

Corrigé 8 : Propriétés de base des ondes électromagnétiques

1 Polarisation : représentation de Jones

La représentation de Jones est un formalisme vectoriel décrivant les ondes polarisées. Pour le cas d'une onde EM polarisée se propageant dans la direction z , on peut écrire $\vec{E} = E_x \cos(kz - \omega t + \phi_x) \vec{e}_x + E_y \cos(kz - \omega t + \phi_y) \vec{e}_y$. La représentation de Jones de cette onde est :

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} E_x e^{i\phi_x} \\ E_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \right].$$

L'intensité I d'une onde est donnée par $I \propto \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}$. L'avantage de ce formalisme est de représenter simplement les ondes EM polarisées et également représenter matriciellement les polariseurs.

(a) Écrivez dans la représentation de Jones les ondes électromagnétiques polarisées suivantes :

- Polarisée rectiligne parallèle à $\vec{e}_x$
- Polarisée rectiligne faisant un angle $\theta = \pi/4$ avec $\vec{e}_x$
- Polarisée circulaire droite et gauche
- Polarisée elliptiquement de demi-grand axe égale 2 fois plus grand que le demi-petit axe

De manière générale, les ondes polarisées rectilignes s'écrivent de la forme suivante :

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left[E \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} e^{ikz - \omega t} \right] \quad (1)$$

où $E \in \mathbb{R}$ est la norme du champ électrique. Cela revient à poser $\phi_x = \phi_y = 0$ et écrire les composantes du vecteur en coordonnées polaires, $E_x = E \cos(\theta)$ et $E_y = E \sin(\theta)$. Introduire une phase dans les composantes du vecteur implique que les composantes spatiales évoluent dans le temps, ce qui sera le cas pour les ondes polarisées circulaires. Pour les ondes polarisées rectilignes demandées, on obtient les vecteur de polarisation suivants

$$\mathbf{E}_1 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 \propto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Pour les ondes polarisées circulaires et elliptiques, il est nécessaire d'introduire une phase en posant $\phi_x = 0$ et $\phi_y = \pm\pi/2$ afin que les composantes spatiales de l'onde polarisée soient dépendantes des coordonnées spatiales et temporelle. De manière générale, on peut les écrire de la forme suivante :

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} E_x \\ \pm i E_y \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \right] = \begin{pmatrix} E_x \cos(kz - \omega t) \\ \mp E_y \sin(kz - \omega t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

On remarque, en posant arbitrairement $z = 0$, que l'expression (3) se réduit au vecteur suivant :

$$\mathbf{E}(z = 0) = \begin{pmatrix} E_x \cos(\omega t) \\ \mp E_y \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

En fonction du signe $\mp$, l'onde sera respectivement gauche si positif et droite si négatif. Également, dans le cas spécifique d'une onde polarisée circulaire, il faut imposer $E_x = E_y = E$, ce qui n'est pas nécessaire pour une onde polarisée elliptique. Finalement, les expressions suivantes sont obtenues pour les ondes polarisées demandées :

$$\mathbf{E}_3 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}_4 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}_5 \propto \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} \quad (5)$$

- (b) Un polariseur rectiligne est perméable à la composante parallèle à l'axe du polariseur. Donner la forme matricielle du polariseur rectiligne idéal d'axe parallèle à $\vec{e}_x$. En déduire la matrice du polariseur rectiligne idéal qui fait un angle θ quelconque avec l'axe $\vec{e}_x$. En supposant une onde EM incidente polarisée rectiligne de norme E et parallèle à $\vec{e}_x$, retrouver la loi de Malus, qui donne l'expression de l'intensité de l'onde sortante I en fonction de l'intensité I_0 de l'onde incidente sur le polariseur et de l'angle θ :

$$I = I_0 \cos^2(\theta). \quad (6)$$

Quelle est l'intensité moyenne d'une onde EM non polarisée ?

On considère dans un premier temps le cas simple d'un polariseur rectiligne idéal dont l'axe est aligné avec $\vec{e}_x$, ce qui correspond au cas $\theta = 0$. L'effet d'un tel polariseur sur une onde incidente est de ne laisser passer que la composante parallèle à $\vec{e}_x$, sa matrice s'exprime donc

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

En considérant maintenant le cas plus général d'un polariseur dont l'axe fait un angle θ quelconque avec $\vec{e}_x$, on peut déterminer sa matrice en effectuant un changement de base à partir de la matrice P_0 . On introduit pour cela la matrice de rotation $R(\theta)$:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Cette matrice de rotation permet de passer d'une base où l'axe du polariseur est aligné avec $\vec{e}_x$ à une base où l'axe du polariseur est tourné d'un angle θ par rapport à $\vec{e}_x$. La matrice du polariseur dans cette nouvelle base est obtenue par la formule de changement de base $P(\theta) = R(\theta)P_0R(\theta)^T$:

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (10)$$

Pour obtenir la loi de Malus, il faut utiliser le fait que $I \propto \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}$. L'onde incidente, polarisée rectiligne selon $\vec{e}_x$, est de la forme $\mathbf{E} \propto (1, 0)^T$. En multipliant par la matrice $P(\theta)$, on détermine que l'onde sortante est $\mathbf{E}' \propto (\cos^2(\theta), \sin(\theta)\cos(\theta))^T$. L'intensité de l'onde sortante s'obtient en calculant $\mathbf{E}'^* \cdot \mathbf{E}'$. On en déduit ainsi

$$I \propto \cos^2(\theta) \implies I = I_0 \cos^2(\theta). \quad (11)$$

Finalement, pour une onde non polarisée, la valeur moyenne de l'intensité s'obtient en prenant la valeur moyenne de $\cos^2(\theta)$ sur une période $T = \pi$:

$$\langle \cos^2(\theta) \rangle = \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_0^\pi \cos^2(\theta) d\theta}_{\pi/2} = \frac{1}{2} \implies \langle I \rangle = \frac{I_0}{2} \quad (12)$$

- (c) Le Polaroid est un filtre rectiligne non-idéal, c'est-à-dire que celui-ci a une transmittance T_1 le long de la direction privilégiée et T_2 le long de la direction perpendiculaire, où $T_2 < T_1 \leq 1$. En considérant ces hypothèses, écrire la matrice représentant le filtre Polaroid quand la direction privilégiée est :

- parallèle à l'axe $\vec{e}_x$
- faisant un angle θ avec l'axe $\vec{e}_x$

Dériver la loi de Malus dans le cas du filtre Polaroid. Que constate-t-on ?

L'approche pour résoudre ce problème est similaire au point b). Dans un premier temps, on considère un filtre Polaroid dont la direction privilégiée est parallèle à l'axe $\vec{e}_x$. Dans ce cas, le filtre Polaroid transmet une fraction T_1 de l'intensité entrante selon la direction $\vec{e}_x$ et une fraction T_2 selon la direction perpendiculaire $\vec{e}_y$. L'intensité de l'onde sortante doit donc être donnée par :

$$\|P\vec{e}_x\|^2 = T_1 \quad (14)$$

Intuitivement, on peut donc écrire que $P\vec{e}_x = \sqrt{T_1}\vec{e}_x$ afin de satisfaire la condition donnée en (14). Similairement, la condition pour la direction perpendiculaire s'écrit :

$$\|P\vec{e}_y\|^2 = T_2 \quad (15)$$

Ce qui permet d'écrire $P\vec{e}_y = \sqrt{T_2}\vec{e}_y$. La forme matricielle du Polaroid est donc donnée par :

$$P(\theta = 0) = \begin{pmatrix} \sqrt{T_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{T_2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Comme au point b), ce raisonnement peut se généraliser pour un Polaroid avec une direction privilégiée formant un angle θ quelconque avec l'axe $\vec{e}_x$. Il faut pour cela appliquer la formule de changement de base $P(\theta) = R(\theta)P(\theta = 0)R(\theta)^T$, ce qui donne :

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} \sqrt{T_1} \cos^2(\theta) + \sqrt{T_2} \sin^2(\theta) & \sin(\theta) \cos(\theta)(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}) \\ \sin(\theta) \cos(\theta)(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}) & \sqrt{T_1} \sin^2(\theta) + \sqrt{T_2} \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (17)$$

En calculant l'intensité d'une onde polarisée rectiligne selon l'axe $\vec{e}_x$, on obtient alors la loi de Malus pour le Polaroid

$$I = \|P(\theta)E\vec{e}_x\|^2 = (T_1 \cos^2(\theta) + T_2 \sin^2(\theta))I_0 \quad (18)$$

On observe que les résultats obtenus sont équivalents à ceux trouvés au point précédent si $T_1 = 1$ et $T_2 = 0$, correspondant donc à un polariseur rectiligne idéal. Également, si $T_1 = T_2$, la matrice $P(\theta)$ est diagonale pour tout angle θ . En effet, le filtre aurait alors uniquement comme effet de modifier l'intensité de l'onde mais pas sa polarisation.

- (d) Les lames à retard sont des polariseurs particuliers, introduisant une phase ϕ qui retarde la composante de l'onde incidente perpendiculaire à l'axe optique de la lame par rapport à sa composante le long de l'axe optique. Donner la forme générale d'une lame à retard si l'axe optique fait un angle θ avec $\vec{e}_x$. Que peut-on dire de ce polariseur si $\phi = \pi$? et quand $\phi = \pi/2$?

Par simplicité, on suppose que l'axe optique est le long de l'axe $\vec{e}_x$. Par conséquent, la forme matricielle Q de la lame à retard est donnée par :

$$Q_\phi = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix} = e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (19)$$

En utilisant la matrice de rotation $R(\theta)$, on obtient la forme générale de la lame à retard pour un angle θ quelconque entre l'axe optique et $\vec{e}_x$.

$$Q_\phi(\theta) = R(\theta)Q_\phi(\theta = 0)R(\theta)^T = e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)e^{i\phi} & \sin(\theta) \cos(\theta)(1 - e^{i\phi}) \\ \sin(\theta) \cos(\theta)(1 - e^{i\phi}) & \cos^2(\theta)e^{i\phi} + \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (20)$$

Pour $\phi = \pi$, on obtient la forme suivante pour le polariseur :

$$Q_\pi(\theta) = -i \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \\ 2 \sin(\theta) \cos(\theta) & \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (21)$$

Pour $\theta = 0$, on a que le polariseur a la forme :

$$Q_\pi = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Par conséquent, pour une onde polarisée rectiligne, on observe que la lame induit une phase $\pi/2$ aux deux composantes et inverse également la composante perpendiculaire à l'axe optique. Ce type de lame à retard est appelé "lame demi-onde" car elle induit un retard équivalent à un déplacement d'une demi-longueur d'onde.

Pour $\phi = \pi/2$, on peut écrire la forme générale de la lame à retard obtenue :

$$Q_{\pi/2}(\theta) = e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + i \sin^2(\theta) & \sin(\theta) \cos(\theta)(1 - i) \\ \sin(\theta) \cos(\theta)(1 - i) & i \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (23)$$

Pour comprendre quel est l'effet de ce polariseur, on pose $\theta = 0$ et on obtient le polariseur suivant :

$$e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (24)$$

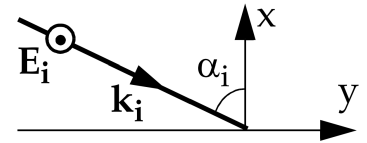
Pour une onde entrante polarisée rectiligne $\mathbf{E}$, on observe que l'onde sortante $\mathbf{E}'$ a la forme suivante

$$\mathbf{E}' = Q_{\pi/2}(0)\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \cos(kz - \omega t - \pi/4) \\ -E_y \sin(kz - \omega t - \pi/4) \end{pmatrix} \quad (25)$$

Pour $\phi = \pi/2$, la lame à retard a pour conséquence d'induire une phase globale de $\pi/4$ mais elle transforme une onde polarisée rectiligne en une onde polarisée elliptique. Si $E = E_x = E_y$, on a alors une onde polarisée circulaire. Cette lame est appelée "lame quart d'onde" car le déphasage induit est équivalent à un déplacement d'un quart de la longueur d'onde.

2 Réflexion d'une onde EM sur un miroir parfaitement réfléchissant

Une onde électromagnétique plane sinusoïdale se propage dans le vide. Elle arrive, sous un angle d'incidence α_i sur une surface plane Σ parfaitement réfléchissante. Le champ électrique $\mathbf{E}_i$ est normal au plan d'incidence O_{xy} , O_x étant normal à Σ .



- (a) Montrer que le champ électrique $\mathbf{E}$, résultant de l'interférence de $\mathbf{E}_i$ avec le champ $\mathbf{E}_r$ de l'onde réfléchie, est une onde se propageant selon y , dont l'amplitude dépend de x .

La condition au bord à l'interface du miroir implique la continuité de la composante du champ électrique parallèle à l'interface (Physique III). Le champ électrique $\mathbf{E}_i$ oscillant dans le plan de l'interface et Σ étant parfaitement réfléchissante, on doit avoir $\mathbf{E}_r = -\mathbf{E}_i$. En se référant à la figure, les champs électriques s'écrivent ainsi :

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{x}, t) = -E_0 \sin(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} - \omega t) \mathbf{e}_z \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_r(\mathbf{x}, t) = E_0 \sin(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega t) \mathbf{e}_z \quad (26)$$

avec : $\mathbf{k}_i = -k \cos(\alpha_i) \mathbf{e}_x + k \sin(\alpha_i) \mathbf{e}_y$ et $\mathbf{k}_r = k \cos(\alpha_i) \mathbf{e}_x + k \sin(\alpha_i) \mathbf{e}_y$

En utilisant la relation trigonométrique $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, on obtient

donc que le champ électrique totale est donné par :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}_i(\mathbf{x}, t) + \mathbf{E}_r(\mathbf{x}, t) = E_0(\sin(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega t) - \sin(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} - \omega t))\mathbf{e}_z \\ &= 2E_0 \cos(k \sin(\alpha_i)y - \omega t) \sin(k \cos(\alpha_i)x)\mathbf{e}_z\end{aligned}\quad (27)$$

L'onde obtenue est une onde qui se propage le long de l'axe $\mathbf{e}_y$. Toutefois, on constate que son amplitude dépend de x . Pour y fixe, l'onde selon x a la forme d'une onde stationnaire.

- (b) Déterminer les plans nodaux et les plans ventraux de $\mathbf{E}$.

Les plans nodaux, parallèles à O_{yz} , sont tels que $\mathbf{E}$ est nul, et les plans ventraux sont tels que $\mathbf{E}$ est maximal ou minimal. En tenant compte que $k = 2\pi/\lambda$:

$$x_{no} = \frac{n\lambda}{2 \cos(\alpha_i)} \text{ et } x_v = \frac{(n + \frac{1}{2})\lambda}{2 \cos(\alpha_i)}, \text{ où } n \text{ est un entier positif ou nul.}$$

- (c) Exprimer la vitesse de phase u de $\mathbf{E}$ en fonction de la vitesse de la lumière c et α_i , puis discuter.

L'expression du champ $\mathbf{E}$ de la question (a) décrit une onde progressive selon O_y , de nombre d'onde $k_y = k \sin(\alpha_i)$. La vitesse de phase vaut ainsi :

$$u = \frac{\omega}{k_y} = \frac{\omega}{k \sin(\alpha_i)} = \frac{c}{\sin(\alpha_i)} > c \quad (28)$$

La vitesse de phase de l'onde est donc forcément supérieure à la vitesse de la lumière c . Cela ne contredit pas le postulat de la relativité restreinte car, en effet, la vitesse de phase ne correspond pas à la vitesse de transmission de l'information, correspondant à la vitesse de groupe.

- (d) Exprimer, par un raisonnement mathématique puis par un raisonnement géométrique, la vitesse de groupe v de $\mathbf{E}$.

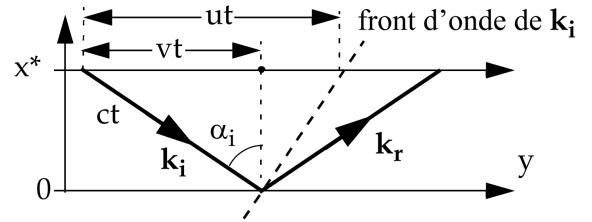
La vitesse de groupe, qui correspond à la vitesse de transport de l'énergie, est définie par $v = d\omega/dk_y$. La raison du choix de la variable k_y est la même qu'au point c), car l'onde est progressive selon l'axe y .

$$v = \frac{d\omega}{dk_y} = \frac{d}{dk_y}(ck) = c \frac{d}{dk_y} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \frac{ck_y}{k} = c \sin(\alpha_i) \leq c \quad (29)$$

Dans ce cas-ci, la vitesse de groupe est donc au moins inférieure à la vitesse de la lumière c , ce qui est en accord avec le postulat de la relativité.

On peut également l'obtenir en remarquant qu'elle vaut c selon la direction de propagation $\mathbf{k}_i$ ou $\mathbf{k}_r$ et donc $c \sin(\alpha_i)$ selon la direction O_y de propagation de $\mathbf{E}$. Autrement dit, le vecteur d'onde $\mathbf{k}_r$ annule la partie de l'onde incidente de $\mathbf{k}_i$ selon x , mais s'ajoute à la partie selon y .

Lorsque le rayon de l'onde incidente parcourt une distance ct , l'intersection du front d'onde avec un plan $x^* = \text{constant}$ se déplace d'une distance ut . $u = c/\sin(\alpha_i)$ correspond à la vitesse de phase de l'onde de $\mathbf{E}$ selon y , i.e. la vitesse avec laquelle une crête de l'onde se déplace selon y . À noter que $u > c$. La vitesse de groupe de l'onde de $\mathbf{E}$ est la vitesse à laquelle l'énergie se propage selon y : si nous ne laissons passer l'onde que pendant un court instant, une impulsion se propagerait à la vitesse de groupe. Le rayon $\mathbf{k}_i$ transporterait l'impulsion à la vitesse c diagonalement. $\mathbf{k}_r$ contribuerait à annuler l'impulsion de $\mathbf{k}_i$ selon x . Les impulsions $\mathbf{k}_i$ et $\mathbf{k}_r$ progressent chacune d'une distance vt selon y pendant le temps t . On a donc $v = c \sin(\alpha_i)$



On place un second miroir plan parfait Σ' parallèle à Σ , à une distance X de Σ . L'onde incidente subit ainsi des réflexions multiples entre Σ et Σ' .

- (e) Dans ces conditions, exprimer la vitesse de phase u en fonction de X , λ et c . Montrer ensuite que pour tout X donné, il existe une longueur d'onde λ_c et donc une pulsation ω_c de coupure au-dessous de laquelle l'onde de $\mathbf{E}$ ne se propage pas.

En plaçant un second miroir, l'onde incidente subit des réflexions multiples entre Σ et Σ' . L'expression du champ $\mathbf{E}$ est donc celle du point a). Le miroir Σ' étant parfaitement réfléchissant, on doit avoir à nouveau un champ d'amplitude nulle à cette interface. Cette condition conduit à :

$$k \cos(\alpha_i)X = n\pi \implies X = \frac{n\lambda}{2 \cos(\alpha_i)}. \quad (30)$$

On en déduit la vitesse de phase

$$u = \frac{\omega}{k_y} = \frac{\omega}{k \sin(\alpha_i)} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{n^2 \lambda^2}{4X^2}}} \quad (31)$$

On remarque que pour certaines valeurs de λ , l'argument de la racine est négatif et on obtient un vecteur d'onde k_y imaginaire. Dans ce cas, l'onde est évanescence et ne se propage pas. Cette valeur limite pour la longueur d'onde permet de définir la fréquence de coupure, qui est la fréquence minimale qu'une onde doit avoir pour se propager. La longueur d'onde de coupure λ_c est obtenue en utilisant (30) et en fixant X :

$$1 - \frac{n^2 \lambda^2}{4X^2} \geq 0 \implies \frac{2X}{n} \geq \lambda \quad (32)$$

Par conséquent, la longueur d'onde de coupure est $\lambda_c = 2X$, est la fréquence de coupure associée est $f_c = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2X}$. Pour une longueur d'onde λ plus grande, il n'y aucune onde qui se propage, peu importe la valeur de α et de n .

- (f) Déterminer la relation de dispersion de cette onde.

En utilisant les expressions trouvées pour u et v , il est possible d'établir la forme de la relation de dispersion. En effet,

$$u \cdot v = \frac{\omega}{k_y} \frac{d\omega}{dk_y} = \frac{\frac{1}{2}d(\omega^2)}{\frac{1}{2}d(k_y^2)} = \frac{d(\omega^2)}{d(k_y^2)} = \frac{c}{\sin(\alpha_i)} \cdot c \sin(\alpha_i) = c^2. \quad (33)$$

En intégrant en fonction de k_y^2 , on obtient que la relation de dispersion doit être de la forme

$$\omega^2 = c^2 k_y^2 + cst. \quad (34)$$

La fréquence de coupure correspond au cas où $\cos(\alpha_i) = 1 \implies k_y = 0$ donc la constante n'est autre que la pulsation de coupure ω_c . On obtient ainsi la relation de dispersion

$$\omega^2 = c^2 k_y^2 + \omega_c^2 \quad (35)$$

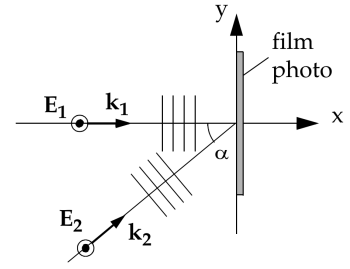
Remarque :

La vitesse de groupe v trouvée en (29) peut être redérivée avec cette relation de dispersion :

$$v = \frac{d}{dk_y} \sqrt{c^2 k_y^2 + \omega_c^2} = \frac{c^2 k_y}{\sqrt{c^2 k_y^2 + \omega_c^2}} = c \frac{ck_y}{\omega} = c \sin(\alpha_i) \quad (36)$$

3 Holographie : principe de base

Le principe de l'holographie repose sur l'interférence entre 2 ondes incidentes. Soit deux ondes lumineuses planes, cohérentes, de même longueur d'onde λ , de même intensité, polarisée linéairement et de vecteur $\mathbf{E}$ parallèle à l'axe z . Le vecteur d'onde $\mathbf{k}_1$ de la 1ère onde est parallèle à x et le vecteur d'onde $\mathbf{k}_2$ de la seconde forme un angle α par rapport à x .



- (a) Montrer que l'intensité résultant de la superposition des 2 ondes dans le plan $x = 0$ est donnée par :

$$I(y) = I_0 \cos^2 \left(\frac{1}{2} k y \sin(\alpha) \right)$$

L'expression des champs électrique des deux ondes incidentes s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= E \sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega t) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{E}_2 &= E \sin(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega t) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{k}_1 &= k \mathbf{e}_x \text{ et } \mathbf{k}_2 = k(\cos(\alpha) \mathbf{e}_x + \sin(\alpha) \mathbf{e}_y) \end{aligned} \quad (37)$$

L'onde résultante, polarisée dans la direction $\mathbf{e}_z$, est donnée par la somme des ondes incidentes :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = E [\sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega t) + \sin(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \mathbf{e}_z \\ &= 2E \sin \left(k \frac{1 + \cos(\alpha)}{2} x + k \frac{\sin(\alpha)}{2} y - \omega t \right) \cos \left(k \frac{1 - \cos(\alpha)}{2} x - k \frac{\sin(\alpha)}{2} y \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (38)$$

On s'intéresse davantage à l'intensité moyenne de l'onde au point $(0, y)$. L'intensité totale à un temps t est donnée par :

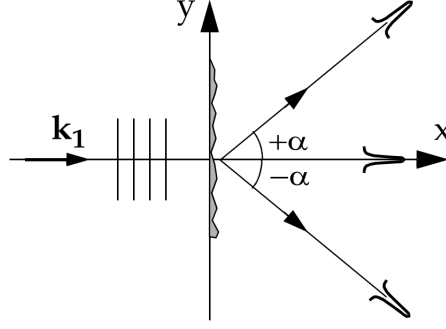
$$I(y) = \mathbf{E}^*(0, y) \cdot \mathbf{E}(0, y) = 4E^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} k \sin(\alpha) y - \omega t \right) \cos^2 \left(\frac{1}{2} k \sin(\alpha) y \right) \quad (39)$$

La moyenne sur une période $I_{\text{moy}}(y)$ est donc calculée dans les séries précédentes :

$$I_{\text{moy}}(y) = 2E^2 \cos^2 \left(\frac{1}{2} k \sin(\alpha) y \right) = I_0 \cos^2 \left(\frac{1}{2} k \sin(\alpha) y \right) \quad (40)$$

On place dans le plan $x = 0$ un film photographique dont le noircissement est proportionnel à l'intensité $I(y)$ incidente sur ce film. Une fois ce film exposé et noirci, on l'éclaire avec un onde incidente de vecteur d'onde $\mathbf{k}_1$.

- (b) Montrer que seules les intensités diffractées dans les directions $\theta = 0$ et $\theta = \pm\alpha$ sont non nulles. C'est le principe de l'holographie : en utilisant uniquement le film photographique noirci éclairé par l'onde incidente $\mathbf{k}_1$, on refait apparaître l'onde $\mathbf{k}_2$ qui avait été utilisée pour le noircir le film.



En suivant l'indication, on suppose que chaque élément de longueur infinitésimale dy du film émet une onde sphérique d'amplitude égale à $\sin^2(\frac{1}{2}k \sin(\alpha)y)$. On considère un point situé à une distance r du centre du film, i.e. $P(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. L'amplitude totale du champ électrique en ce point est donnée par l'intégrale suivante :

$$E(P) = \int_{-L}^L \sin^2 \left[\frac{1}{2}k \sin(\alpha)y \right] \frac{A}{r - y \sin(\theta)} e^{i[k(r-y \sin(\theta)) - \omega t]} dy \quad (41)$$

où A est une constante de proportionnalité. Pour simplifier le calcul, on décide que le terme $A/(r - y \sin(\theta))$ varie peu car $L \ll r$ mais le terme de phase $iky \sin(\theta)$ varie car $\lambda \ll L$. On utilise par ailleurs la propriété suivante : $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$. Ceci permet de réécrire l'expression de l'amplitude totale comme suit :

$$\begin{aligned} E(P) &= -\frac{A}{4r} e^{i(kr - \omega t)} \int_{-L}^L (e^{i\frac{1}{2}k \sin(\alpha)y} - e^{-i\frac{1}{2}k \sin(\alpha)y})^2 e^{-iky \sin(\theta)} dy \\ &= \frac{A}{4r} e^{i(kr - \omega t)} \int_{-L}^L (2 - e^{ik \sin(\alpha)y} - e^{-ik \sin(\alpha)y}) e^{-iky \sin(\theta)} dy \\ &= \frac{A}{4r} e^{i(kr - \omega t)} \int_{-L}^L 2e^{-iky \sin(\theta)} - e^{ik(\sin(\alpha) - \sin(\theta))y} - e^{-ik(\sin(\alpha) + \sin(\theta))y} dy \end{aligned} \quad (42)$$

Par simplicité, on pose : $k' = -k \sin(\theta)$ et $k''_{\pm} = -k(\sin(\theta) \pm \sin(\alpha))$. En intégrant, on obtient l'expression finale pour l'amplitude totale de l'onde :

$$\begin{aligned} E(P) &= -\frac{A}{4r} e^{i(kr - \omega t)} \left(\frac{e^{ik''_+ L} - e^{-ik''_+ L}}{ik''_+} + \frac{e^{ik''_- L} - e^{-ik''_- L}}{ik''_-} - 2 \frac{e^{ik' L} - e^{-ik' L}}{ik'} \right) \\ &= \frac{AL}{r} e^{i(kr - \omega t)} \left(\frac{\sin(k' L)}{k' L} - \frac{1}{2} \frac{\sin(k''_+ L)}{k''_+ L} - \frac{1}{2} \frac{\sin(k''_- L)}{k''_- L} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

L'intensité de l'onde est donnée par $I(P) = E^*(P)E(P)$. Ce produit fait apparaître les termes suivants :

$$\begin{aligned} &\frac{\sin^2(k''_+ L)}{(k''_+ L)^2}, \frac{\sin^2(k''_- L)}{(k''_- L)^2}, \frac{\sin^2(k' L)}{(k' L)^2} \\ &\frac{\sin(k' L)}{k' L} \cdot \frac{\sin(k''_+ L)}{k''_+ L}, \frac{\sin(k' L)}{k' L} \cdot \frac{\sin(k''_- L)}{k''_- L}, \frac{\sin(k''_+ L)}{k''_+ L} \cdot \frac{\sin(k''_- L)}{k''_- L} \end{aligned} \quad (44)$$

Les termes croisés sont négligeables car $k' \neq k''_{\pm}$. Ceci permet d'écrire l'intensité comme :

$$I(P) \propto \frac{\sin^2(k' L)}{(k' L)^2} + \frac{1}{4} \frac{\sin^2(k''_+ L)}{(k''_+ L)^2} + \frac{1}{4} \frac{\sin^2(k''_- L)}{(k''_- L)^2} \quad (45)$$

$I(P)$ a donc trois maxima en $k'L = kL \sin(\theta) = 0 \implies \theta = 0$ et $k''_{\pm}L = kL(\sin(\theta) \pm \sin(\alpha)) = 0 \implies \theta = \pm\alpha$. Dès que l'on s'écarte des maxima, l'intensité chute très vite. En effet, $kL \sin(\theta) = n\pi \implies \sin \theta = \frac{n\lambda}{2L} \ll 1$. Similairement pour les maxima en $\theta = \pm\alpha$. $I(P)$ a l'allure donnée dans la figure 1.

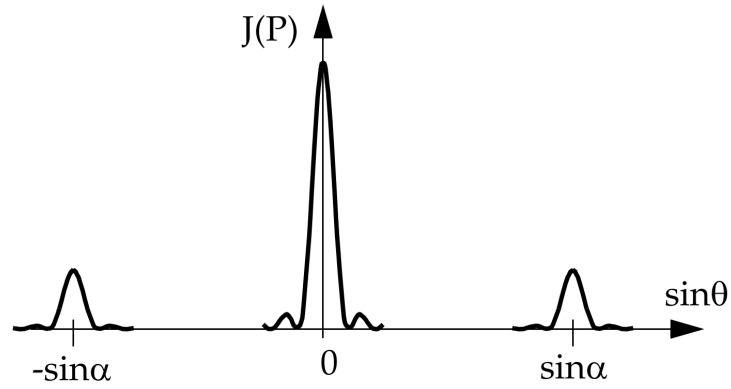


FIGURE 1