

Corrigé 9 : Polarisation, réflexion et réfraction

1 Action d'une lame de quartz sur une onde polarisée rectiligne

On considère une lame de quartz d'épaisseur d et parallèle au plan Oxy et une onde EM polarisée rectiligne incidente se propageant dans la direction $\hat{z}$ et dont l'axe de polarisation fait un angle α_p avec l'axe $\hat{x}$. La lame de quartz est un matériel biréfringent dont le tenseur diélectrique peut s'écrire comme :

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{pmatrix}$$

On supposera que le quartz n'est pas aimanté, i.e $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ aussi dans le quartz.

- (a) Donner les 2 équations que doit satisfaire le vecteur d'onde $\vec{k}$ dans la lame de quartz pour qu'il y ait propagation. On nommera respectivement $n_0 = \sqrt{\epsilon_x/\epsilon_0}$ et $n_E = \sqrt{\epsilon_y/\epsilon_0}$, les indices de réfraction selon les axes ordinaires et extraordinaires de la lame de quartz.

En utilisant les équations de Maxwell définies pour tout milieu sans charge et sans courant électrique :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

En supposant que tous ces champs correspondent à des ondes planes, c'est-à-dire $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$, ces équations peuvent être réécrites en termes de $\mathbf{k}$ et ω .

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} &= 0 & \mathbf{k} \times \mathbf{H} + \omega \mathbf{D} &= 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} - \omega \mu_0 \mathbf{H} &= 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

En rappelant que $\mathbf{D} = \bar{\epsilon} \mathbf{E}$, on peut écrire une équation uniquement en termes de $\mathbf{E}$,

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\omega^2 \mu_0 \bar{\epsilon} \mathbf{E} \quad (3)$$

En écrivant $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E}$ et en rappelant que les champs se propagent le long de l'axe z , donc $\mathbf{k} = k_z \vec{e}_z$, on obtient une équation matricielle similaire à celle trouvée en cours :

$$\begin{pmatrix} \alpha_x - k_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_y - k_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

où $\alpha_x = \omega^2 \mu_0 \epsilon_x$, $\alpha_y = \omega^2 \mu_0 \epsilon_y$ et $\alpha_0 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 = \omega^2/c^2$. De cette équation, plusieurs remarques peuvent être faites. D'une part, il n'y aura pas de composante z du champ électrique à l'intérieur du quartz. En effet, $\alpha_0 E_z = 0$ impose cela. De plus, on constate que, dans le quartz, les composantes x et y ne se propageront pas de la même façon. Le matériel va donc induire un déphasage entre les 2 composantes. En effet, pour la composante x , le nombre d'onde k_z satisfaira l'équation suivante :

$$k_z^2 = \alpha_x = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon_x}{\epsilon_0} = n_o^2 \frac{\omega^2}{c^2} \quad (5)$$

La composante y imposera, quant à elle, la relation suivante pour le nombre d'onde k_z :

$$k_z^2 = n_E^2 \frac{\omega^2}{c^2} \quad (6)$$

- (b) Montrer que le champ électrique $\mathbf{E}$ à la sortie de la lame satisfait l'équation d'une ellipse en fonction de $\phi = (2\pi/\lambda_0)(n_0 - n_E)d$ et α_p , des composantes E_x , E_y et de la norme E du champ électrique :

$$\frac{E_x^2}{E^2 \cos(\alpha_p)^2} + \frac{E_y^2}{E^2 \sin(\alpha_p)^2} - \frac{2E_x E_y \cos(\phi)}{E^2 \cos(\alpha_p) \sin(\alpha_p)} = \sin^2(\phi)$$

On décompose le champ électrique incident comme suit :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E \cos(\alpha_p) \vec{e}_x + E \sin(\alpha_p) \vec{e}_y) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (7)$$

Le passage à l'interface de la composante parallèle est continue, c'est-à-dire que $\mathbf{E}_{1,\parallel} = \mathbf{E}_{2,\parallel}$. Donc, dans ce cas particulier, l'entière de l'onde incidente est transmise. En posant $\mathbf{x} = 0$ à l'entrée de la lame de quartz, on obtient donc l'expression suivante pour le champ électrique à l'entrée de la lame :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x} = 0) = (E \cos(\alpha_p) \vec{e}_x + E \sin(\alpha_p) \vec{e}_y) \exp[-i\omega t] \quad (8)$$

En utilisant le résultat trouvé au point a), le champ électrique doit être décomposé en composantes $\mathbf{E}_o$ et $\mathbf{E}_E$ qui se propageront respectivement avec $k_z = n_0\omega/c$ et $k_z = n_E\omega/c$. Par conséquent, sachant que la composante ordinaire $\mathbf{E}_o$ correspond à la composante $\hat{x}$ du champ électrique et la composante extraordinaire à la composante y , le champ électrique dans la lame de quartz peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \underbrace{E \cos(\alpha_p) \exp\left[i\frac{\omega}{c}(n_0 z - ct)\right]}_{E_o} \vec{e}_x + \underbrace{E \sin(\alpha_p) \exp\left[i\frac{\omega}{c}(n_E z - ct)\right]}_{E_E} \vec{e}_y \quad (9)$$

Le champ électrique $\mathbf{E}$ à la sortie de la lame de quartz, à $\mathbf{x} = d\vec{e}_z$, s'écrit comme :

$$\mathbf{E}(d\vec{e}_z) = E \cos(\alpha_p) \exp\left[i\frac{\omega}{c}(n_0 d - ct)\right] \vec{e}_x + E \sin(\alpha_p) \exp\left[i\frac{\omega}{c}(n_E d - ct)\right] \vec{e}_y \quad (10)$$

En effectuant une translation temporelle $t \rightarrow t + n_E d/c$ et en utilisant $k_0 = \omega/c$, il est possible de réécrire l'équation (10) en fonction de ϕ .

$$\mathbf{E}(d\vec{e}_z) = E \cos(\alpha_p) \exp[i(\phi - \omega t)] \vec{e}_x + E \sin(\alpha_p) \exp[-i\omega t] \vec{e}_y \quad (11)$$

En prenant la partie réelle (notation réelle), on obtient donc l'expression suivante :

$$\mathbf{E}_x = E \cos(\alpha_p) \cos(\omega t - \phi) \quad \mathbf{E}_y = E \sin(\alpha_p) \cos(\omega t) \quad (12)$$

En injectant ces expressions pour $\mathbf{E}_x$ et $\mathbf{E}_y$ dans l'équation de l'ellipse à démontrer, on obtient l'équation trigonométrique suivante :

$$\cos^2(\omega t - \phi) + \cos^2(\omega t) - 2 \cos(\omega t) \cos(\omega t - \phi) \cos(\phi) = \sin^2(\phi) \quad (13)$$

En utilisant la relation trigonométrique $\cos(\omega t - \phi) = \cos(\omega t) \cos(\phi) + \sin(\omega t) \sin(\phi)$, la partie de gauche de l'équation ci-dessus s'écrit comme :

$$\begin{aligned} & \underbrace{(\cos(\omega t - \phi) - \cos(\omega t) \cos(\phi))^2}_{\sin(\phi) \sin(\omega t)} - \cos^2(\omega t) \cos^2(\phi) + \cos^2(\omega t) \\ &= \sin^2(\omega t) \sin^2(\phi) + \cos^2(\omega t) \sin^2(\phi) = \sin^2(\phi) \end{aligned} \quad (14)$$

L'égalité étant vérifiée, ceci montre donc que, en général, le champ électrique sortant est polarisé elliptiquement, grâce à la nature biréfringente du quartz.

- (c) Discuter les cas où i) $\phi = 0$ ou π , ii) $\phi = \pm\pi/2$. Comparer ces résultats avec ceux trouvés en série 8, exercice 1, point d).

i) $\phi = 0$ ou π L'équation de l'ellipse se réduit à la forme suivante :

$$\frac{E_x^2}{\cos^2(\alpha_p)^2} + \frac{E_y^2}{\sin^2(\alpha_p)^2} \mp \frac{2E_x E_y}{E^2 \cos(\alpha_p) \sin(\alpha_p)} = 0 \quad (15)$$

Ceci peut se contracter comme :

$$\left(\frac{E_x}{\cos(\alpha_p)} \mp \frac{E_y}{\sin(\alpha_p)} \right)^2 = 0 \quad (16)$$

Cette dernière équation donne une relation linéaire entre E_x et E_y :

$$E_y = \pm \tan(\alpha_p) E_x \quad (17)$$

De ce résultat, on en déduit que l'onde sortante de la lame de quartz dans ce cas de figure est une onde polarisée rectiligne. Si $\phi = 0$, alors l'onde sortante est polarisée parallèlement à l'onde entrante. Dans le cas où $\phi = \pi$, alors la polarisation de l'onde sortante est symétrique à l'onde entrante par rapport à l'axe $\hat{x}$. Le résultat correspond donc au polariseur Q_π , appelé lame demi-onde trouvé dans la série 8, exercice 1 d).

ii) $\phi = \pm\pi/2$ L'équation d'ellipse s'écrit alors :

$$\frac{E_x^2}{E^2 \cos^2(\alpha_p)} + \frac{E_y^2}{E^2 \sin^2(\alpha_p)} = 1 \quad (18)$$

Il s'agit donc de l'équation d'une ellipse dont les axes $\hat{x}$ et $\hat{y}$ sont respectivement aux 2 axes de l'ellipse, ce qui n'était pas forcément le cas de l'équation générale démontrée en b). La polarisation de l'onde sortante est donc elliptique. Dans le cas spécifique où $\alpha_p = \pi/4$, on a alors l'équation suivante :

$$\frac{E_x^2}{E^2/2} + \frac{E_y^2}{E^2/2} = 1 \quad (19)$$

La polarisation de l'onde sortante est donc une polarisation circulaire dont la norme est donnée par $E/\sqrt{2}$. Ceci correspond exactement à l'effet d'une lame quart d'onde $Q_{\pi/4}$ comme vu à l'exercice 1 d), série 8.

2 Filtre de Lyot

Un filtre de Lyot est un système composé d'une lame de quartz placée entre deux polariseurs rectilignes dont l'axe optique est selon $\hat{z}$. La lame de quartz, comme celle vue à l'exercice 1, est taillée parallèlement à l'axe optique, c'est-à-dire que son axe ordinaire est parallèle à $\vec{e}_x$ et son axe extraordinaire à $\vec{e}_y$. Les deux polarisateurs rectilignes ont le même axe de polarisation faisant un angle de 45° par rapport à l'axe $\vec{e}_x$. On considère une onde EM plane de longueur d'onde λ_0 , polarisée rectiligne selon $\vec{e}_x$ et se propageant dans la direction z incidente sur le filtre de Lyot.

- (a) Quelles sont les expressions de l'amplitude et de l'intensité du champ électrique de l'onde transmise par le système décrit ci-dessus en fonction de la différence de phase $\phi = (2\pi/\lambda_0)(n_o - n_E)d$, avec d l'épaisseur de la lame de quartz, n_o l'indice de réfraction ordinaire et n_E l'indice de réfraction extraordinaire ? En déduire un facteur de transmission t pour l'amplitude du champ électrique.

Initialement, le champ électrique peut s'écrire comme :

$$\mathbf{E} = E \exp[i(kz - \omega t)] \vec{e}_x \quad (20)$$

Après le passage du premier polariseur $\mathcal{P}_{\pi/4}$, l'amplitude de l'onde sortante du polariseur est donnée par (en utilisant par exemple la matrice de Jones appropriée) :

$$\mathbf{E} = \frac{E}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \vec{e}_x + \vec{e}_y \end{pmatrix} = \frac{E}{2} (\vec{e}_x + \vec{e}_y) = E' \begin{pmatrix} \vec{e}_x + \vec{e}_y \end{pmatrix} \quad (21)$$

Où $E' = E/\sqrt{2}$ est l'amplitude de l'onde après le premier polariseur. Ce choix sera utile au point b).

La lame de quartz décrite dans la consigne correspond à celle étudiée dans l'exercice 1. Par conséquent, on peut répéter le raisonnement fait à l'exercice 1, point b). On obtient donc que l'amplitude du champ électrique après son passage au travers de la lame de quartz d'épaisseur d s'écrit de la même manière à (11) (en effectuant une translation temporelle qui permet d'écrire uniquement la phase dans la composante $\hat{x}$ du champ), en tenant compte de l'expression du champ électrique incident sur la lame de quartz :

$$\mathbf{E} = E' \begin{pmatrix} \exp[i\phi] \vec{e}_x + \vec{e}_y \end{pmatrix} \exp[-i\omega t] \quad (22)$$

Le deuxième polariseur dont l'axe de polarisation fait également un angle de $\pi/4$ par rapport à l'axe $\vec{e}_x$ peut être décrit par la matrice

$$\mathcal{P}_{\pi/4} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

L'onde incidente est donnée par le vecteur de l'équation (22) :

$$\vec{E} = \frac{E'}{\sqrt{2}} \exp(-i\omega t) \begin{pmatrix} \exp(i\phi) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

L'application du polarisateur peut donc être calculé comme

$$\mathcal{P}_{\pi/4} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \frac{E'}{\sqrt{2}} \exp(-i\omega t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \exp(i\phi) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \frac{E'}{\sqrt{2}} \exp(-i\omega t) \begin{pmatrix} \exp(i\phi) + 1 \\ \exp(i\phi) + 1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

on obtient donc l'expression suivante :

$$\mathbf{E} = E' \begin{pmatrix} \frac{1 + \exp[i\phi]}{2} \end{pmatrix} \exp[-i\omega t] \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}}. \quad (26)$$

On peut donc définir le facteur de transmission $t = (1 + \exp[i\phi])/2$. L'intensité de l'onde sortante est donc donnée par $I = \mathbf{E}^* \mathbf{E}$. On appelle $I_0 = E'^2$ qui correspond à l'intensité de l'onde après le premier polariseur.

$$I = \mathbf{E}^* \mathbf{E} = \frac{I_0}{2} (1 + \cos(\phi)) \quad (27)$$

- (b) On empile N filtres de Lyot avec des lames de quartz d'épaisseur variables, i.e $d_n = 2^{n-1} \cdot d$, $n = 1, \dots, N$. En négligeant l'absorption des lames, démontrer que la valeur absolue du facteur de

transmission total du système est donnée par :

$$|t| = \frac{\sin(2^N(\phi/2))}{2^N \sin(\phi/2)}$$

Indication :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp[in\phi] = \frac{\exp[iN\phi] - 1}{\exp[i\phi] - 1}$$

Le facteur de transmission pour le n -ième système s'écrit comme :

$$t_n = \frac{1}{2}(1 + \exp[i2^{n-1}\phi]) \quad (28)$$

Par conséquent, le facteur de transmission total du système entier s'écrit comme :

$$t = \prod_{i=1}^N t_i = \frac{1}{2^N} (1 + \exp[i\phi])(1 + \exp[i2\phi])(1 + \exp[i4\phi]) \dots (1 + \exp[i2^{N-1}\phi]) \quad (29)$$

Pour montrer que ce facteur de transmission correspond à celui de l'énoncé, on procède par récurrence. Dans le cas où $N = 1$, on a que le facteur de transmission se résume à celui trouvé au point a). En utilisant la formule de la série géométrique,

$$t_1 = \frac{1}{2}(1 + \exp[i\phi]) = \frac{1}{2} \frac{\exp[i2\phi] - 1}{\exp[i\phi] - 1} = \exp[i\phi/2] \frac{\sin(\phi)}{2 \sin(\phi/2)} \quad (30)$$

Ce qui correspond à l'expression de l'énoncé pour $N = 1$ lorsqu'on prend le module. On démontre désormais la récurrence. On suppose que pour N systèmes, le facteur de transmission est donné par l'expression de la consigne. Alors pour $N + 1$ systèmes, on a que :

$$\begin{aligned} t &= \left[\frac{\sin(2^N(\phi/2))}{2^N \sin(\phi/2)} \right] \frac{1}{2} (1 + \exp[i2^N\phi]) \\ &= \frac{1}{2^{N+1} \sin(\phi/2)} \frac{\exp[i2^{N-1}\phi] - \exp[-i2^{N-1}\phi]}{2i} \exp[i2^{N-1}\phi] (\exp[i2^{N-1}\phi] + \exp[-i2^{N-1}\phi]) \\ &= \exp[i\phi 2^{N-1}] \frac{1}{2^{N+1} \sin(\phi/2)} \frac{\exp[i2^N\phi] - \exp[-i2^N\phi]}{2i} \\ &= \exp[i2^{N-1}\phi] \frac{\sin(2^{N+1}(\phi/2))}{2^{N+1} \sin(\phi/2)} \end{aligned} \quad (31)$$

Le module de l'expression ci-dessus correspond donc au facteur de transmission pour $N + 1$ systèmes, ce qui conclut la preuve. Une preuve directe est également possible mais requiert diverses propriétés mathématiques. En effet, il est nécessaire d'utiliser l'expression algébrique suivante :

$$\prod_{n=1}^N (1 + x_n) = 1 + \sum_{n=1}^N x_n + \sum_{\substack{n,m=1 \\ n < m}}^N x_n x_m + \sum_{\substack{n,m,p=1 \\ n < m < p}}^N x_n x_m x_p + \dots + \prod_{n=1}^N x_n \quad (32)$$

En remplaçant les x_n par $\exp[i2^{n-1}\phi]$, il est possible de remarquer une certaine récursion. Le premier terme est commun pour tout N , le second correspond donc à la somme des phases avec des puissances de 2 : $[2, \dots, 2^{N-1}]$. Le troisième terme couple deux phases des

puissances de 2 de cette même liste. Le quatrième en couple 3 et ainsi de suite. Ceci n'est pas sans rappeler les nombres binaires. Prenons le cas simple où $N = 3$, le produit donné en (??) s'écrit explicitement comme suit :

$$\prod_{n=1}^3 (1 + x_n) = 1 + (x_1 + x_2 + x_3) + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + x_1x_2x_3 \quad (33)$$

En remplaçant les valeurs de x_n , $n = 1, 2, 3$ par $\exp[i2^{n-1}\phi]$, chaque terme peut être explicité :

$$\begin{aligned} x_1 &= \exp[i2^0\phi] & x_2 &= \exp[i2^1\phi] & x_3 &= \exp[i2^2\phi] \\ x_1x_3 &= \exp[i(2^0 + 2^2)\phi] & x_1x_2 &= \exp[i(2^0 + 2^1)\phi] & x_2x_3 &= \exp[i(2^1 + 2^2)\phi] \\ x_1x_2x_3 &= \exp[i(2^0 + 2^1 + 2^2)\phi] \end{aligned} \quad (34)$$

Chaque terme est associé à une représentation binaire à 3 chiffres :

$$\begin{aligned} x_1 &= \exp[i(000)_2\phi] & x_2 &= \exp[i(010)_2\phi] & x_3 &= \exp[i(001)_2\phi] \\ x_1x_3 &= \exp[i(101)_2\phi] & x_1x_2 &= \exp[i(110)_2\phi] & x_2x_3 &= \exp[i(011)_2\phi] \\ x_1x_2x_3 &= \exp[i(111)_2\phi] \end{aligned} \quad (35)$$

Où la notation $(\cdot)_2$ indique que le nombre est écrit en notation binaire. Donc le produit (32) devient la somme de toutes les exponentielles entre 1 jusqu'à $\exp[i(2^N - 1)\phi]$. Ceci donne donc lieu à une série géométrique :

$$\sum_{n=0}^{2^N-1} \exp[in\phi] = \frac{\exp[i2^N\phi] - 1}{\exp[i\phi] - 1} = \frac{\exp[i2^{N-1}\phi]}{\exp[i\phi/2]} \frac{\sin(2^N(\phi/2))}{\sin(\phi/2)} \quad (36)$$

En rajoutant le facteur $1/2^N$ et en prenant la valeur absolue, on obtient également l'expression donnée dans l'énoncé.

3 Effet de Peau

La répartition d'un courant alternatif dans un conducteur est modifiée par les courants induits générés par le champ magnétique né du courant lui-même. En conséquence, on observe une densité de courant plus importante dans la périphérie d'un conducteur massique qu'en son centre. Cet effet est appelé *Effet de Peau*. On cherche à décrire ce phénomène dans le cas d'un conducteur cylindrique de rayon R et d'axe $\hat{z}$. On considère le conducteur non-aimanté et de conductivité σ .

- (a) Déterminer le champ magnétique induit par le courant traversant une surface Σ correspondant à une section de rayon r du cylindre.

La partie centrale du conducteur de rayon r peut être décrite par une somme de couronnes situées en $r' < r$ et d'épaisseur dr' dans lesquelles circulent une densité de courant $\mathbf{J}(r')$. Par conséquent, le champ magnétique $\mathbf{H}(r, t)$ est donné par la loi d'Ampère en sommant sur toutes ces contributions en considérant la surface Σ correspondant à une section de rayon r du cylindre et Γ correspondant à son périmètre :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\sigma} \implies H(r, t) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^r J(r', t) 2\pi r' dr' \quad (37)$$

où $\mathbf{H}$ est orienté selon $\vec{e}_\phi$ si $\mathbf{J}$ est selon l'axe $\hat{z}$ des coordonnées cylindriques.

- (b) Montrer qu'un courant induit circule sur le périmètre de la petite surface $S = Ldr$ (voir figure ci-contre) située en r dans une section longitudinale passant par l'axe du conducteur. En déduire que sa direction implique que $E(r + dr) > E(r)$, ce qui explique que le courant soit plus important en périphérie.

Le flux de champ d'induction magnétique $\mathbf{B}$ traversant la surface $S = Ldr$ dépend du temps t et génère une force électromotrice ϵ :

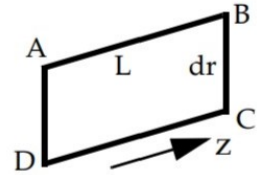
$$\phi(t) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\sigma = \mu_0 H(r, t) Ldr \implies \epsilon = \oint_{ADCB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\phi}{dt} = -\mu_0 Ldr \frac{\partial H}{\partial t} \quad (38)$$

Le choix de $d\sigma$ selon $\vec{e}_\phi$ impose une intégrale curviligne selon le chemin $ADCB$. $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma$ étant orienté selon $\hat{z}$, la tension induite peut s'écrire :

$$\epsilon = [E(r) - E(r + dr)] L \cong -\frac{\partial E}{\partial r} Ldr \quad (39)$$

La loi de Lenz-Faraday donnée en (38) montre que l'augmentation de B dans le temps implique que $\epsilon < 0$. Ceci fait que $E(r + dr) > E(r)$ et par conséquent, le courant induit qui circule selon $ABCD$ est aussi plus important en périphérie, c'est-à-dire $J_{\text{ind}}(r + dr) > J_{\text{ind}}(r)$.

tefois, la dépendance radiale du champ électrique est plus complexe que le simple cas ici présent où $\mathbf{E}$ est dirigé uniquement selon $\hat{z}$.



Tou-

- (c) En supposant un courant alternatif de pulsation ω , montrer que la distribution radiale du champ électrique $E(r)$, identique à la distribution du courant, est décrite par :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + i\mu_0 \sigma \omega E = 0, \text{ où : } \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$$

À partir des équations (38) et (39), il est possible d'exprimer $\partial E/\partial t$ en fonction de $\partial H/\partial r$:

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \quad (40)$$

En utilisant l'expression de $H(r, t)$ trouvée en (37), on peut exprimer cette équation à l'aide de la densité de courant $J(r, t)$

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \int_0^r \frac{\partial J}{\partial t}(r', t) 2\pi r' dr' \quad (41)$$

En multipliant les 2 côtés de l'équation (41) par r puis en dérivant par r , on obtient que :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) = \frac{\partial E}{\partial r} + r \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} = \mu_0 r \frac{\partial J}{\partial t}(r, t) = \mu_0 \sigma r \frac{\partial E}{\partial t} \quad (42)$$

En divisant par r et remplaçant la dérivée temporelle par un facteur $-i\omega$, ce qui revient à considérer que $E(r, t) = E(r)e^{-i\omega t}$, on obtient donc l'équation donnée dans l'énoncé :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + i\mu_0 \sigma \omega E = 0 \quad (43)$$

Remarque : Cette équation correspond à une équation de Bessel. En effet, la forme générale de ces équations est donnée par :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - n^2}{x^2} y = 0 \quad (44)$$

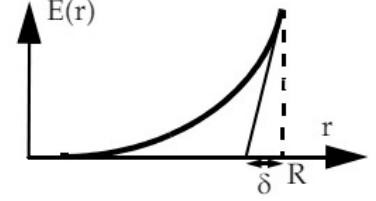
En effectuant le changement de variable $r' = \sqrt{i\mu_0\sigma\omega}r$, l'équation (43) peut s'écrire comme une équation de Bessel avec $n = 0$ et dont la solution est de la forme :

$$E(r) = AJ_0(\sqrt{i\mu_0\sigma\omega}r) + BY_0(\sqrt{i\mu_0\sigma\omega}r), \quad (45)$$

où J_0 et Y_0 sont les fonctions de Bessel d'ordre zéro de première et seconde espèce, respectivement. Dans cet exercice, une solution approchée pour $E(r)$ est détaillée et permet d'éviter une discussion sur les conditions aux bords.

La résolution exacte fait appel aux fonctions de Bessel. Cependant comme l'expérience montre que le courant diminue lorsque l'on pénètre dans le conducteur, il est possible de déterminer une solution approchée avec l'approximation :

$$\frac{\partial E}{\partial r} \ll r \frac{\partial^2 E}{\partial r^2}$$



(d) Vérifier que la solution approchée à l'équation trouvée au point c) s'écrit :

$$E(r) = E_0 e^{-\alpha(R-r) + i\alpha(R-r)}, \text{ avec } \alpha = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}$$

Que peut-on dire de α ?

En tenant compte de l'indication, on a que l'équation différentielle se réduit à :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + i\mu_0\sigma\omega E = 0 \quad (46)$$

Ce qui peut se résoudre par :

$$E(r) = Ae^{i\sqrt{i\mu_0\sigma\omega}(R-r)} + Be^{-i\sqrt{i\mu_0\sigma\omega}(R-r)} \quad (47)$$

La racine d'un nombre complexe est donnée par :

$$\sqrt{i\mu_0\sigma\omega} = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}(1+i) = \alpha(1+i) \quad (48)$$

Et seule la solution physique où $E(r)$ diminue si r diminue est conservée, donc on pose $B = 0$. Au final, on obtient effectivement la solution approchée souhaitée :

$$E(r) = Ae^{(-1+i)\alpha(R-r)} = Ae^{-\alpha(R-r) + i\alpha(R-r)} \quad (49)$$

Le terme α trouvé n'est pas sans rappeler la partie imaginaire de l'indice de réfraction vu en cours, où :

$$\text{Im}(n) = n'' = \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0\omega}} \quad (50)$$

Le coefficient d'absorption β , qui correspond dans le cadre de cet exercice à α , est donc donné par :

$$\beta = \frac{\omega}{c}n'' = \sqrt{\frac{\sigma\omega}{2\epsilon_0c^2}} = \alpha \quad (51)$$

Remarque : L'observation de la dépendance radiale de $E(r)$ permet de supposer que $r \ll R$ et que $E(r)$ peut s'écrire comme :

$$E(r) = Ae^{-(R-r)/\delta} \quad (52)$$

De cette forme présumée pour le champ électrique, on a que :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{A}{r\delta} e^{-(R-r)/\delta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} = \frac{A}{\delta^2} e^{-(R-r)/\delta} \quad (53)$$

Dans la mesure où on s'intéresse principalement à la région $r \sim R$, on a que, en effet,

$$\frac{\frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r}}{\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}} = \frac{\delta}{r} \sim \frac{\delta}{R} \ll 1 \quad (54)$$

Il faut préciser la région d'intérêt car pour $r \rightarrow 0$, le terme $(1/r)\partial E/\partial r$ diverge et par conséquent, cette approximation n'est plus valide.