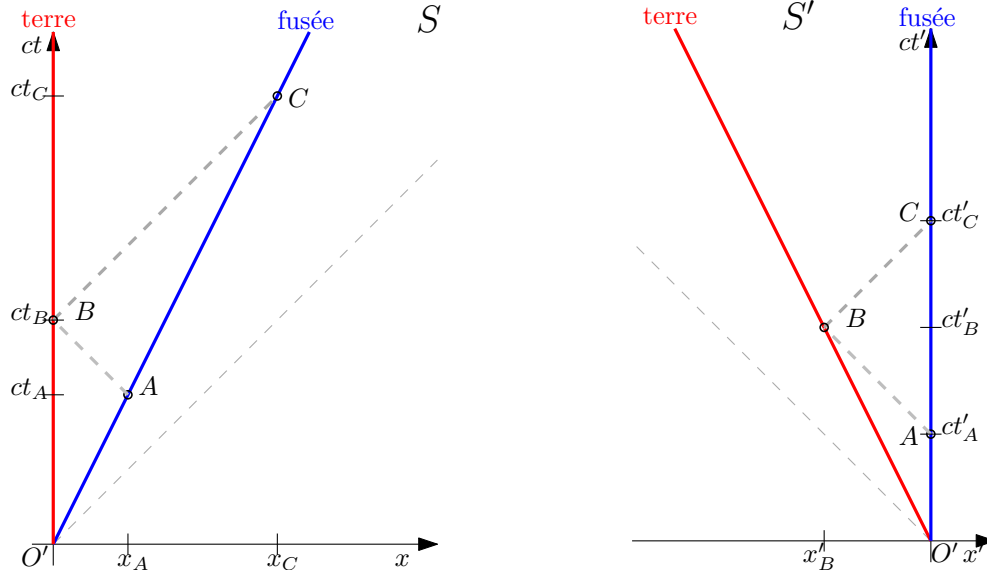


Corrigé 12 : cinématique relativiste

1 Astronaute sur internet

Un astronaute à bord d'une fusée se déplaçant à une vitesse constante u par rapport à la Terre désire surfer sur internet.



Soit S le référentiel lié à la Terre et S' le référentiel lié à la fusée. Les événements dans S et S' sont reliés par les transformations de Lorentz :

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ t' = \gamma(t - \frac{ux}{c^2}) \end{cases} \quad \text{et (par relativité)} \quad \begin{cases} x = \gamma(x' + ut') \\ t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2}) \end{cases} \quad (1)$$

avec $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$.

Dans S , la fusée avance à la vitesse u et la Terre est au repos. Dans S' , la Terre se déplace à la vitesse $-u$ et la fusée est au repos.

- (a) Lorsque son horloge de bord indique t'_A après son départ de la Terre, il clique pour se connecter. À quelle position par rapport à la Terre (dans le référentiel de la Terre), se trouve-t-il alors ? Qu'indique l'horloge de la Terre ? Commencer par placer les différents événements sur un diagramme espace temps.

Appelons l'événement A : "l'astronaute clique pour se connecter" qui a pour coordonnées spatio-temporelles (t'_A, x'_A) dans S' . On exprime cet événement dans S grâce à (1),

$$t_A = \gamma t'_A \quad x_A = \gamma u t'_A = u t_A \quad (2)$$

Application numérique : $\gamma = 3.2$, $x_A = 1.4 \times 10^{10}$ [m] et $t_A = 48.0$ [s].

- (b) Le signal étant transmis par onde radio, qu'indique l'horloge de la Terre lorsque le signal est reçu sur Terre ?

Le signal se propage par onde radio, donc à la vitesse de la lumière c , et ceci dans tout référentiel. Le temps de parcours mesuré par l'horloge de la Terre est alors $\Delta t_1 = \frac{x_A}{c}$. Soit

l'événement B : "le signal est reçu sur Terre" de coordonnées :

$$t_B = t_A + \Delta t_1 = t_A + \frac{x_A}{c} = t_A \left(1 + \frac{u}{c}\right) = \gamma t'_A \left(1 + \frac{u}{c}\right) \quad x_B = 0 \quad (3)$$

Application numérique : $t_B = 93.7$ [s].

- (c) Qu'indique alors l'horloge de la fusée ? Vu de la fusée, à quel endroit la Terre se trouve-t-elle alors ?

Par les transformations de Lorentz, l'événement B a pour coordonnées dans le référentiel de la fusée :

$$t'_B = \gamma t_B = \gamma^2 t'_A \left(1 + \frac{u}{c}\right) = \frac{t'_A}{1 - \frac{u}{c}} \quad x'_B = -\gamma u t_B = -u t'_B \quad (4)$$

Application numérique : $x'_B = -8.5 \times 10^{10}$ [m] et $t'_B = 300$ [s].

Alternative : on peut également trouver t'_B et x'_B depuis le référentiel S' de la manière suivante : l'événement B est l'intersection de la trajectoire de la Terre à la vitesse $-u$ et le faisceau lumineux à la vitesse $-c$ qui part t'_A plus tard (voir figure). Ainsi,

$$t'_B = \frac{x'_B}{-u} = t'_A + \frac{x'_B}{-c} \Rightarrow x'_B \left(1 - \frac{u}{c}\right) = -u t'_A \quad (5)$$

donc

$$t'_B = \frac{t'_A}{1 - \frac{u}{c}} \quad x'_B = \frac{-u t'_A}{1 - \frac{u}{c}} = -u t'_B \quad (6)$$

- (d) La Terre renvoie immédiatement un signal de confirmation, également par onde radio. Qu'indique l'horloge de la fusée lorsque l'astronaute reçoit le signal de confirmation ? Sur son horloge, combien de temps s'est-il écoulé entre l'instant où il a cliqué et l'instant où il reçoit la confirmation ?

Dans le référentiel de la fusée, le signal de confirmation est émis au temps t'_B , quand la Terre se trouve à une distance $|x'_B|$. Comme dans le point b), l'onde se propage à une vitesse c dans tout référentiel, donc aussi par rapport à la fusée. Le temps de retour mesuré par l'horloge de la fusée est alors $\Delta t'_2 = \frac{|x'_B|}{c} = \frac{u t'_B}{c}$. Soit l'événement C : "la fusée reçoit la confirmation" :

$$t'_C = t'_B + \Delta t'_2 = t'_B \left(1 + \frac{u}{c}\right) = t'_A \frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}} \quad x'_C = 0 \quad (7)$$

Ainsi le temps écoulé dans la fusée entre A et C est :

$$\Delta t' = t'_C - t'_A = \frac{2 \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}} t'_A \quad (8)$$

Application numérique : $t'_C = 585$ [s] et $\Delta t = 570$ [s].

Remarque : Dans le référentiel S' la Terre s'éloigne de la fusée à une vitesse $-u$. Cependant, dans ce référentiel le signal de confirmation est émis à une distance $|x'_B|$ et après avoir été émis, le mouvement de la Terre n'a plus aucune influence sur le trajet du signal vers la fusée.

2 Barre relativiste en mouvement

Une barre de longueur au repos L_0 se déplace à vitesse v vers un observateur immobile. Deux lampes S_1 et S_2 sont fixées aux extrémités de la barre. La lampe S_1 s'allume plus tôt que la lampe S_2 de sorte que les deux impulsions lumineuses arrivent à l'observateur en même temps. Au moment de l'émission de la lumière, les lampes S_1 et S_2 se trouvaient respectivement aux points x_1 et x_2 (voir figure). Quelle est la distance $x_2 - x_1$ entre les lampes mesurées par l'observateur ?

Solution 1 Soit L la longueur de la barre et soit Δt l'intervalle de temps entre les deux impulsions lumineuses dans le référentiel de l'observateur. Pendant Δt , la lumière de la lampe S_1 parcourt la distance $c\Delta t = x_2 - x_1$. En même temps, la barre parcourt la distance $v\Delta t = x_2 - x_1 - L$. On obtient :

$$x_2 - x_1 = c\Delta t = L + v\Delta t \quad (9)$$

D'ici, on exprime l'intervalle de temps Δt :

$$\Delta t = \frac{L}{c - v} = \frac{L}{c(1 - \beta)} \quad (10)$$

où $\beta = v/c$. En combinant ces deux équations, nous obtenons :

$$x_2 - x_1 = c\Delta t = \frac{L}{1 - \beta} \quad (11)$$

La longueur de la barre dans le référentiel de l'observateur est contractée par rapport à la longueur au repos, c'est-à-dire $L = L_0/\gamma$, où $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Finalement, nous avons :

$$x_2 - x_1 = \frac{L_0}{(1 - \beta)\gamma} = L_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = L_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = L_0 \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} \quad (12)$$

Solution 2 : Pour ceux maîtrisant déjà les transformations de Lorentz, il est possible de résoudre le problème alternativement. On considère la notation selon le tableau suivant :

	réf. de l'observateur	réf. de la barre
lampe 1 s'allume	x_1, t_1	x'_1, t'_1
lampe 2 s'allume	x_2, t_2	x'_2, t'_2

Selon la transformation de Lorentz : $x = \gamma(x' + vt')$. Alors, il est possible d'exprimer $x_2 - x_1$ en fonction des coordonnées spatio-temporelles du référentiel de la barre.

$$x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1 + v(t'_2 - t'_1)) \quad (13)$$

Dans son propre référentiel, la barre a une longueur $L_0 = x'_2 - x'_1$, et la lumière met un temps $t'_2 - t'_1 = L_0/c$ à parcourir cette distance, on trouve :

$$x_2 - x_1 = \gamma L_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) = L_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (14)$$

3 Physique des particules

Parmi les innombrables particules observées dans l'accélérateur du LHC au CERN (Genève), on rencontre parfois la particule nommée Λ_0 . Sa durée de vie au repos est de τ_0 , après quoi elle se désintègre. Les appareils de mesure la repèrent pendant $\tau = \frac{13}{5}\tau_0$. *Indication : Le problème est unidimensionnel.*

- (a) Montrer que la vitesse de la particule par rapport aux appareils de mesure est de $v = \frac{12}{13}c$. Quelle est la longueur L de sa trace (le chemin enregistré par le détecteur depuis son apparition jusqu'à sa désintégration) ? De quelle longueur L_0 est la trace de la particule dans son référentiel propre ?

Le phénomène est mesuré quotidiennement au LHC et témoigne en faveur de la théorie de la relativité restreinte ; L'existence de la particule Λ_0 est prolongée par rapport à sa durée de vie réelle à cause de sa vitesse par rapport aux instruments de mesure. En effet, le temps s'écoule différemment que l'on soit dans le laboratoire ou dans le référentiel de la particule. Si on se place dans un référentiel dans lequel la particule est au repos (le référentiel propre), la durée de vie est de τ_0 . Si on se déplace à la vitesse v par rapport à la particule (ou de façon équivalente, on observe la particule se déplacer à la vitesse v), on constate une dilatation du temps donné par

$$\tau = \gamma\tau_0 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (17)$$

On en dégage la vitesse de la particule par rapport au laboratoire

$$v = c\sqrt{1 - \frac{\tau_0^2}{\tau^2}} = c\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = c\sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}c \quad (18)$$

La longueur de la trace mesurée par le détecteur est (simplement)

$$L = v\tau = \frac{12}{13}c\tau \quad (19)$$

Pour répondre à la question de la longueur du tracé dans le référentiel propre, il y a deux interprétations aboutissant à la même solution :

1. Du point de vue de la particule, c'est le laboratoire qui bouge à la vitesse v . Pendant le temps τ_0 , ce dernier se sera déplacé de

$$L_0 = v\tau_0 = \frac{12}{13}c\tau_0 \quad (20)$$

2. Si dans le laboratoire on mesure la distance L , en se projetant dans le référentiel propre, il y aura contraction des longueurs donnée par

$$L_0 = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \stackrel{(17,19)}{=} v\tau \frac{\tau_0}{\tau} = v\tau_0 = \frac{12}{13}c\tau_0 \quad \# \quad (21)$$

- (b) On détecte deux particules Λ_0 créées au même moment et au même endroit. Elles se déplacent avec des vitesses de normes égales à $v = \frac{12}{13}c$, mais de directions opposées. Quelle est la vitesse u de l'une par rapport à l'autre ? Est-ce qu'elles se désintègrent en même temps dans le laboratoire ? Même question, dans le référentiel de l'une des particules ? Justifier les réponses par des calculs.

Le raisonnement classique nous laisserait croire que la vitesse relative entre les deux particules est $u = 2v > c$. Évidemment, une vitesse plus élevée que celle de la lumière est contraire au 2^{ème} postulat de la relativité. La loi de composition de vitesses est modifiée comme ceci

$$u = \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = c \frac{2 \cdot 12 \cdot 13}{169 + 144} = \frac{312}{313}c \quad (22)$$

De cette manière, la vitesse relative est très proche de la vitesse de la lumière, mais reste toujours inférieure.

La simultanéité est une notion relative. Plaçons l'origine de l'espace-temps à l'endroit et au moment où ces deux particules surgissent. Dans le référentiel du laboratoire, elles ont la même vitesse en norme. La manière dont le temps s'écoule dans le laboratoire par rapport à leur référentiel propre est la même. Elles se désintègrent donc au même moment τ et à la même distance L d'un côté et de l'autre de l'origine.

Par contre, dans le référentiel propre de l'une des particules (peu importe laquelle), il n'y a plus cette symétrie : l'une est au repos (nommons cette particule A) et l'autre (particule B) se déplace à la vitesse u . Il y a alors nouvelle dilatation du temps propre de B par rapport à A (raisonnement identique à la question a)

$$\tau' = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{313\tau_0}{\sqrt{313^2 - 312^2}} > \tau_0 \quad (23)$$

Ainsi, la particule A se désintègre avant la particule B dans le référentiel propre de A . Si on échange A et B , l'affirmation précédente est aussi vraie. Même si cela paraît paradoxal, c'est le principe même de la relativité.

Alternativement, on peut répondre à cette question en utilisant les transformations de Lorentz pour passer du référentiel du laboratoire au référentiel propre de la particule A (qui, supposons, voyage dans la direction positive de l'axe des x). Remarquons d'abord que l'origine de l'espace-temps ne change pas et donc l'évènement *création de B* se situe à $(0, 0)$ dans n'importe quel référentiel. Ensuite, on sait que B disparaît à $x = -L$ et $t = \tau$. Par transformation de Lorentz, on obtient

$$\tau' = \gamma \left(\tau + \frac{vL}{c} \right) \stackrel{(17,19)}{=} \tau_0 \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} = \tau_0 \frac{13^2 + 12^2}{13^2 - 12^2} > \tau_0 \quad (24)$$

En remplaçant u par son expression en (22), on montre sans difficulté (sauf algébrique) que les τ' de (23) et (24) sont identiques.

4 Simultanéité

Dans un référentiel R , deux événements 1 et 2 ont lieu en $(x_1 = x_0, t_1 = x_0/c)$ et $(x_2 = 2x_0, t_2 = x_0/2c)$. Quelle est la vitesse du référentiel R' dans lequel les deux événements ont lieu simultanément ? Déterminer l'instant correspondant.

Dans le référentiel R' , les événements ont pour coordonnées :

$$x'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct_1) \quad x'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct_2) \quad (27)$$

$$ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) \quad ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2) \quad (28)$$

où $\beta = v/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

On veut que les deux événements soient simultanés dans R' , ce qui signifie que $t'_1 = t'_2$. Ainsi,

$$\beta = \frac{c(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow v = -\frac{c}{2} \quad (29)$$

Le fait que $v < 0$ signifie seulement que le référentiel R' se déplace dans le sens négatif le long de l'axe x du référentiel R . L'instant cherché est

$$t'_1 = t'_2 = \sqrt{3} \frac{x_0}{c} \quad (30)$$

5 Invariance des équations de Maxwell, partie 2

Note : La première partie de cet exercice a été traitée comme exercice dans la série de la semaine précédente.

Dans cet exercice, on se propose de trouver quelle transformation laisse l'équation d'onde des champs électromagnétiques invariante. En définissant l'opérateur d'Alembertien $\square = \partial^2/\partial(ct)^2 - \nabla^2$, on a montré que l'équation d'onde n'est pas invariante sous les transformations de Gallilée et donc que les transformations galliléennes ne sont pas adaptés pour l'électromagnétisme. On va maintenant identifier les transformations qui rendent l'équation d'onde invariante et vérifier que c'est bien le cas pour les transformations de Lorentz.

- (a) Décomposer l'opérateur $\square$ à l'aide de l'opérateur $\nabla \equiv (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)^T$ et d'une matrice diagonale G qu'il faudra préciser.

Afin d'obtenir un opérateur de la forme du d'Alembertien $\square$, il faut donc multiplier $\nabla^T G \nabla$ où G est une matrice qu'il faut définir. Si G était la matrice identité, on obtiendrait alors un laplacien généralisé $\nabla^2 = \sum_{i=0,1,2,3} \partial^2/\partial x_i^2$. Pour obtenir le changement de signe sur les dérivées secondes spatiales observé dans l'opérateur du d'Alembertien, il faut introduire une matrice G , appelée métrique de Minkowski, dont l'expression est donnée par :

$$G = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (33)$$

et donc la décomposition suivante pour l'opérateur $\square$:

$$\square = \begin{pmatrix} \partial_t & \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \quad (34)$$

- (b) Démontrer que celle-ci doit satisfaire la relation suivante :

$$G = \Lambda^T G \Lambda,$$

On supposera la transformation linéaire, c'est-à-dire $\vec{x}' = \Lambda \vec{x}$ où Λ est une matrice 4x4.

Pour simplifier, on décrit les composantes du vecteur $\vec{x}$ avec la notation $(x_0 = t, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)^T$. Sous le changement de coordonnées Λ , l'opérateur ∇ se transforme avec le Jacobien, c'est-à-dire $\nabla' = J \nabla$ où le Jacobien est donné par :

$$J = (\partial x'_i / \partial x_j)_{ij} \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \quad (35)$$

Sachant que $\vec{x}' = \Lambda \vec{x}$, on constate que $J = \Lambda$ dans le cas des transformations linéaires. Par conséquent, l'opérateur ∇ transforme comme :

$$\nabla' = \Lambda \nabla \quad (36)$$

Le but de cette partie est de trouver quelles relations doivent satisfaire les matrices de transformation Λ afin que l'opérateur $\square$ soit un invariant pour ce type de transformation. En utilisant les résultats trouvés en (36) et (34), il est possible d'écrire $\square'$

$$\square' = \nabla'^T G \nabla' = (\Lambda \nabla)^T G (\Lambda \nabla) = \nabla^T \Lambda G \Lambda \nabla = \nabla^T G \nabla = \square. \quad (37)$$

Par conséquent, en imposant que $G = \Lambda^T G \Lambda$, on obtient que $\square' = \square$. Ceci permet à l'équation d'onde d'être invariante si l'on suppose que $\vec{E}' = \mathcal{P}(\delta) \vec{E}$ comme vu au point b). Les matrices Λ satisfaisant la relation (37) appartiennent au groupe $O(1, 3)$ où $(1, 3)$ est la signature de la métrique G .

(c) Démontrer que ces matrices Λ forment un groupe. Montrer qu'elles prennent la forme suivante :

$$\Lambda_x(\beta) = \left(\begin{array}{cc|c} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array} \right),$$

ce qui correspond au changement de coordonnées du référentiel $\mathcal{R}'$ décrit au point (a) avec $\beta = v/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

On commence par montrer que les matrices Λ forment un groupe. L'associativité découle du fait que les matrices carrées forment une algèbre et n'est pas à prouver. Il faut donc prouver la loi de composition interne, l'existence de l'élément neutre, et l'existence de l'inverse :

$$\text{Composition interne : } (\Lambda_1 \Lambda_2)^T G (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^T (\Lambda_1^T G \Lambda_1) \Lambda_2 = \Lambda_2^T G \Lambda_2 = G \quad (38)$$

$$\text{Élément neutre : } I^T G I = I \text{ donc } I \text{ appartient au groupe} \quad (39)$$

$$\text{Inverse : } (\Lambda^{-1})^T G \Lambda^{-1} = (\Lambda^{-1})^T (\Lambda^T G \Lambda) \Lambda^{-1} = G \quad (40)$$

donc si Λ appartient au groupe, alors Λ^{-1} également

On en conclut que les matrices Λ forment effectivement un groupe.

Finalement, on vérifie que le changement de coordonnées donné par $\Lambda_x(\beta)$ appartient également à ce groupe. Par calcul direct, on obtient que :

$$\Lambda_x(\beta)^T G \Lambda_x(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma^2(1 - \beta^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2(\beta^2 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = G \quad (41)$$

En utilisant le fait que $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$ par définition, on conclut la démonstration.

(d) Pour les curieux : Montrer que les rotations spatiales appartiennent également à ce groupe.

Les matrices de rotations spatiales peuvent s'écrire comme composition des applications linéaires suivantes :

$$\Lambda[R_x(\theta)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \Lambda[R_y(\theta)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$\Lambda[R_z(\theta)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $R_i(\theta)$ sont les matrices de rotation en 3 dimensions et appartenant au groupe $SO(3)$. Les matrices ci-dessus sont par blocs et vérifient la relation $\Lambda^T G \Lambda = G$. On peut le vérifier pour la première matrice de rotation :

$$\Lambda[R_x(\theta)]^T G \Lambda[R_x(\theta)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{pmatrix} = G \quad (43)$$

Cela implique simplement que $R_i^T(\theta)R_i(\theta) = I$, ce qui est la définition du groupe $SO(3)$. Par conséquent, les rotations spatiales sont des transformations de Lorentz.

Remarque : Le groupe défini par la relation $\Lambda^T G \Lambda = G$ est appelé le groupe orthogonal $O(1,3)$ où $(1,3)$ donne la signature de la métrique G . si G est la matrice identité, alors la relation devient $\Lambda^T \Lambda = I$ et correspond aux matrices orthogonales, noté de manière générale $O(n)$. Plus spécifiquement, les matrices de Lorentz, décrivant donc les transformation de Lorentz Λ , appartiennent à un sous-groupe de $O(1,3)$, appelé le groupe orthogonal spécial orthochrone $SO(1,3)^+$ qui désigne les matrices Λ satisfaisant $\Lambda^T G \Lambda = G$ mais également le fait que $\det(\Lambda) = 1$ et $\Lambda_{00} \geq 1$. Ces propriétés sont vérifiées pour les matrices testées ci-dessus, qui correspondent donc aux rotations mais aussi au changement de coordonnées d'un référentiel $\mathcal{R}'$ en mouvement rectiligne le long de l'axe x.