\cos\theta_T}\right) \tag{48}$$

Alternativement, plutôt que de transformer le temps, on aurait pu utiliser la définition du temps dans le référentiel du canon ainsi que la transformation des vitesses,

$$\begin{aligned}
\Delta t_C = \frac{d_C}{v_{b,C,x}} &= \gamma_C d_T \left(1 - \frac{v_{c,T}}{v_{b,T}\cos\theta_T}\right) \frac{1 - \frac{v_{b,T}\cos\theta_T v_{c,T}}{c^2}}{v_{b,T}\cos\theta_C - v_{c,T}} \\
&= \gamma_C d_T \left(\frac{1 - \frac{v_{b,T}\cos\theta_T v_{c,T}}{c^2} - \frac{v_{c,T}}{v_{b,T}\cos\theta_T} + \frac{v_{c,T}^2}{c^2}}{v_{b,T}\cos\theta_C - v_{c,T}}\right) \\
&= \gamma_C d_T \left(\frac{v_{b,T}\cos\theta_T - v_{c,T}}{v_{b,T}\cos\theta_T (v_{b,T}\cos\theta_T - v_{c,T})} - \frac{v_{c,T}(v_{b,T}\cos\theta_T - v_{c,T})}{c^2(v_{b,T}\cos\theta_T - v_{c,T})}\right) \\
&= \gamma_C d_T \left(\frac{1}{v_{b,T}\cos\theta_T} - \frac{v_{c,T}}{c^2}\right)
\end{aligned} \tag{49}$$

(b) Calculer l'angle de tir θ_C dans le référentiel du canon.

Dans le référentiel de la tour, l'angle d'inclinaison du canon est donné par

$$\tan\theta_T = \frac{h_T}{d_T} \tag{51}$$

De manière similaire, l'angle d'inclinaison dans le référentiel du canon est donné par

$$\tan\theta_C = \frac{h_C}{d_C} \tag{52}$$

Pour trouver les distances dans le référentiel du canon, on procède de manière similaire à l'exercice (a). On définit les deux événements dans le référentiel de la tour $(t_0, x_0, y_0) = (0, 0, 0)$ et $(t_1, x_1, y_1) = (\Delta t_T, d_T, h_T)$ qui correspondent respectivement au tir du boulet et à son impact sur la tour. On utilise ensuite les transformations de Lorentz pour passer dans le référentiel du canon (on ne transforme pas le temps ici car il ne nous est pas utile),

$$d_C = \gamma_C \left(d_T - v_{c,T}\Delta t_T\right) = \gamma_C d_T \left(1 - \frac{v_{c,T}}{v_{b,T}\cos\theta_T}\right) \tag{53}$$

comme dans l'exercice (a), et

$$h_C = h_T \tag{54}$$

car la transformation de Lorentz n'agit que sur la direction parallèle au mouvement relatif. Ainsi, l'angle θ_C dans le référentiel du canon est donné par

$$\begin{aligned}
\tan\theta_C = \frac{h_C}{d_C} &= \frac{h_T}{\gamma_C d_T}\frac{v_{b,T}\cos\theta_T}{v_{b,T}\cos\theta_T - v_{c,T}} = \frac{h_T}{\gamma_C d_T}\frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_T - \frac{v_{c,T}}{v_{b,T}}} \\
&= \tan\theta_T \frac{\cos\theta_T}{\gamma_C\left(\cos\theta_T - \frac{v_{c,T}}{v_{b,T}}\right)} = \tan\theta_T \frac{1}{\gamma_C\left(1 - \frac{v_{c,T}}{v_{b,T}\cos\theta_T}\right)}
\end{aligned} \tag{55}$$

Remarquons que le même résultat peut être obtenu en considérant la transformation des vitesses. En effet, l'angle θ_C peut également être défini de la façon suivante

$$\tan\theta_C = \frac{v_{b,C,y}}{v_{b,C,x}} \tag{56}$$

En utilisant les transformations des vitesses, on peut relier les vitesses du référentiel du canon à celles du référentiel de la tour. On trouve,

$$v_{b,C,x} = \frac{v_{b,T,x} - v_{c,T}}{1 - \frac{v_{b,T,x}v_{c,T}}{c^2}} = \frac{v_{b,T}\cos\theta_T - v_{c,T}}{1 - \frac{v_{b,T}\cos\theta_T v_{c,T}}{c^2}} \tag{57}$$

et

$$v_{b,C,y} = \frac{v_{b,T,y}}{\gamma_C\left(1 - \frac{v_{b,T,x}v_{c,T}}{c^2}\right)} = \frac{v_{b,T}\sin\theta_T}{\gamma_C\left(1 - \frac{v_{b,T}\cos\theta_T v_{c,T}}{c^2}\right)} \tag{58}$$

Ainsi, l'angle de tir dans le référentiel du canon est donné par

$$\begin{aligned}
\tan\theta_C = \frac{v_{b,C,y}}{v_{b,C,x}} &= \frac{v_{b,T}\sin\theta_T}{\gamma_C\left(1 - \frac{v_{b,T}\cos\theta_T v_{c,T}}{c^2}\right)} \frac{1 - \frac{v_{b,T}\cos\theta_T v_{c,T}}{c^2}}{v_{b,T}\cos\theta_T - v_{c,T}} \\
&= \frac{\sin\theta_T}{\gamma_C\left(\cos\theta_T - \frac{v_{c,T}}{v_{b,T}}\right)} = \frac{\sin\theta_T}{\cos\theta_T} \frac{1}{\gamma_C\left(1 - \frac{v_{c,T}}{v_{b,T}\cos\theta_T}\right)} \\
&= \tan\theta_T \frac{1}{\gamma_C\left(1 - \frac{v_{c,T}}{v_{b,T}\cos\theta_T}\right)}
\end{aligned} \tag{59}$$

C'est le même résultat que celui trouvé avec la méthode des transformations de Lorentz.

(c) Calculer l'énergie cinétique relativiste du boulet dans le référentiel de la tour, $E_{b,T}$, et dans celui du canon, $E_{b,C}$.

Dans le référentiel de la tour, l'énergie cinétique relativiste est donnée par

$$E_{b,T} = (\gamma_{b,T} - 1)m_0c^2 \tag{61}$$

L'énergie cinétique relativiste du boulet dans le référentiel du canon est donnée par

$$E_{b,C} = (\gamma_{b,C} - 1)m_0c^2 \tag{62}$$

où $\gamma_{b,C} = 1/\sqrt{1 - \frac{v_{b,C}^2}{c^2}}$.

Nous devons donc calculer la norme de la vitesse du boulet dans le référentiel du canon. Par définition, la norme de la vitesse est donnée par $v_{b,C}^2 = v_{b,C,x}^2 + v_{b,C,y}^2$. Pour cela, on utilise la transformation des vitesses pour les deux composantes de celle-ci. On trouve,

$$v_{b,C,x}^2 = \left(\frac{v_{b,T}\cos\theta_T - v_{c,T}}{1 - \frac{v_{b,T}\cos\theta_T v_{c,T}}{c^2}}\right)^2 \tag{63}$$

et

$$v_{b,C,y}^2 = \left(\frac{v_{b,T}\sin\theta_T}{\gamma_C\left(1 - \frac{v_{b,T}\cos\theta_T v_{c,T}}{c^2}\right)}\right)^2 \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
E_{b,C} = (\gamma_{b,C} - 1)m_0c^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{b,C,x}^2 + v_{b,C,y}^2}{c^2}}} - 1\right) m_0c^2 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - c^2\left(\frac{v_{b,T}\cos\theta_C - v_{c,T}}{c^2 - v_{b,T}\cos\theta_T v_{c,T}}\right)^2 + c^2\left(\frac{v_{b,T}\sin\theta_T}{\gamma_C\left(c^2 - v_{b,T}\cos\theta_T v_{c,T}\right)}\right)^2}} - 1\right) m_0c^2
\end{aligned} \tag{65}$$

4 Accélération d'une particule relativiste

La 2ème loi de Newton s'exprime de la forme suivante :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

où $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$. On désire connaître la trajectoire d'une particule soumise à des champs électriques et magnétiques uniformes, sans négliger les effets relativistes.

(a) Dériver l'équation temporelle de la vitesse d'une particule de charge q et de vitesse initiale $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ dans un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\vec{e}_x$.

En intégrant la 2ème loi de Newton, on obtient :

$$\gamma(v) m_0 \vec{v} = \gamma(v_0) m_0 \vec{v}_0 + q\vec{E}t \tag{67}$$

où $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

Pour résoudre cette équation, il est nécessaire de connaître la valeur de $\gamma(v)$. En prenant la norme au carrée de part et d'autre de (67), on peut la réduire à :

$$\gamma^2(v)\frac{v^2}{c^2} = \gamma^2 - 1 = \gamma^2(v_0)\frac{v_0^2}{c^2} + \frac{2q\gamma(v_0)t}{m_0}(\vec{E} \cdot \vec{v}_0) + \frac{q^2E^2t^2}{m_0^2} \tag{68}$$

Ce qui permet de trouver l'expression suivante pour $\gamma(v)$:

$$\gamma(v) = \sqrt{1 + \gamma^2(v_0)\frac{v_0^2}{c^2} + \frac{2q\gamma(v_0)t}{m_0c^2}(\vec{E} \cdot \vec{v}_0) + \frac{q^2E^2t^2}{m_0^2c^2}} \tag{69}$$

En injectant cette expression dans (67), on obtient alors la forme finale de l'évolution temporelle de la vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{\gamma(v_0)\vec{v}_0 + q\vec{E}t}{\sqrt{1 + \gamma^2(v_0)\frac{v_0^2}{c^2} + \frac{2q\gamma(v_0)t}{m_0c^2}(\vec{E} \cdot \vec{v}_0) + \frac{q^2E^2t^2}{m_0^2c^2}}} \tag{70}$$

(b) Dériver également l'équation temporelle de la vitesse et la trajectoire pour une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

L'équation du mouvement s'écrit comme :

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 \vec{v}) = qB(\vec{v} \times \vec{e}_z) \tag{73}$$

Cette équation peut également être écrite uniquement en fonction de la quantité de mouvement $\vec{p}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{qB}{\gamma m_0}(\vec{p} \times \vec{e}_z) \tag{74}$$

Le raisonnement menant à la résolution s'apparente à celui trouvable pour la mécanique classique. Considérons l'énergie de la particle $E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$. En dérivant par le temps, on obtient alors que :

$$\frac{dE}{dt} = c^2\frac{\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}}{c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}} = \frac{c^2\vec{p}}{E} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \tag{75}$$

car en effet, (74) nous montrer que $d\vec{p}/dt \perp \vec{p}$. Par conséquent, si E est une constante du mouvement, on peut en déduire que la norme $|\vec{p}|$, v et donc $\gamma(v)$ sont également des constantes du mouvement. Par conséquent, (73) peut donc s'écrire :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{qB}{\gamma m_0}(\vec{v} \times \vec{e}_z) \tag{76}$$

L'équation ci-dessus est simplement l'équation différentielle pour $\vec{v}$ dans le cas d'une particule non-relativiste dans un champ magnétique uniforme, mais avec une fréquence angulaire $\omega = \frac{\Omega}{\gamma}$ où Ω est la fréquence cyclotronique. Les effets relativistes ont donc, dans ce cas-ci, uniquement pour effet de modifier la fréquence. L'évolution temporelle de la vitesse est donc donnée par :

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x}\cos(\omega t) + v_{0y}\sin(\omega t) \\ v_y(t) &= v_{0y}\cos(\omega t) - v_{0x}\sin(\omega t) \\ v_z(t) &= v_{0z} \end{aligned} \tag{77}$$

La trajectoire est par conséquent donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_{0x}}{\omega}\sin(\omega t) - \frac{v_{0y}}{\omega}\cos(\omega t) + \left(x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega}\right) \\ y(t) &= \frac{v_{0y}}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{v_{0x}}{\omega}\cos(\omega t) + \left(y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega}\right) \\ z(t) &= v_{0z}t + z_0 \end{aligned} \tag{78}$$

(c) Prendre la limite non-relativiste des résultats trouvés en a) et b) et montrer qu'elles correspondent aux résultats de la mécanique classique.

Champ électrique uniforme

À l'ordre 0, $\gamma \simeq 1 + \mathcal{O}(\beta)$. Sachant que la vitesse initiale donnée est non-relativiste, on peut donc considérer que $\beta_0 \equiv \beta(v_0) \ll 1$. Contrairement au cas avec champ magnétique constant, dans la limite classique, la vitesse $\vec{v}$ diverge. On peut définit $t^* = m_0 c/qE$ le temps que mettrait une particule à atteindre la vitesse c si l'on considère uniquement l'équation non-relativiste. Pour être donc complet dans la limite non-relativiste, il faut donc considérer également que $t \ll t^*$. On peut donc réécrire l'équation (70) en termes de t^* :

$$\vec{v}(t) = \frac{\gamma(v_0)\vec{v}_0 + q\vec{E}t/m_0}{\sqrt{1 + \gamma^2(v_0)\beta_0^2 + 2\gamma(v_0)\beta_0\frac{t}{t^*}(\vec{e}_E \cdot \vec{e}_{v_0}) + \frac{t^2}{t^{*2}}}} \tag{79}$$

Où $\vec{e}_E$ et $\vec{e}_{v_0}$ sont respctivement les vecteurs unitaires de $\vec{E}$ et de $\vec{v}_0$. En prenant l'expansion au premier ordre de β_0 et t/t^*, on obtient que le terme au dénominateur est simplement donné par :

$$\sqrt{1 + \gamma^2(v_0)\beta(v_0)^2 + 2\gamma(v_0)\beta(v_0)\frac{t}{t^*}(\vec{e}_E \cdot \vec{e}_{v_0}) + \frac{t^2}{t^{*2}}} = 1 + \mathcal{O}\left(\beta_0, \frac{t}{t^*}\right) \tag{80}$$

Au numérateur, l'expansion donne trivialement :

$$\gamma(v_0)\vec{v}_0 + q\vec{E}t/m_0 = \vec{v}_0 + q\vec{E}t/m_0 + \mathcal{O}(\beta_0) \tag{81}$$

Combinant les deux expansions ci-dessus, on obtient donc la limite classique du mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique constant :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + q\vec{E}t/m_0 + \mathcal{O}\left(\beta_0, \frac{t}{t^*}\right) \tag{82}$$

On peut observer que, en plus d'une vitesse initiale non-relativiste, l'équation du mouvement non-relativiste exige également une expansion en termes du temps nécessaire pour atteindre la vitesse de la lumière c. Physiquement, la forme générale trouvée en (70) empêche cette divergence de $v \longrightarrow \infty$. On peut vérifier que, en prenant la limite $t \longrightarrow \infty$, $\vec{v}(t) \longrightarrow c\vec{e}_E$. Ceci explique donc l'expansion pour l'intervalle de temps pour lequel (82) est valide.

Champ magnétique uniforme

La limite non-relativiste dépend uniquement de $\beta_0 \ll 1$. En effet, à l'ordre 0, on remarque que $\omega = \omega_c + \mathcal{O}(\beta_0)$ et $\omega_c = qB/m_0$ est la fréquence angulaire cyclotronique dans la limite classique. Dès lors, à l'ordre 0, la trajectoire est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_{0x}}{\omega_c}\sin(\omega_c t) - \frac{v_{0y}}{\omega_c}\cos(\_ct) + \left(x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega_c}\right) + \mathcal{O}(\beta_0) \\ y(t) &= \frac{v_{0y}}{\omega_c}\sin(\omega_c t) + \frac{v_{0x}}{\omega_c}\cos(\omega_c t) + \left(y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega_c}\right) + \mathcal{O}(\beta_0) \\ z(t) &= v_{0z}t + z_0 \end{aligned} \tag{83}$$

Ces équations ci-dessus sont solutions de l'équation du mouvement dans la limite classique :

$$m_0\ddot{\vec{x}} = q(\dot{\vec{x}} \times \vec{B}) \tag{84}$$

Dans ce cas de figure, l'approximation non-relativiste ne dépend pas de l'intervalle de temps considéré mais uniquement des conditions initiales, ce qui semble être cohérent avec le fait que la norme de la vitesse v est une constante du mouvement.