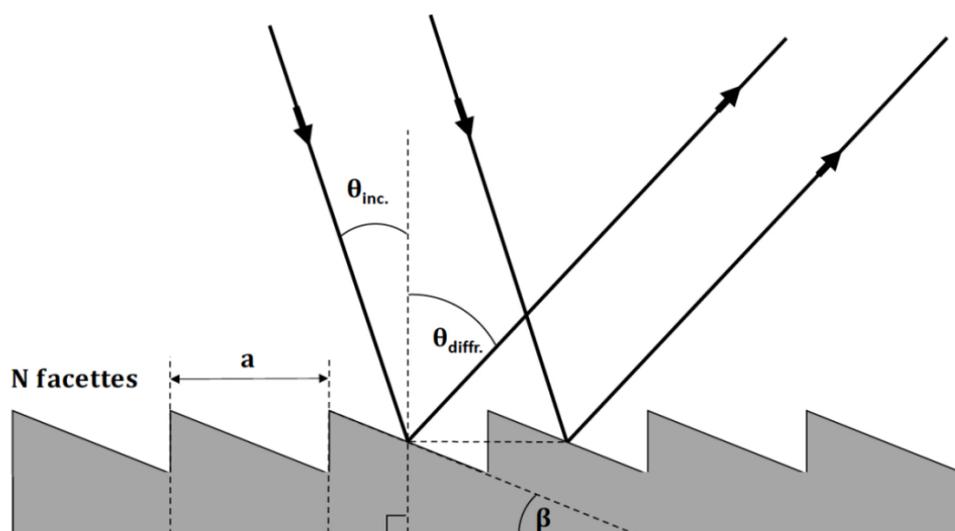


Corrigé 10 : Test à blanc

1 Diffraction par un réseau échelette

Dans les spectromètres optiques, les réseaux échelettes de diffraction sont un composant essentiel. Ces derniers permettent de concentrer une grande partie de l'intensité diffractée dans une direction donnée afin d'augmenter la résolution spectrale. Un réseau échelette est constitué de N facettes réfléchissantes, espacées d'une distance a et inclinées d'un angle β par rapport au plan macroscopique de réseau (voir figure ci-dessous). On considère un tel réseau éclairé par des ondes planes monochromatiques d'une longueur d'onde λ , toutes incidentes à un angle θ_{inc} par rapport à la normale au plan macroscopique du réseau. On se pose l'objectif de calculer la distribution angulaire de l'intensité lumineuse selon l'angle θ_{diffr} collectée sur un écran lointain (approximation de Fraunhofer).



Dans un premier temps, on considère la figure de diffraction de l'onde réfléchi par une seule facette

(a) Montrer que la figure de diffraction d'une facette peut être écrite comme

$$I = I_0 \text{sinc}^2(\chi), \quad (1)$$

où $\chi = k\Delta/2$, avec k le vecteur d'onde et Δ la différence de chemin parcourue par la lumière pour deux rayons, qu'on devra spécifier en fonction des paramètres donnés.

Il s'agit dans cette partie de calculer la figure de diffraction pour une seule facette, d'une longueur $d = a / \cos(\beta)$ inclinée d'un angle β .

Méthode acceptable

facette de longueur d) et dont le déphasage relatif est fonction du point d'incidence s sur cette facette :

$$k\Delta(s) = k \cdot s \cdot (\sin(\theta_{\text{inc}} + \beta) - \sin(\theta_{\text{diffr}} - \beta)) = \frac{2\chi}{k} = 2\chi \frac{s}{d} \quad (7)$$

En intégrant sur la longueur de la facette entre $-d/2$ et $d/2$, on obtient l'expression du champ électrique totale $E(\theta_{\text{diffr}})$:

$$E(\theta_{\text{diffr}}) \int_{-d/2}^{d/2} \frac{E_0}{d} e^{i2\chi \frac{s}{d}} ds = \frac{E_0}{d} \left. \frac{e^{i2\chi \frac{s}{d}}}{2i\chi/d} \right|_{-d/2}^{d/2} = E_0 \frac{\sin(\chi)}{\chi} = E_0 \cdot \text{sinc}(\chi) \quad (8)$$

Par conséquent, l'intensité totale $I(\theta_{\text{diffr}}) = |E(\theta_{\text{diffr}})|^2$ est donnée par :

$$I = I_0 \cdot \text{sinc}^2(\chi) \quad (9)$$

Ensuite, on considère la figure d'interférences produite par N facettes en négligeant la diffraction.

(b) Exprimer la distribution d'intensité de la figure d'interférence des N facettes. Montrer qu'elle peut être exprimée comme

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(N\Delta\phi/2)}{\sin(\Delta\phi/2)} \right]^2,$$

avec $\Delta\phi$ le déphasage créé entre deux faisceaux réfléchis par deux facettes qu'il faudra exprimer en fonction des données du problème. Donner la condition pour obtenir les maxima d'intensités.

La figure d'interférences de N facettes est comparable à la dérivation réalisée dans l'exercice 2 de la série 4.

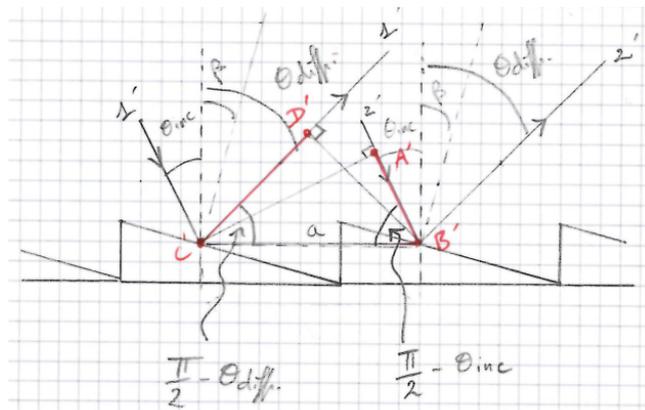


FIGURE 2 – Schéma de la partie b)

Il faut faire attention au fait que la différence de marche Δ' dépend également de l'angle θ_{inc} et s'écrit comme :

$$\Delta' = A'B' - C'D' = a \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{\text{inc}}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{\text{diffr}}\right) \right) = a \cdot (\sin(\theta_{\text{inc}}) - \sin(\theta_{\text{diffr}})) \quad (10)$$

Le déphasage créé entre 2 faisceaux réfléchis par 2 facettes est donnée par :

$$\Delta\phi = k \cdot \Delta' = ka \cdot (\sin(\theta_{\text{inc}}) - \sin(\theta_{\text{diffr}})) \quad (11)$$

On considère désormais N facettes. Le champ électrique totale est donnée par la somme

des contributions de chaque facette, en tenant compte donc du terme de phase $\Delta\phi$:

$$E_{tot} = \sum_{n=1}^{N-1} E_0 (e^{i\Delta\phi})^n = E_0 \frac{e^{iN\Delta\phi} - 1}{e^{i\Delta\phi} - 1} = E_0 \frac{\sin\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \quad (12)$$

L'intensité totale est donc donnée par :

$$I = |E_{tot}|^2 = I_0 \left[\frac{\sin(N\Delta\phi/2)}{\sin(\Delta\phi/2)} \right]^2 \quad (13)$$

Cette expression est analogue à celle trouvée en exercice 2, série 4. On remarque que les maxima d'interférences est données par :

$$\frac{\Delta\phi}{2} = m\pi \quad (14)$$

La figure d'interférence obtenue est illustrée par la Figure ci-dessous. C'est la même que celle pour le cas connu d'un réseau de N fentes, mis à part que le maximum principal correspondant à $m = 0$ (réflexion habituelle) est déplacé vers la position $\theta_{\text{diffr}} = \theta_{\text{inc}}$

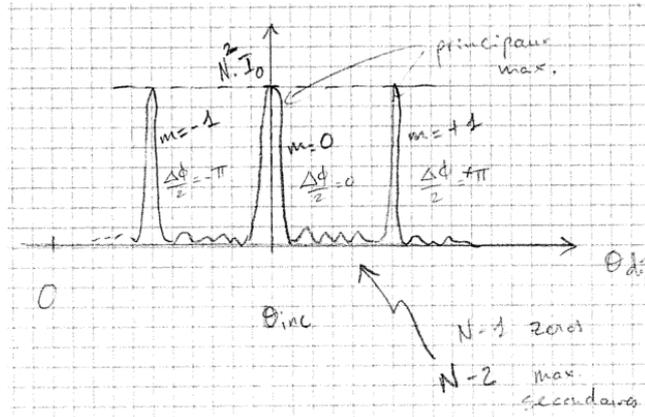


FIGURE 3 – Figure de l'interférence de N sources

Maintenant, on considère l'effet combiné de l'interférence et de la diffraction.

- (c) Exprimer la distribution d'intensité de la figure de diffraction totale du réseau de la figure ci-dessus en fonction de χ et des autres paramètres du système.

La figure de diffraction totale observée correspond à une combinaison des solutions trouvées en (9) et (13) :

$$I(\theta_{\text{diffr}}) = I_0 \cdot \text{sinc}^2(\chi) \cdot \left[\frac{\sin(N\Delta\phi/2)}{\sin(\Delta\phi/2)} \right]^2 \quad (15)$$

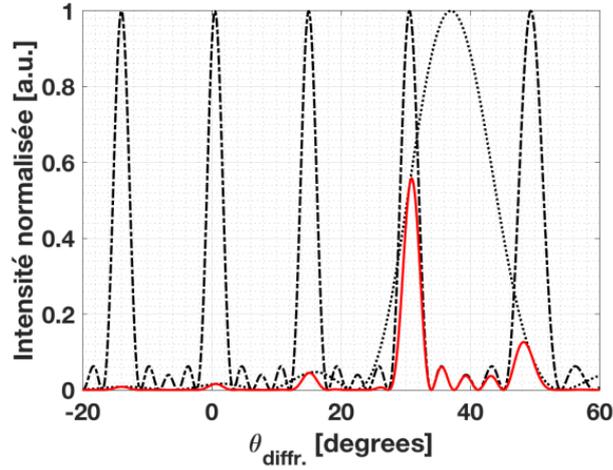


FIGURE 4 – En pointillé noir la figure de diffraction, en traitillé noir la figure d’interférence avec les ordres $m = -2, -1, 0, +1, +2$ visibles et en trait plein rouge la figure combinée. Paramètres : $\theta_{\text{inc}} = 15^\circ$, $\lambda = 500\text{nm}$, $N = 5$ facettes, 500 facettes/mm soit $a = 1/500$ mm, $\beta = 11.0^\circ$ et $I_0 = 1$

- (d) Comment pourrait-on faire coïncider le maximum de diffraction avec un maxima d’interférence ? Donner l’expression de β qui permettrait cette coïncidence.

En modifiant la valeur de β , il est possible de faire coïncider le maximum de diffraction et un maximum d’interférence.

$$\begin{cases} \text{Maximum de diffraction : } \theta_{\text{diffr}} = \theta_{\text{inc}} + 2\beta \\ \text{Maxima d’interférence : } \Delta\phi = m2\pi = m\lambda k \end{cases} \quad (16)$$

Ce qui peut se réécrire, en utilisant l’équation (11) :

$$\frac{2\pi a}{\lambda} \cdot (\sin(\theta_{\text{inc}}) - \sin(\theta_{\text{inc}} + 2\beta)) = m2\pi \quad (17)$$

En inversant l’équation (17), on obtient une expression pour β qui permet la coïncidence entre le maximum de diffraction et le maximum d’interférence :

$$\beta = \frac{1}{2} \arcsin \left(-\frac{m\lambda}{a} + \sin(\theta_{\text{inc}}) \right) - \frac{\theta_{\text{inc}}}{2} \quad (18)$$



FIGURE 5 – Figure d’interférence d’un réseau 1D illuminé par une lumière blanche. De gauche à droite $m = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$.

D’après la figure 5 (expérience), le deuxième ordre d’interférence ($m = 2$) donne une séparation intéressante pour une utilisation en spectrométrie.

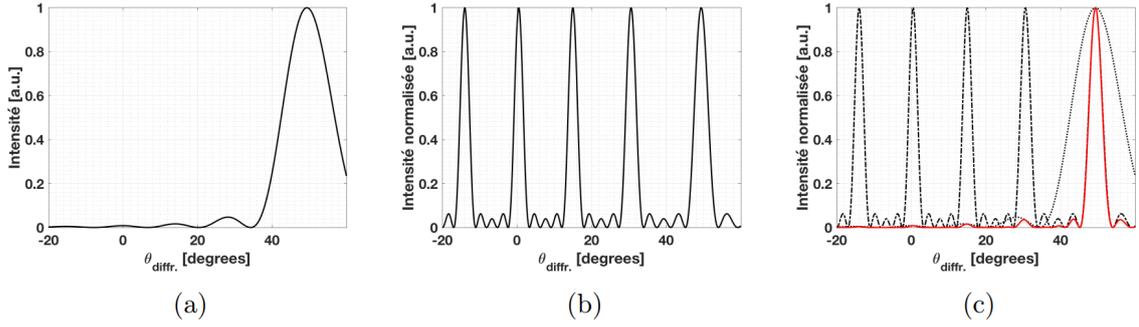
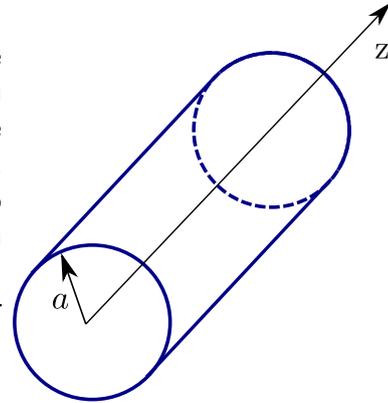


FIGURE 6 – (a) figure de diffraction, (b) figure d'interférences avec les ordres $m = -2, -1, 0, +1, +2$ visibles et (c) figure résultante des deux phénomènes combinés. Paramètres : $\theta_{\text{inc}} = 15^\circ$, $\lambda = 500\text{nm}$, $N = 5$ facettes, $a = 1/500$ mm, $\beta = 15^\circ$, $I_0 = 1$

2 Guide d'onde et cavité cylindrique

Dans cet exercice, on s'intéresse à la propagation d'une onde dans un guide d'onde cylindrique, infiniment long et de rayon a . On considère une onde électromagnétique qui se propage dans la direction de l'axe de symétrie du cylindre, noté z . Pour simplifier, on va considérer un mode dont le champ électrique possède des composantes uniquement dans le plan transverse à la propagation, autrement dit $E_z = 0$. De plus, on considère une propagation avec des réflexions totales sur les parois du guide d'onde (conducteur parfait).



- (a) Dans un premier temps, on se propose de dériver l'expression du champ électrique. Pour un problème de ce type, il est plus simple d'utiliser le potentiel vecteur \vec{F} (noter qu'il ne s'agit pas du potentiel vecteur \vec{A} usuel) défini comme

$$\vec{E} = -\frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \times \vec{F}, \quad (19)$$

avec ϵ la permittivité du milieu remplissant le cylindre. Montrer que \vec{F} satisfait la même équation d'onde que \vec{E} . Si on considère les champs électriques et magnétiques avec une dépendance harmonique (c'est à dire $E, B \sim \exp(i\omega t)$), montrer qu'on obtient :

$$\nabla^2 \vec{F} = -k^2 \vec{F}, \quad (20)$$

où $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$, avec μ la perméabilité magnétique du milieu remplissant le cylindre. L'avantage de l'utilisation de \vec{F} vient du fait que dans ce cas, on peut faire l'hypothèse que $\vec{F} = F_z \hat{z}$. En considérant les coordonnées cylindriques et une solution pour F_z de la forme $F_z(\rho, \phi, z) = f(\rho)g(\phi)h(z)$, montrer que le champ électrique peut être exprimé comme :

$$E_\rho = -\frac{m}{\epsilon \rho} [A_1 J_m(k_\rho \rho) + B_1 Y_m(k_\rho \rho)] [-C_2 \sin(m\phi) + D_2 \cos(m\phi)] \cdot [C_3 \cos(k_z z) + D_3 \sin(k_z z)],$$

$$E_\phi = \frac{k_\rho}{\epsilon} [A_1 J'_m(k_\rho \rho) + B_1 Y'_m(k_\rho \rho)] [C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi)] \cdot [C_3 \cos(k_z z) + D_3 \sin(k_z z)],$$

$$E_z = 0,$$

où k_ρ et k_z sont des constantes qu'on déterminera par la suite.

Commençons par montrer que \vec{F} satisfait la même équation d'onde que \vec{E} . L'équation d'onde s'exprime comme

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \vec{E}. \quad (21)$$

En remplaçant l'expression de \vec{F} , on trouve :

$$-\frac{1}{\epsilon} \nabla^2 (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = -\frac{1}{c^2} \epsilon \frac{\partial}{\partial t^2} (\vec{\nabla} \times \vec{F}). \quad (22)$$

On peut commuter l'ordre des dérivées entre le laplacien et le rotationnel, ainsi que entre la dérivée temporelle et le rotationnel (vérifiable en exprimant les expressions en composantes), on obtient donc :

$$\vec{\nabla} \times (\nabla^2 \vec{F}) = \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial t^2} \vec{F}. \quad (23)$$

Les deux rotationnels sont égaux, impliquant que les deux expressions sont égales (à un facteur prêt qu'on omettra ici) :

$$\nabla^2 \vec{F} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \vec{F}. \quad (24)$$

En considérant la dépendance harmonique des champs et le fait que $\omega = \frac{k}{c}$, on obtient bien :

$$\nabla^2 \vec{F} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \vec{F} = \frac{1}{c^2} (-\omega^2) \vec{F} = -k^2 \vec{F}. \quad (25)$$

En coordonnées cylindriques, l'équation 20 se réécrit

$$\frac{\partial^2 F_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} = -k^2 F_z. \quad (26)$$

En remplaçant l'expression $F_z(\rho, \phi, z) = f(\rho)g(\phi)h(z)$ on trouve

$$gh \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + gh \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + fh \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2} + fg \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -k^2 fgh. \quad (27)$$

On divise par fgh et on remplace les dérivées partielles par des dérivées totales :

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{f} \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} + \frac{1}{g} \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 g}{d\phi^2} + \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = -k^2. \quad (28)$$

On peut maintenant utiliser la méthode de la séparation des variables, en remarquant que le dernier terme de gauche de l'équation est le seul terme dépendant de z . On peut donc écrire :

$$\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = -k_z^2, \quad (29)$$

et finalement obtenir une première équation :

$$\frac{d^2 h}{dz^2} = -k_z^2 h. \quad (30)$$

Le troisième terme de l'équation est le seul terme dépendant de ϕ , on peut écrire qu'il est égal à une constante $-m^2$:

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\phi^2} = -m^2, \quad (31)$$

et obtenir une deuxième équation :

$$\frac{d^2 g}{d\phi^2} = -m^2 g. \quad (32)$$

En définissant la constante k_ρ telle que

$$k_\rho^2 = k^2 - k_z^2 \Rightarrow k^2 = k_\rho^2 + k_z^2, \quad (33)$$

et en multipliant l'équation 28 par $\rho^2 f$, on trouve

$$\rho^2 \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \rho \frac{df}{d\rho} + [(k_\rho \rho)^2 - m^2] f = 0. \quad (34)$$

L'équation 33 est l'équation de contrainte de la solution de l'équation d'onde en coordonnées cylindriques, tandis que l'équation 34 est l'équation différentielle de Bessel.

Pour résumer, en considérant une solution séparable pour le potentiel vecteur F_z de la forme $F_z(\rho, \phi, z) = f(\rho)g(\phi)h(z)$, l'équation différentielle 26 se réduit à trois équations 34, 32 et 30 et l'équation de contrainte 33.

La solution pour $f(\rho)$ peut s'écrire soit :

$$f(\rho) = A_1 J_m(k_\rho \rho) + B_1 Y_m(k_\rho \rho) \quad (35)$$

soit

$$f(\rho) = C_1 H_m^{(1)}(k_\rho \rho) + D_1 H_m^{(2)}(k_\rho \rho), \quad (36)$$

où J_m et Y_m représentent les fonctions de Bessel d'ordre m de première et seconde espèce. $H_m^{(1)}$ et $H_m^{(2)}$ représentent les fonctions de Hankel d'ordre m de première et seconde espèce. La solution pour $g(\phi)$ peut s'écrire soit

$$g(\phi) = A_2 e^{-im\phi} + B_2 e^{im\phi} \quad (37)$$

soit

$$g(\phi) = C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi). \quad (38)$$

La solution pour $h(z)$ peut s'écrire soit

$$h(z) = A_3 e^{-ik_z z} + B_3 e^{ik_z z} \quad (39)$$

soit

$$h(z) = C_3 \cos(k_z z) + D_3 \sin(k_z z). \quad (40)$$

Ces solutions sont équivalentes. Selon le type de problème, le choix d'un type de solution peut être plus adéquat qu'un autre. La forme la plus appropriée pour une onde se propageant dans un guide d'onde cylindrique est la combinaison suivante :

$$F_z(\rho, \phi, z) = [A_1 J_m(k_\rho \rho) + B_1 Y_m(k_\rho \rho)] [C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi)] [C_3 \cos(k_z z) + D_3 \sin(k_z z)]. \quad (41)$$

En utilisant l'équation 19, on peut finalement trouver une expression pour les composantes du champ électrique :

$$\begin{aligned} E_\phi &= \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \\ &= \frac{k_\rho}{\epsilon} [A_1 J'_m(k_\rho \rho) + B_1 Y'_m(k_\rho \rho)] [C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi)] \cdot [C_3 \cos(k_z z) + D_3 \sin(k_z z)]. \\ E_\rho &= -\frac{1}{\epsilon \rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} \\ &= -\frac{m}{\epsilon \rho} [A_1 J_m(k_\rho \rho) + B_1 Y_m(k_\rho \rho)] [-C_2 \sin(m\phi) + D_2 \cos(m\phi)] \cdot [C_3 \cos(k_z z) + D_3 \sin(k_z z)]. \\ E_z &= 0. \end{aligned} \quad (42)$$

- (b) Quels sont les conditions aux bords que le champ électrique doit satisfaire ? Appliquer les conditions aux bords que le champ électrique doit satisfaire et trouver une expression pour k_z en fonction du rayon a , de k et de χ_{mn} , le n -ième zéro de J'_m , la dérivée première de la fonction de Bessel J_m d'ordre m . Déterminer la fréquence de coupure, définie comme la fréquence minimale en dessous de laquelle l'onde devient évanescence (décroit exponentiellement) dans le guide d'onde. Déterminer finalement la longueur d'onde guidée.

On considère un métal parfait, la composante du champ électrique tangentielle à la paroi du guide d'onde doit s'annuler :

$$E_\phi(\rho = a, \phi, z) = 0. \quad (45)$$

Une autre condition vient du fait que le champ électrique doit être fini partout dans l'espace considéré.

Comme la fonction de Bessel du deuxième type Y_m possède une singularité en $\rho = 0$, cette solution ne peut pas décrire le champ électrique selon E_ρ et doit être écartée, on a donc $B_1 = 0$.

En appliquant la condition au bord sur E_ϕ , on trouve :

$$E_\phi(\rho = a, \phi, z) = \frac{k_\rho A_{mn}}{\epsilon} J'_m(k_\rho a) [C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi)] [C_3 \cos(k_z z) + D_3 \sin(k_z z)] = 0, \quad (46)$$

où dans le terme A_{mn} , on a introduit une nouvelle notation mn qui sera justifiée dans la suite. L'équation 46 est satisfaite si

$$J'_m(k_\rho a) = 0 \Rightarrow k_\rho a = \chi_{mn} \Rightarrow k_\rho = \frac{\chi_{mn}}{a}. \quad (47)$$

χ_{mn} représente le n -ième zéro ($n = 1, 2, 3, \dots$) de la dérivée de la fonction de Bessel J_m d'ordre m ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$). Les modes qui se propagent dans le guide d'onde peuvent être classifiés en mode TE_{mn} , où m est l'indice qui se réfère au nombre de variation azimutales et n est l'indice qui se réfère au nombre de variation radiales.

La solution pour $(k_z)_{mn}$ est donc :

$$(k_z)_{mn} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\chi_{mn}}{a}\right)^2} \quad (48)$$

On remarque que si $k < \left(\frac{\chi_{mn}}{a}\right)$, la valeur de k_z est purement imaginaire. En exprimant le terme dépendant de z sous la forme exponentielle équivalente :

$$C_3 \cos(k_z z) + D_3 \sin(k_z z) = A_3 e^{-ik_z z} B_3 e^{ik_z z}, \quad (49)$$

on voit que la la solution pour E_ϕ est une exponentielle croissante ou décroissante. La solution exponentiellement croissante n'est pas physique et sera écartée lorsqu'on applique les conditions aux bords correctes.

L'onde est donc évanescence et ne peut pas se propager dans le guide d'onde pour des fréquences plus petites qu'une fréquence, appelée fréquence de coupure f_c .

Le fréquence de coupure f_c (cutoff) est donc définie quand $(k_z)_{mn} = 0$. On trouve :

$$k_z = 0 \Rightarrow k = \frac{\chi_{mn}}{a}, \quad (50)$$

$$(f_c)_{mn} = \frac{\chi_{mn}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (51)$$

La longueur d'onde guidée est définie comme :

$$(\lambda_g)_{mn} = \frac{2\pi}{(k_z)_{mn}}. \quad (52)$$

Dans notre cas, cette longueur est donc :

$$(\lambda_g)_{mn} = \begin{cases} \frac{2\pi}{k\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} & \text{si } k > \left(\frac{\chi_{mn}}{a}\right) \\ \infty & \text{si } f = (f_c)_{mn} \end{cases} \quad (53)$$

- (c) Comme application numérique (estimation d'ordre de grandeur), considérons un guide d'onde cylindrique de rayon $a = 3 \text{ cm}$ rempli d'un matériau diélectrique ($\epsilon_r = 3$) qui est utilisé pour propager le mode qui correspond à $m = 1$ et $n = 1$. Calculer la bande de fréquence où le guide d'onde peut être utilisé pour la propagation de ce mode. On donne dans le tableau ci-dessous quelques valeurs approximées de χ_{mn} (pour les calculs, on approximera $\epsilon_0 \sim 9 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$).

	m = 0	m = 1	m = 2
n = 1	4	2	3
n = 2	7	5	7

La fréquence de coupure pour le mode TE_{11} est :

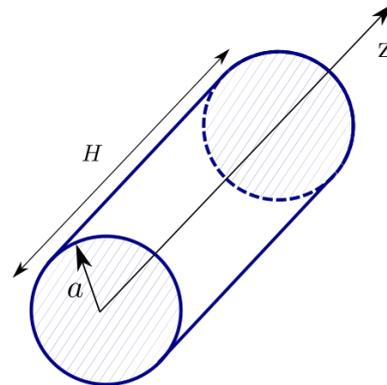
$$(f_c)_{11} = \frac{\chi_{11}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}} \sim \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot (3 \cdot 10^{-2}) \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^{-12} \cdot 3}} \sim 2 \text{ GHz} \quad (54)$$

Ensuite, d'après les valeurs de χ_{mn} , le mode dont la fréquence de coupure est la plus proche de celle du mode TE_{11} est le TE_{21} . La fréquence de coupure pour le mode TE_{21} est

$$(f_c)_{21} = \frac{(f_c)_{21}}{(f_c)_{11}} (f_c)_{11} = \frac{\chi_{21}}{\chi_{11}} (f_c)_{11} \sim \frac{3}{2} 2 \text{ GHz} = 3 \text{ GHz} \quad (55)$$

Le mode TE_{11} peut donc être excité dans le guide d'onde entre 2 GHz, sa propre fréquence de coupure, et 3 GHz. En dessus de cette fréquence, le premier mode d'ordre supérieur, le TE_{21} peut également être excité. La bande de fréquence qui permet de propager uniquement le mode TE_{11} est donc large de 1 GHz.

- (d) Considérons maintenant une situation similaire au guide d'onde cylindrique traité auparavant, mais avec deux extrémités axiales fermées espacées d'une distance H . Cette configuration correspond à une cavité résonante qui peut être utilisée pour stocker de l'énergie sous forme électromagnétique. Trouver la condition de résonance d'une telle cavité en appliquant les conditions aux bords et exprimer la fréquence de l'onde satisfaisant cette condition (c'est à dire la fréquence de résonance).



Les conditions aux bords en $\rho = a$ sont les mêmes que précédemment. On obtient donc la condition sur le vecteur d'onde radial :

$$k_\rho = \frac{\chi_{mn}}{a}, m = 0, 1, 2, 3, \dots n = 1, 2, 3, \dots \quad (56)$$

Pour le cas d'une cavité cylindrique, on a ces conditions aux bords supplémentaires :

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho, \phi, 0) = E_\rho(\rho, \phi, H) = 0, \text{ pour } 0 \leq \rho \leq a, \phi \in [0, 2\pi[, \\ E_\phi(\rho, \phi, 0) = E_\phi(\rho, \phi, H) = 0, \text{ pour } 0 \leq \rho \leq a, \phi \in [0, 2\pi[. \end{aligned} \quad (57)$$

Ces conditions ne sont pas indépendantes entre elles et utiliser les conditions sur E_ρ ou sur E_ϕ amènent au même résultat. La condition $E_\phi(\rho, \phi, 0) = 0$ implique que $C_3 = 0$. La condition $E_\phi(\rho, \phi, H) = 0$ implique que :

$$k_z = \frac{p\pi}{H}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (58)$$

La fréquence de résonance peut être dérivée de :

$$k^2 = k_\rho^2 + k_z^2 = \left(\frac{\chi_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2. \quad (59)$$

On trouve donc, en rajoutant un indice pour tenir compte du nombre de mode axial p :

$$(fr)_{mnp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{\chi_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2}, \quad (60)$$

avec $m = 0, 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$ et $p = 1, 2, 3, \dots$.

- (e) Un des paramètres les plus importants d'une cavité résonante est son facteur de qualité Q , qui est défini comme le rapport entre l'énergie électromagnétique stockée dans la cavité et la puissance dissipée à chaque période de l'oscillation.

$$Q = \omega \frac{\text{Energie stockée}}{\text{Puissance dissipée}}. \quad (61)$$

Pour le cas de la cavité cylindrique, exprimer le facteur de qualité Q dans le cas où le mode résonant étudié à la question (d) est excité dans la cavité. Pour le terme dissipatif, on va considérer que les parois du cylindre ont une résistance de surface R_s non nulle, où une partie de la puissance électromagnétique est dissipée. La résistance de surface R_s est définie comme le rapport entre le champ électrique à la surface et la densité de courant de surface.

Comme une expressions analytique est difficile à dériver, on se contentera de trouver une expression de Q en fonction des composantes des champs électriques et magnétiques.

L'énergie totale stockée dans la cavité est donnée par la somme de l'énergie du champ électrique et magnétique. On a vu au cours que les deux contributions sont égales, on a donc :

$$W = 2W_E = \epsilon \int \int \int_V |\vec{E}|^2 dV = \epsilon \int \int \int_V E_\rho^2 + E_\phi^2 dV \quad (62)$$

La puissance dissipée par perte ohmique est donnée par l'intégrale de la résistance de surface R_s multipliée par le courant surfacique J_s :

$$P_d = \int \int R_s J_s^2 dS. \quad (63)$$

Le courant de surface est exprimé grâce à la condition au bord :

$$\vec{n} \wedge \vec{H} = \vec{J}_s. \quad (64)$$

L'expression de la puissance dissipée peut donc se réécrire, en séparant la contribution de la paroi cylindrique et les contributions des parois axiales :

$$\begin{aligned}
P_d &= R_s \int \int |\vec{H}|^2 dS \\
&= R_s \left(\int_0^{2\pi} \int_0^H |\vec{H}|_{\rho=a}^2 a d\phi dz + 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a |\vec{H}|_{z=0}^2 \rho d\rho d\phi \right) \\
&= R_s \left(\int_0^{2\pi} \int_0^H (H_\rho^2 + H_\phi^2 + H_z^2)_{\rho=a} a d\phi dz + 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a (H_\rho^2 + H_\phi^2 + H_z^2)_{z=0} \rho d\rho d\phi \right)
\end{aligned} \tag{65}$$

On peut maintenant écrire l'expression pour Q , qui peut être calculée numériquement.

$$Q = \omega \frac{W}{P_d} = \frac{\omega \epsilon}{R_s} \frac{\int \int \int_V E_\rho^2 + E_\phi^2 dV}{\int_0^{2\pi} \int_0^H (H_\rho^2 + H_\phi^2 + H_z^2)_{\rho=a} a d\phi dz + 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a (H_\rho^2 + H_\phi^2 + H_z^2)_{z=0} \rho d\rho d\phi}
\tag{66}$$