

17 mai 2024

Corrigé 11 : Relativité restreinte : Contraction des longueurs et dilatation du temps

1 Invariance des équations de Maxwell, partie 1

Note : La deuxième partie de cet exercice sera proposée comme exercice dans la série de la semaine prochaine.

Dans cet exercice, on se propose de trouver quelle transformation laisse l'équation d'onde des champs électromagnétiques invariante. En définissant l'opérateur d'Alembertien $\square = \partial^2/\partial(ct)^2 - \nabla^2$, l'équation d'onde s'écrit :

$$\square \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \square \vec{B} = 0$$

- (a) On commence par supposer un référentiel $\mathcal{R}'$ en mouvement rectiligne uniforme le long de l'axe $\vec{e}_x$ de vitesse v par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ supposé au repos. En utilisant les transformations galiléennes, réécrivez les équations d'onde électromagnétiques en termes des coordonnées $(t', \vec{x}')$ de $\mathcal{R}'$.

On définit dans un premier temps, les transformations de Galilée comme suit :

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{1}$$

En réalité, les transformations de Galilée permet également les translations de toutes les coordonnées $(t, \vec{x})^T \rightarrow (t, \vec{x})^T + \vec{a}$ mais ces transformations n'influent pas sur le résultat final. À partir de ces changement de coordonnées, il est possible de réécrire les dérivées partielles des coordonnées en $\mathcal{R}$ avec les coordonnées de $\mathcal{R}'$ avec la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z'} \end{aligned} \tag{2}$$

Les dérivées secondes sont donc donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \\ \nabla'^2 &= \nabla^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Par conséquent, on note l'équation d'onde dans les nouvelles coordonnées comme suit :

$$\begin{aligned} \square \vec{E} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2 \frac{v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right) \vec{E} - \nabla'^2 \vec{E} \\ &= \square' \vec{E} - \frac{v}{c^2} \left(2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x' \partial t'} - v \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x'^2} \right) \end{aligned} \tag{4}$$

On constate déjà que la supposition $\vec{E}'(t', \vec{x}') = \vec{E}(t, \vec{x})$ ne permet pas de montrer l'invariance des équations d'onde sur les champs électromagnétiques.

- (b) Conclure qu'il est impossible de réécrire les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ de sorte à ce que l'équation d'onde soit invariante. On supposera que seul les transformations linéaires des champs électromagnétiques du type $\vec{E}' = C\vec{E}$ sont possibles.

En utilisant l'indication, on peut écrire $\vec{E} = C^{-1}\vec{E}'$. Étant donnée que C ne dépend pas des coordonnées spatio-temporelles, elle commute donc avec les dérivées partielles, ce qui s'écrit comme

$$\begin{aligned}\square\vec{E} &= \square'(C^{-1}\vec{E}') - \frac{v}{c^2} \left(2c \frac{\partial^2 C^{-1}\vec{E}'}{\partial x' \partial t'} - v \frac{\partial^2 C^{-1}\vec{E}'}{\partial x'^2} \right) \\ &= C^{-1} \left[\square'\vec{E}' - \frac{v}{c^2} \left(2c \frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial x' \partial t'} - v \frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial x'^2} \right) \right] = 0\end{aligned}\tag{5}$$

Puisque C est inversible, alors on en déduit que l'équation d'onde n'est pas invariante sous les transformations de Gallilé. Ce raisonnement peut être généralisé. En effet, la transformation des champs électromagnétiques peut être étendue aux transformations locales, c'est-à-dire que $\vec{E}' = \mathcal{P}(\delta)\vec{E}$, où $\mathcal{P}(\delta)$ est un polynôme d'ordre fini pouvant contenir des dérivées partielles. Par conséquent, on peut également envisager d'écrire $\vec{E} = \mathcal{P}(\delta')\vec{E}'$ similairement et en considérant que les dérivées partielles puissent commuter, on obtient ainsi le même résultat qu'en (5). On en déduit donc que les transformations galliléennes ne sont pas adaptés pour l'électromagnétisme.

2 Fusée relativiste

Un observateur S est sur une plateforme de longueur $D_0 = 65 \text{ m}$, dans une station spatiale. Une fusée passe à une vitesse relative $u = 0.8c$ parallèle au côté de la plateforme. L'observateur S remarque qu'à un certain instant, l'avant et l'arrière de la fusée passent simultanément en face des deux extrémités de la plateforme.

- (a) Selon S , quel est le temps mis par la fusée pour passer en face d'un point donné de la plateforme ?

Selon S , la longueur L de la fusée est égale à la longueur D_0 de la plateforme. Le temps nécessaire à la fusée pour passer en face d'un point de la plateforme est pour S :

$$\Delta t_0 = \frac{L}{0.8c} = \frac{65 \text{ m}}{2.4 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}} = 0.27 \mu\text{s}\tag{6}$$

C'est un intervalle de temps propre, car S mesure l'intervalle entre deux événements se produisant au même point de son système inertiel de référence, en face duquel passent d'abord l'avant et après l'arrière de la fusée.

- (b) Quelle est la longueur propre L_0 de la fusée ?

S mesure la longueur contractée de la fusée, dont la longueur propre est donnée par :

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{65 \text{ m}}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = 108 \text{ m}\tag{7}$$

- (c) Pour un observateur S' se situant dans la fusée, quelle est la longueur D de la plateforme ?

Pour S la plateforme est fixe, donc sa longueur propre est D_0 . Pour S' , la longueur contractée de la plateforme est donc :

$$D = D_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 65 \text{ m} \cdot \sqrt{1 - 0.8^2} = 39 \text{ m} \quad (8)$$

- (d) Pour S' , combien de temps cela prend-il pour que l'observateur S passe d'un bout à l'autre de la fusée ?

Afin de passer la longueur totale de la fusée, l'observateur S doit, selon S' , bouger d'une distance égale à sa propre longueur $L_0 = 108 \text{ m}$. Le temps que cela prend sera, pour S' :

$$\Delta t' = \frac{L_0}{0.8c} = \frac{108 \text{ m}}{2.4 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}} = 0.45 \mu\text{s} \quad (9)$$

Il est important de noter que pour S' , ce n'est pas un intervalle de temps propre. En effet, considérons l'utilisation d'une horloge placée à l'avant de la fusée et mesurant le passage en face d'un point de référence fixé sur S ; une seconde horloge placée à l'arrière de la fusée mesure également le temps de passage en face de S . Les deux événements vont se produire en deux points différents (l'avant et l'arrière de la fusée) dans le référentiel S' , ne pouvant ainsi pas donner un intervalle de temps propre dans S' .

Par contre, ce temps mesuré par l'observateur S est un temps propre, puisqu'il correspond à deux événements se produisant au même point.

Les intervalles de temps mesurés par S et S' sont liés par la formule de dilatation des temps :

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{0.27 \mu\text{s}}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = 0.45 \mu\text{s} \quad (10)$$

- (e) Selon S , les deux extrémités de la fusée s'alignent simultanément avec les deux extrémités de la plateforme. Ces deux événements sont-ils également simultanés pour S' ?

Selon S' , la fusée a une longueur propre $L_0 = 108 \text{ m}$ et la plateforme a une longueur contractée $D = 39 \text{ m}$. Il n'est donc pas possible que S' voit les deux extrémités alignées simultanément. Ce résultat montre la relativité de la simultanéité : deux événements simultanés pour S ne peuvent pas l'être également pour S' .

3 Cinématique relativiste

Une barre de longueur l voyage dans la direction Ox à une vitesse v par rapport à un référentiel R . Dans son référentiel propre R' , cette barre est inclinée d'un angle θ_0 par rapport à l'axe Ox . Quelle doit être sa vitesse pour que dans R , elle ait un angle d'inclinaison $\theta = \frac{\pi}{4}$?

Dans le référentiel propre de la barre, les projections de sa longueur suivant x' et y' sont,

$$l'_x = l \cos \theta_0 \quad (11)$$

$$l'_y = l \sin \theta_0 \quad (12)$$

Pour passer au référentiel d'observation, il faut prendre en compte la contraction des longueurs

suivant la direction x , la direction y demeurant inchangée,

$$l_x = \frac{l'_x}{\gamma} \quad (13)$$

$$l_y = l'_y \quad (14)$$

L'angle θ entre la barre et l'axe z dans le référentiel R est tel que,

$$\tan \theta = \frac{l_y}{l_x} = \gamma \frac{l'_y}{l'_x} = \gamma \tan \theta_0 \quad (15)$$

Si on veut obtenir un angle d'inclinaison $\theta = \frac{\pi}{4}$, il faut que

$$\tan \theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\tan \theta_0} > 1 \quad (16)$$

Ceci n'est possible que si $0 < \tan \theta_0 < 1$. Ainsi, $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{4}$. En respectant cette condition, la vitesse cherchée est donnée par,

$$v = c\sqrt{1 - \tan^2 \theta_0} \quad (17)$$