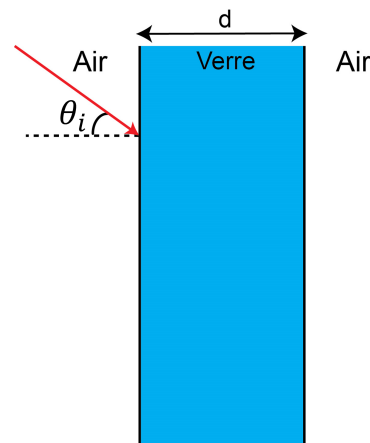


Corrigé 7 : Interférences et diffraction

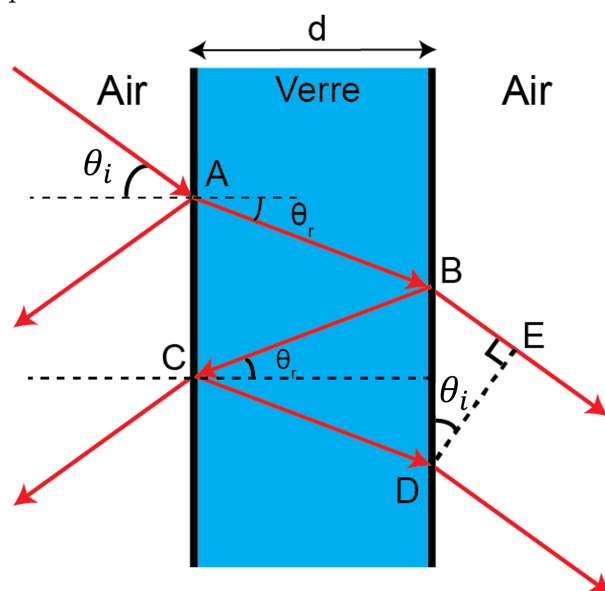
1 Interferométrie de Fabry-Perot

Un interféromètre de Fabry-Perot est un instrument optique composé de 2 miroirs semi-réfléchissants. Il permet de laisser passer uniquement les longueurs d'onde de la lumière incidente qui sont en résonance avec la cavité optique formée par les 2 miroirs. Dans cet exercice, on se propose d'étudier la figure d'interférences de cet interféromètre et déduire certaines de ces propriétés. Pour simplifier l'analyse, on considère une onde chromatique incidente sur une lame de verre de largeur d et d'indice de réfraction n avec un angle incident θ_i par rapport à la normale. Le premier rayon incident est réfracté avec un angle θ_r .



- (a) Expliquer avec un diagramme comment se comporte le rayon lumineux incident dans la lame de verre, puis en sortie de l'autre côté de la lame de verre. Pour deux rayons successifs en sortie, calculer la différence de chemin optique et en déduire la différence de phase $\Delta\phi$ entre deux rayons réfractés par les 2 miroirs en fonction de θ_r .

Le rayon incident est d'abord réfracté dans la lame de verre au point A . Le rayon est ensuite divisé en un rayon réfléchi et un rayon réfracté en B . Le rayon réfléchi à l'intérieur de la lame de verre est réfléchi par le côté gauche en C puis est de nouveau divisé en D . Ce processus se répète donc, ce qui permet donc de supposer qu'un nombre de rayons réfractés par la lame de verre qui tend vers l'infini.



Pour calculer la différence de chemins optique δ , on remarque qu'il faut également prendre en compte le chemin parcouru par le premier rayon réfracté, i.e le chemin BE . La différence de marche s'écrit donc :

$$\delta = n(\|\vec{BC}\| + \|\vec{CD}\|) - \|\vec{BE}\| \quad (1)$$

Le terme n tient compte du changement de la valeur du vecteur d'onde $k' = n \cdot k$. On pose en effet que la différence de phase est donnée par $\Delta\phi = k\delta$ donc il faut tenir compte du

terme n dans le calcul de δ .

Il faut maintenant exprimer $\|\vec{BC}\|$, $\|\vec{CD}\|$ et $\|\vec{BE}\|$ en fonction de θ_r et θ_i .

$$\|\vec{BC}\| = \|\vec{CD}\| = \frac{d}{\cos(\theta_r)} \quad (2)$$

Le trajet verticale parcouru par le rayon réfléchi dans la lame de verre $\|\vec{BD}\|$ est donnée :

$$\|\vec{BD}\| = 2 \frac{d}{\cos(\theta_r)} \sin(\theta_r) = 2d \tan(\theta_r) \quad (3)$$

par conséquent, la longueur parcourue par le premier rayon réfracté est donnée par :

$$\|\vec{BE}\| = 2d \tan(\theta_r) \sin(\theta_i) \quad (4)$$

En utilisant les expressions ci-dessus ainsi que la loi de Snell-Descartes $\sin(\theta_i) = n \sin(\theta_r)$, on obtient donc la différence de marche est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta &= n \left(\frac{d}{\cos(\theta_r)} + \frac{d}{\cos(\theta_r)} \right) - 2d \tan(\theta_r) \sin(\theta_i) \\ &= 2d \frac{\cos(\theta_r) - \sin(\theta_r) \sin(\theta_i)}{\cos(\theta_r)} \\ &= 2nd \frac{1 - \sin^2(\theta_r)}{\cos(\theta_r)} = 2nd \cos(\theta_r) \end{aligned} \quad (5)$$

La différence de phase δ est donc donnée par :

$$\Delta\phi = k\delta = \frac{4\pi nd}{\lambda} \cos(\theta_r) \quad (6)$$

- (b) On suppose que le coefficient de réflexion à l'interface verre-air est égal à $R < 1$. Calculer l'amplitude $s_n(\Delta\phi)$ de chaque refraction en sortie de l'interféromètre. En déduire l'intensité total s_{tot} .

Au point a), nous avons conclu qu'un nombre infini de rayons était réfractés par la lame de verre. L'amplitude de l'onde incidente est donné par s_i . Puisque le premier rayon réfracté 2 fois, l'amplitude de premier rayon sortant s_0 est donné par :

$$s_0 = \left(\sqrt{1-R} \right)^2 s_i = (1-R)s_i \quad (7)$$

Le rayon réfracté suivant d'amplitude s_1 est réfléchi 2 fois et possède un déphasage $\Delta\phi$ par rapport à s_0 . Par récurrence, on en déduit l'expression de l'amplitude du $m^{\text{ième}}$ rayon réfracté s_m à partir de s_0 .

$$s_1 = \sqrt{1-R}(\sqrt{R})^2 e^{i\Delta\phi} \sqrt{1-R} s_i = (Re^{i\Delta\phi}) s_0 \implies s_m = (Re^{i\Delta\phi})^m s_0 \quad (8)$$

par conséquent, on obtient que l'amplitude totale de l'onde transmise s_{tot} s'exprime comme la somme des amplitudes des rayons réfractés.

$$s_{tot} = s_0 \left(\sum_{m=0}^{\infty} Re^{im\Delta\phi} \right) = \frac{s_0}{1 - Re^{i\Delta\phi}} = \frac{(1-R)s_i}{1 - Re^{i\Delta\phi}} \quad (9)$$

(c) Montrer que la transmittance est donnée par l'expression :

$$T(\theta_r) = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\Delta\phi(\theta_r)}{2}}$$

L'intensité de l'onde transmise est donnée par $I_{tot} = s_{tot}^* s_{tot}$ et on obtient que :

$$I_{tot} = \frac{(1-R)^2 \cdot s_0^* s_0}{(1 - Re^{-i\Delta\phi})(1 - Re^{i\Delta\phi})} = I_0 \frac{(1-R)^2}{1 - 2R \cos(\Delta\phi) + R^2} \quad (10)$$

où I_0 est l'intensité de l'onde incidente sur la lame de verre. Finalement, la transmittance est donnée par :

$$\begin{aligned} T(\theta_r) &= \frac{I_{tot}}{I_0} = \frac{(1-R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos(\Delta\phi)} \\ &= \frac{(1-R)^2}{1 + R^2 - 2R(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\Delta\phi}{2}\right))} \\ &= \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\Delta\phi(\theta_r)}{2}} \end{aligned} \quad (11)$$

(d) Donner les conditions pour avoir un maximum la transmittance et dessiner la transmittance pour un angle θ_r fixe en fonction de $\Delta\phi$ puis de λ . Que remarque-t-on ? En déduire une application de l'interferomètre de Fabry-Perot.

La transmittance $T(\theta_r)$ en fonction de $\Delta\phi$ est montrée en Figure d. On y observe en effet des pics périodiques avec des maxima égales à 1. On constate que plus le coefficient de réflexivité R est important, plus la largeur de pic à mi-hauteur des pics est petite. Mathématiquement, les maxima se traduisent de la forme suivante :

$$\text{maximas : } \frac{\Delta\phi}{2} = m\pi \implies \lambda_m = \frac{2nd \cos(\theta_r)}{m} \quad (12)$$

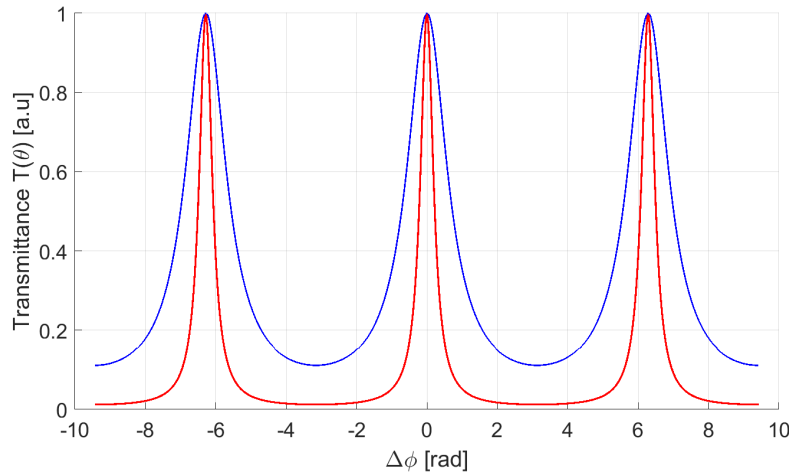


FIGURE 1 – Transmittance en fonction de $\Delta\phi$

En utilisant (6), il est possible d'obtenir la même figure mais en fonction de λ dans ce cas-ci. On remarque que la distance entre les pics semble être la même. Ceci s'explique par l'argument suivant. Pour $m \gg 1$, la distance entre le pic lié à λ_m et λ_{m+1} peut s'écrire comme :

$$\lambda_m - \lambda_{m+1} = \Delta\lambda_m = 2nd \cos(\theta_r) \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) = \frac{2nd \cos(\theta_r)}{m(m+1)} \cong \frac{2nd \cos(\theta_r)}{m^2} \quad (13)$$

Pour m très grand, on a donc que la distance entre pics de transmittance est approximativement égale. En effet,

$$\Delta\lambda_{m+p} = \frac{2nd \cos(\theta_r)}{(m+p)(m+p+1)} = \Delta\lambda_m \frac{m(m+1)}{(m+p+1)(m+p)} \cong \Delta\lambda_m \left(1 - \frac{2p}{m} + \mathcal{O}\left(\frac{p}{m}\right) \right) \quad (14)$$

Cette propriété permet à l'interféromètre de Fabry-Perot de jouer un rôle de filtre optique, permettant de sélectionner seulement certaines longueurs d'onde d'un spectre lumineux ou encore de mesurer précisément des longueurs d'onde. Également, on remarque que la largeur de pic à mi-hauteur $\delta\lambda$ semble être la même. Le rapport entre la distance entre les pics $\Delta\lambda$ et la largeur de pic $\delta\lambda$ est appelé Finesse et caractérise la capacité de l'interféromètre à distinguer des longueurs d'onde proches.

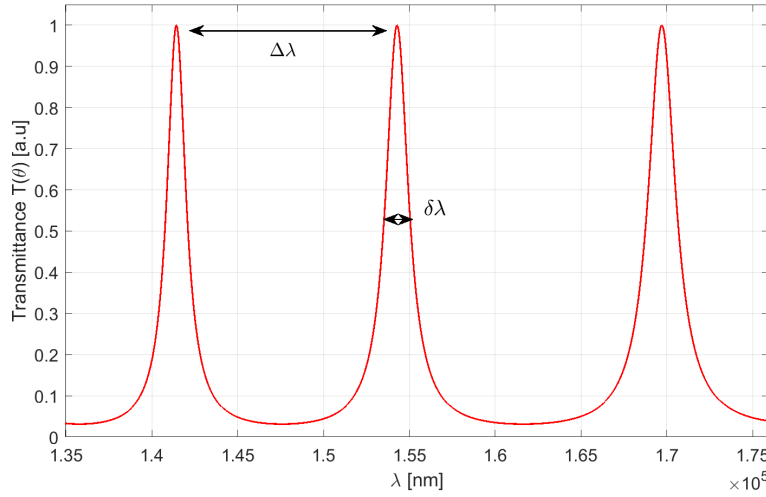
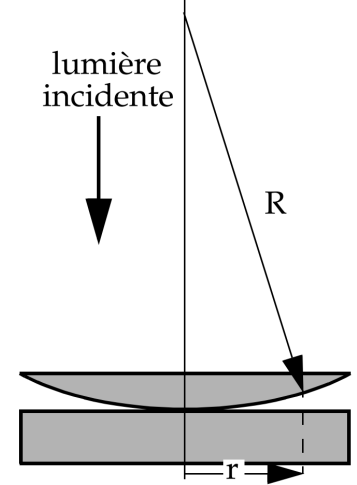


FIGURE 2 – Transmittance en fonction de λ

2 Anneaux de Newton

Une lentille optique plan-convexe, posée sur une plaque de verre, est illuminée par une onde monochromatique. On suppose que l'épaisseur d de la couche d'air sous la lentille est négligeable par rapport au rayon R , i.e $d \ll R \forall r$.

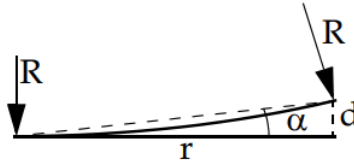
- (a) En utilisant l'approximation citée ci-dessus, déterminer l'épaisseur $d(r)$ de la couche d'air sous la lentille. Sous cette hypothèse, la surface de la lentille peut être approximée comme parallèle à la plaque de verre. Décrire le comportement d'un faisceau incident réfléchi aux différentes interfaces. On négligera les réflexions multiples par la plaque de verre.



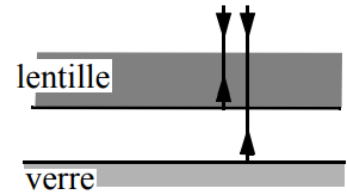
Comme $R \gg d \forall r$, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$R^2 = r^2 + (R - d)^2 \implies 2d \cong \frac{r^2}{R} \quad (15)$$

Par conséquent, $\tan(\alpha) \cong \sqrt{d/2R}$, ce qui permet d'admettre que les faces de la lentille et du verre sont parallèles.



À partir de ces hypothèses, on peut dire que l'espace entre la lentille et la plaque de verre est une couche d'air d'épaisseur d variable. Les interférences résultent des rayons réfléchis par les deux surfaces de la couche d'air comme sur la figure ci-contre. Elles se manifestent donc par des anneaux alternativement sombres (interférence destructive) et clairs (interférence constructive).



- (b) Montrer qu'un observateur placé au-dessus de la lentille observe des interférences qui se manifestent par des anneaux concentriques alternativement sombres et clairs appelés *Anneaux de Newton*. Déterminer le rayon r_m du m i-ème anneau sombre ainsi que la loi décrivant l'augmentation du rayon entre deux anneaux sombres consécutifs.

On souhaite donc déterminer r_m caractérisant la position des anneaux sombres, correspondant donc aux interférences destructives. Pour cela, on considère l'hypothèse simple que la lumière incidente s'écrit sous la forme complexe suivante :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (16)$$

On appelle $\mathbf{E}_1$ le rayon lumineux provenant uniquement de la réflexion par l'intérieur de la lentille et $\mathbf{E}_2$ le rayon lumineux ayant été réfracté puis réfléchi par la verre. La différence de chemin optique correspond donc à $2d$, puisque le rayon lumineux $\mathbf{E}_2$ traverse la couche d'air entre la lentille et le verre. De plus, la réflexion induit une inversion de signe pour $\mathbf{E}_2$.

En superposant ces deux contributions, on obtient que :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{tot}} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} (1 - e^{i2kd}) \\ &= -\mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} e^{ikd} (e^{ikd} - e^{-ikd}) \\ &= -2i\mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} e^{ikd} \sin(kd)\end{aligned}\quad (17)$$

D'après ce résultat, pour obtenir une interférence destructive, il est nécessaire que la condition suivante soit satisfaite :

$$\frac{2\pi}{\lambda}d = m\pi \implies 2d = m\lambda \quad (18)$$

En utilisant l'expression trouvée en (15), la valeur de r_m peut donc être dérivée :

$$r_m = \sqrt{m\lambda R} \quad (19)$$

(c) Quelle est l'aire séparant deux anneaux sombres ; dépend-elle de m ?

L'aire séparant r_m et r_{m+1} est donnée par :

$$A_m = \pi(r_{m+1}^2 - r_m^2) = \pi\lambda R = \text{cst} \quad (20)$$

On remarque que A_m ne dépend pas de m et reste constant.

(d) Déterminer la loi décrivant le rayon r'_m de la même interférence constructive.

La condition pour observer des interférences constructives s'observent à partir de l'expression donnée par (17). La condition s'écrit donc comme :

$$\frac{2\pi}{\lambda}d = (m + \frac{1}{2})\pi \implies r'_m = \sqrt{(m + \frac{1}{2})\lambda R} \quad (21)$$

3 Pression de radiation

Dans cet exercice, on s'intéresse à dériver l'expression de la pression de radiation par 2 approches différentes.

On considère une onde électromagnétique plane progressive se propageant dans le vide et incidente sur une surface plane en $x = 0$.

$$\vec{E}_i = \text{Re} \left(E_{0,i} e^{i(kx - \omega t)} \vec{e}_y \right) = E_{0,i} \cos(kx - \omega t) \vec{e}_y$$

En $x = 0$, on suppose que la surface plane correspond à un miroir métallique, parfaitement conducteur. Les conditions aux bords imposent que, en $x = 0$, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls. Ceci implique donc une onde électromagnétique réfléchie

$$\vec{E}_r = \text{Re} \left(E_{0,r} e^{i(kx + \omega t)} \vec{e}_y \right) = E_{0,r} \cos(kx + \omega t) \vec{e}_y$$

(a) Déterminer l'amplitude $E_{0,r}$ en fonction de $E_{0,i}$. Donner une expression pour les champs électrique et magnétique $\vec{E}$ et $\vec{B}$ résultants pour $x < 0$. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\langle \vec{S} \rangle$, ainsi que la densité volumique d'énergie moyenne de l'onde électromagnétique.

En posant que $E_i + E_r = 0$, on a en $x = 0$:

$$E_{\text{tot}} = (E_{0,r} \cos(\omega t) + E_{0,i} \cos(\omega t)) \vec{e}_y = 0, \quad (22)$$

et on a donc $E_{0,r} = -E_{0,i}$. On observe que le champ totale $\vec{E}_{\text{tot}}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{tot}} &= \vec{E}_i + \vec{E}_r = \text{Re}(E_0(e^{i(kx-\omega t)} - e^{i(kx+\omega t)})\vec{e}_y) \\ &= \text{Re}(E_0 e^{ikx}(-2i \sin(\omega t))\vec{e}_y) = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t)\vec{e}_y\end{aligned}\quad (23)$$

Évalué en $x = 0$ et en notation réelle, on observe effectivement que $\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{0}$, ce qui est souhaité :

$$\vec{E}_{\text{tot}}(x = 0) = \text{Re}(E_0(-2i \sin(\omega t))) = 0 \quad (24)$$

Par la loi d'induction de Faraday, il est possible de déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ à partir dans un champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_0$

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies \vec{B} = \text{Re} \left(-i(\vec{k} \times \vec{u}) E_0 \int e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} dt \right) \\ &= \text{Re} \left[\frac{E_0 k}{\omega} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \left(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{u} \right) \right] = \frac{E_0 k}{\omega} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \left(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{u} \right) \\ &= \frac{E_0}{c} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \left(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{u} \right)\end{aligned}\quad (25)$$

où u est le vecteur unitaire dans la direction de la polarisation. Dans le cas présent, $\vec{k} = k\vec{e}_x$ et $\vec{u} = \vec{e}_y$ et par conséquent, on obtient les expressions suivantes pour $\vec{B}_i$ et $\vec{B}_r$:

$$\vec{B}_i = \frac{E_{0,i}}{c} \cos(kx - \omega t) \vec{e}_z \quad (26)$$

$$\vec{B}_r = -\frac{E_{0,r}}{c} \cos(kx + \omega t) \vec{e}_z = \frac{E_{0,i}}{c} \cos(kx + \omega t) \vec{e}_z \quad (27)$$

Le champ magnétique total dans le vide $\vec{B}_{\text{tot}}$ est donc donnée par la superposition des champs incident et réfléchi :

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_{0,i}}{c} (\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)) \vec{e}_z = 2 \frac{E_{0,i}}{c} \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{e}_z \quad (28)$$

Le champ magnétique se comporte donc comme une onde stationnaire en $x < 0$. Dans le vide, le vecteur de poynting de l'onde EM incidente est donnée par $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0$. Par conséquent, dans le cas présent, le vecteur de Poynting est donnée par :

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}_i \times \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{E_{0,i}^2}{c\mu_0} \cos^2(kx - \omega t) (\vec{e}_y \times \vec{e}_z) = c\epsilon_0 E_{0,i}^2 \cos^2(kx - \omega t) \vec{e}_x \quad (29)$$

On remarque que le vecteur de Poynting pointe donc dans la direction de propagation de l'onde EM plane. En prenant la moyenne temporelle, on a que $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_{0,i}^2 \vec{e}_x$

Cette solution peut être simplifiée en considérant la densité volumique d'énergie moyenne de l'onde électromagnétique. En effet, celle-ci est donnée par :

$$u_v = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{|\vec{B}|^2}{\mu_0} \right) \quad (30)$$

Dans ce cas-ci, en prenant la moyenne temporelle, on obtient que :

$$\langle u_v \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{0,i}^2 \quad (31)$$

En conclusion, la moyenne du vecteur de Poynting peut s'écrire comme :

$$\langle \vec{S} \rangle = c \langle u_v \rangle \vec{e}_x \quad (32)$$

- (b) Déterminer la charge surfacique σ et le courant surfacique $\vec{J}_s$ en $x = 0$

Indication Les conditions de bord à l'interface entre 2 milieux s'écrivent :

$$\begin{aligned}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)_\perp &= \sigma & (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)_\parallel &= 0 \\ (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)_\perp &= 0 & (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)_\parallel \cdot (\vec{t} \times \vec{n}) &= \vec{J}_s \cdot \vec{t}\end{aligned}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface, en direction du matériau 2, et $\vec{t}$ un vecteur tangent à la surface

Pour trouver la charge surfacique σ en $x = 0$, il suffit d'utiliser la loi de Gauss, étant donnée que $\vec{E}_{metal}$ est nul et que le champ électrique dans le vide $\vec{E}_{vide}$ est parallèle à la surface plane, ceci montre que $\sigma = 0$ par la condition $(D_2 - D_1)_\perp = \sigma$

Pour le courant surfacique $\vec{J}_s$, il faut utiliser la condition $(H_2 - H_1)_\parallel \cdot (\vec{t} \times \vec{n}) = \vec{J}_s \cdot \vec{t}$. Comme le miroir est un conducteur parfait, $\vec{B}_{metal} = 0$ pour $x > 0$.

En utilisant l'identité vectorielle $\vec{a}(\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \wedge \vec{a})$, on a :

$$-\vec{H}_\parallel (\vec{t} \wedge \vec{n}) = \vec{t}(\vec{n} \wedge -\vec{H}_\parallel) = \vec{t}\vec{J}_s. \quad (33)$$

On a donc

$$\vec{J}_s = \vec{n} \wedge -\vec{H}_\parallel, \quad (34)$$

et comme $\vec{n} = \vec{e}_x$ et $-\vec{H}_\parallel = -\vec{B}_\parallel/\mu_0$, on a

$$\vec{J}_s = -2 \frac{E_{0,i}}{c\mu_0} \cos(\omega t) (\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z) = 2E_{0,i} c \epsilon_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y, \quad (35)$$

et finalement :

$$\vec{J}_s = 2 \frac{E_{0,i}}{c\mu_0} \cos(\omega t) \vec{e}_y = 2c\epsilon_0 E_{0,i} \cos(\omega t) \vec{e}_y. \quad (36)$$

- (c) L'expression de la force résultante est donnée par :

$$d\vec{F} = \frac{1}{2} (\sigma \vec{E} + \vec{J}_s \times \vec{B}) dS,$$

où dS est un petit élément de surface. Donner une explication pour le terme $1/2$. En déduire que l'onde exerce une pression P sur le miroir dont on calculera la valeur moyenne $\langle P \rangle$ en fonction de la densité volumique moyenne d'énergie $\langle u_v \rangle$ de l'onde incidente, puis de la densité volumique moyenne d'énergie $\langle u_{v,tot} \rangle$ de l'onde totale

Le champ électromagnétique exerce sur une surface $d\vec{S}$ du miroir une force dont l'expression est, en notation réelle : (noter que $\sigma = 0$)

$$d\vec{F} = \frac{1}{2} \vec{J}_s \times \vec{B} dS \quad (37)$$

En effet, la surface dS est soumise à l'action du champ magnétique qui lui est extérieur ; il ne faut donc pas prendre en compte le champ magnétique créé par cette surface dS chargée et parcourue par des courants volumiques. Le facteur $1/2$ prend en compte cette remarque. Dans ce cas-ci, cet élément de force $d\vec{F}$ s'exprime donc comme :

$$d\vec{F} = \frac{1}{2} 4\epsilon_0 E_{0,i}^2 \cos^2(\omega t) dS \vec{e}_x \quad (38)$$

En prenant la valeur moyenne de $d\vec{F}$, on obtient donc que :

$$\langle d\vec{F} \rangle = \epsilon_0 E_{0,i}^2 dS \vec{e}_x \quad (39)$$

La pression de radiation P est donc finalement donnée par :

$$P = \frac{\langle d\vec{F} \rangle}{dS} = \epsilon_0 E_{0,i}^2 = 2\langle u_v \rangle \quad (40)$$

On peut montrer que $\langle u_{v,tot} \rangle = 4\langle u_v \rangle$ et donc on obtient que la pression de radiation s'écrit simplement comme :

$$P = \langle u_{v,tot} \rangle / 2 \quad (41)$$

Dans un second temps, l'expression de la pression de radiation peut être également dérivée en considérant la nature corpusculaire de la lumière. Pour la suite de l'exercice

- (d) En utilisant la relation de l'énergie d'un photon $E_{ph} = c|\vec{p}|$, déterminer l'expression de la pression de radiation P produite en fonction de la puissance émise P_w et de la distance r de la surface considérée par rapport à la source.

Chaque photon incident possède une quantité de mouvement initiale $\vec{p}_0$. Après réflexion sur le miroir parfait, sa quantité de mouvement sera donnée par $-\vec{p}_0$. Par conséquent, la quantité de mouvement transmise par un photon est donnée par $\Delta p = 2p_0 = 2E_{ph}/c$.

Soit N le nombre de photons incidents par unité de temps et de surface. Alors, la force exercée par ceux-ci sur un élément de surface par unité de temps est donnée par :

$$dF = N\Delta p dS = N \frac{2E_{ph}}{c} dS \quad (42)$$

L'énergie ΔE reçue par unité de surface dS peut être écrite à la fois avec la puissance émise P_w et également par l'énergie individuel des photons incidents :

$$\Delta E = \frac{P_w}{4\pi r^2} dS \Delta t = N E_{ph} dS \quad (43)$$

On en déduit que $E_{ph} = P_w/(4\pi r^2 N)$. Ceci permet donc d'écrire la pression $P = dF/dS$ en fonction de la puissance P_w

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{P_w/(2\pi r^2 c) dS}{dS} = \frac{P_w}{2\pi r^2 c} \quad (44)$$

Cette expression peut être ramenée à celle trouvée au point c). En effet, la puissance moyenne émise par la source est liée à la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\langle \vec{S} \rangle$ par la relation $P/(4\pi r^2) = \langle \vec{S} \rangle$. Par conséquent, on obtient donc que :

$$P = 2 \frac{\langle \vec{S} \rangle}{c} = \epsilon_0 E_0^2 \quad (45)$$

- (e) Déterminer le rayon limite R_{lim} d'une sphère métallique pour lequel celle-ci pourrait être éjectée du système solaire, en tenant compte de la pression de radiation. On suppose que le soleil émet un rayonnement d'une puissance P_w . La section efficace de la sphère est donnée par πR^2 .

La sphère métallique est soumise à 2 forces :

- la force de gravité : $\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_x$, où M est la masse solaire et m la masse de la sphère
- la force produite par la pression de radiation : $\vec{F}_p = \frac{PR^2}{2r^2 c} \vec{e}_x$ où R est le rayon de la sphère.

La 2^{ème} loi de Newton donc donc que :

$$ma = \frac{PR^2}{2r^2c} - \frac{GMm}{r^2} \quad (46)$$

Pour que la sphère ne soit pas éjectée du système solaire, il faut donc que $a \leq 0$, ce qui permet de poser une condition sur le rayon limite R_{lim} pour la sphère métallique.

$$\left(\frac{PR^2}{2r^2c} - \frac{GMm}{r^2} \right) \leq 0 \implies R_{lim} = \sqrt{\frac{2GcMm}{P}}. \quad (47)$$