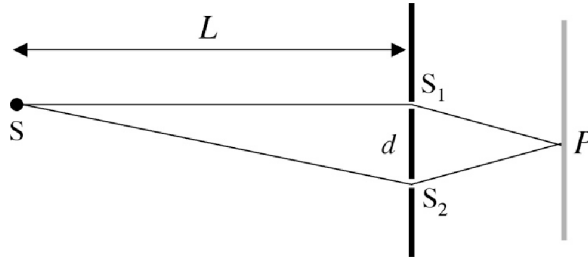


15 mars 2024

Corrigé 4 : Superpositions d'onde et Principe de Huygens

1 Interférences fentes décalées

Une onde sphérique monochromatique de longueur d'onde λ illumine deux fentes identiques S_1 et S_2 sur une plaque située à une distance L de la source S . La fente S_1 est placée à la même position horizontalement que la source S , et la fente S_2 est à une distance d en dessous de S_1 , comme indiqué sur le schéma ci-dessous. On suppose $d \ll L$. On néglige les effets de la diffraction, c'est-à-dire l'interférence de chaque faisceau avec lui-même.



- (a) On observe la lumière au point P , placé sur l'écran à égale distance de S_1 et de S_2 . Lorsqu'une seule des deux fentes est ouverte (S_1 ou S_2), on observe une intensité moyenne de I_0 . Lorsqu'il y a deux fentes, l'intensité moyenne mesurée est alors de $3I_0$. Quelle est la plus petite valeur de d compatible avec ces observations ?

Les points S_1 et S_2 sont, par principe de Huygens, sources d'une onde cylindrique qui ont la même intensité au point P , ce qui implique que les deux ondes ont la même amplitude, malgré la dépendance en $1/\sqrt{r}$, vu que r est le même pour S_1 et S_2 . Toutefois, il faut tenir compte d'un déphasage δ entre les deux sources provenant de la différence de chemins optiques :

$$S_1 : A_1(r, t) = A_0 \sin(kr - \omega t + kL) \quad (1)$$

$$S_2 : A_2(r, t) = A_0 \sin\left(kr - \omega t + k\sqrt{L^2 + d^2}\right) \approx A_0 \sin\left(kr - \omega t + kL(1 + d^2/2L^2)\right) \quad (2)$$

où on a utilisé le développement limité $\sqrt{L^2 + d^2} \approx L(1 + d^2/2L^2)$ et le fait que $d \ll L$. Quand une seule fente est ouverte, l'intensité moyenne (sur une période) au point P est donnée par :

$$I(P) \propto \langle |A_1(P, t)|^2 \rangle = A_0^2 \langle \sin^2(kr - \omega t + kL) \rangle = \frac{A_0^2}{2} = I_0 \quad (3)$$

Lorsque les deux fentes sont ouvertes, l'intensité moyenne totale de la somme des 2 ondes est donnée par :

$$\begin{aligned} I_{tot}(P) &\propto \langle |A_1(P, t) + A_2(P, t)|^2 \rangle \\ &= A_0^2 \langle |\sin(kr - \omega t + kL) + \sin(kr - \omega t + kL(1 + d^2/2L^2))|^2 \rangle \\ &= 4A_0^2 \cos^2(kd^2/4L) \langle \sin^2(kr - \omega t + kL(1 + d^2/4L^2)) \rangle \\ &= 4I_0 \cos^2(kd^2/4L) \end{aligned} \quad (4)$$

où $r = \|\vec{S_1 P}\| = \|\vec{S_2 P}\|$. Finalement, puisque $I_{tot}(P) = 3I_0$ selon les observations, il suffit de résoudre pour d_{min} en posant que $\cos^2(kd^2/4L) = \frac{3}{4}$

$$\cos(kd^2/4L) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \implies d_{min} = \sqrt{\frac{4L}{k} \frac{\pi}{6}} = \sqrt{\frac{\lambda L}{3}} \quad (5)$$

- (b) Étudier les figures d'interférences produites lorsque les deux fentes S_1 et S_2 sont ouvertes. On supposera que l'écran est placé à une distance $R \gg d$ de la plaque.

On adopte un raisonnement similaire à celui des fentes de Young mais en tenant compte du déphasage entre les deux sources S_1 et S_2 . Pour un point B sur l'écran, distant de S_1 et de S_2 respectivement de r_1 et r_2 . Comme pour les fentes de Young, la différence de chemin $r_1 - r_2$ est donnée par $d \sin(\theta)$. Comme l'écran est situé à une distance $R \gg d$, on peut effectuer la simplification vue en cours et considérer les ondes comme planes. En notant que l'on peut enlever la dépendance en $1/\sqrt{r}$ sur l'amplitude, comme on suppose les ondes comme planes, la somme des deux amplitudes s'écrit formellement :

$$\begin{aligned} A_{tot}(B) &= A_1(B) + A_2(B) \\ &= A_0(\sin(kr_1 - \omega t + kL) + \sin(kr_2 - \omega t + kL(1 + d^2/2L^2))) \\ &= 2A_0 \sin\left(k \frac{r_1 + r_2}{2} - \omega t + kL(1 + d^2/4L^2)\right) \cos\left(k \frac{r_1 - r_2}{2} - kd^2/4L\right) \quad (6) \\ &= 2A_0 \sin\left(k \frac{r_1 + r_2}{2} - \omega t + kL(1 + d^2/4L^2)\right) \cos\left(k \frac{d \sin(\theta)}{2} - kd^2/4L\right) \end{aligned}$$

Comme l'intensité est proportionnelle à $|A|^2$, en prenant la moyenne temporelle $\langle . \rangle$, on obtient l'expression de l'intensité de l'onde au point B .

$$I_{tot}(B) \propto \langle |A_{tot}(B)|^2 \rangle = 4I_0 \cos^2\left(k \frac{d \sin(\theta)}{2} - kd^2/4L\right) \quad (7)$$

Les interférences constructives se trouvent lorsque $\delta = m\pi$ et les interférences destructives lorsque $\delta = \frac{\pi}{2} + m\pi$.

$$\text{Interférences constructives : } \sin(\theta) = \frac{m\lambda}{d} + \frac{d}{2L} \quad (8)$$

$$\text{Interférences destructives : } \sin(\theta) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d} - \frac{d}{2L} \quad (9)$$

- (c) Montrer que dans la limite où l'écran est placé à une distance $R \gg d$ de la plaque, on retrouve la figure d'interférence simple des fentes de Young vue en cours, dont la position verticale est décalée vers le bas d'une distance $dR/(2L)$.

Si on considère l'écran loin de la plaque

$$\sin(\theta) \sim \tan(\theta) = \frac{y}{R}.$$

Donc

$$y = m \frac{\lambda R}{d} - \frac{dR}{2L}.$$

- (d) Comment est modifiée la réponse donnée en a) si un milieu d'indice de réfraction $n = 2$ remplissait : 1. l'espace entre la plaque et l'écran, 2. l'espace entre la source S et les deux fentes.

Dans le cas où l'espace entre la plaque et l'écran a un indice de réfraction n , aucune différence n'est visible. En effet, puisque $\|\vec{S_1P}\| = \|\vec{S_2P}\|$, la différence de chemin optique n'est pas

modifiée. Plus rigoureusement, l'expression des deux ondes émises en S_1 et S_2 devient :

$$S_1 : A_1(r, t) = A_0 \sin(k'r - \omega t + kL) \quad (10)$$

$$S_2 : A_2(r, t) = A_0 \sin(k'r - \omega t + kL(1 + d^2/2L^2)) \quad (11)$$

où $k' = 2\pi/\lambda' = n \cdot k$ est le nombre d'onde des ondes émises dans le milieu. Par (4), l'expression de l'intensité moyenne totale en P n'est donc pas modifiée. Dans le cas où l'espace entre la source et la plaque a un indice de réfraction n , alors l'expression des deux ondes émises en S_1 et S_2 est modifiée comme suit :

$$S_1 : A_1(r, t) = A_0 \sin(kr - \omega t + k'L) \quad (12)$$

$$S_2 : A_2(r, t) = A_0 \sin(kr - \omega t + k'L(1 + d^2/2L^2)) \quad (13)$$

En ré-utilisant (4), on obtient donc une expression différente pour l'intensité moyenne totale en P :

$$I_{tot}(P) \propto 4I_0 \cos^2(k'd^2/4L) \quad (14)$$

Similairement à (5), une nouvelle expression pour d_{min} est obtenue :

$$d'_{min} = \sqrt{\frac{4L}{k'} \frac{\pi}{6}} = \sqrt{\frac{\lambda L}{3m}} \quad (15)$$

2 Diffraction de Fraunhofer

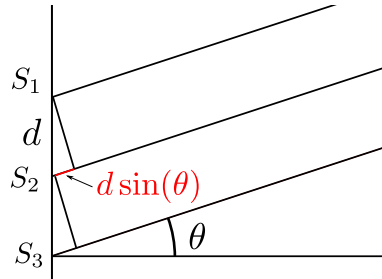
L'intérêt de cet exercice est de dériver la formule de la figure de diffraction créée par le passage d'une onde plane à travers une fente rectangulaire.

Dans un premier temps, on considère le cas de 3 sources cohérentes S_1 , S_2 et S_3 , distantes chacune de d , situées à une distance $R \gg d$ de l'écran. La longueur d'onde des ondes émises est λ .

(a) Dériver l'intensité moyenne de l'onde résultante des trois sources I_{tot}

Les 3 sources étant cohérentes, il n'y a donc aucun déphasage entre elles et sont toutes de même amplitude S_0 .

$$S_{i=1,2,3}(r, t) = S_0 \sin(kr - \omega t) = S_0 \Im(e^{i(kr - \omega t)}) \quad (16)$$



La différence de chemins entre les 3 sources et un point P situé à un angle θ est montrée sur la figure ci-dessus. La différence de chemins entre S_1 et S_2 est égale à $d \sin(\theta)$ tout comme la différence de chemins entre S_2 et S_3 . Par conséquent, l'amplitude de l'onde résultante des 3 sources s'écrit sous la forme.

$$\begin{aligned} S_{tot}(\theta, t) &= S_0(\sin(kr - \omega t) + \sin(kr - \omega t + \phi) + \sin(kr - \omega t + 2\phi)) \\ &= S_0 \Im(e^{i(kr - \omega t)}(1 + e^{i\phi} + e^{i2\phi})), \end{aligned} \quad (17)$$

où on a noté $\phi = kd \sin(\theta)$ pour alléger la notation. En utilisant la formule de la série

géométrique, (17) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned}
S_{tot}(\theta, t) &= S_0 \Im(e^{i(kr-\omega t)}(1 + e^{i\phi} + e^{i2\phi})) \\
&= S_0 \Im\left(e^{i(kr-\omega t)} \frac{e^{i3\phi}}{e^{i\phi}}\right) \\
&= S_0 \Im\left(e^{i(kr-\omega t)} e^{i\frac{3}{2}\phi} e^{-i\frac{1}{2}\phi} \frac{e^{i\frac{3}{2}\phi} - e^{-i\frac{3}{2}\phi}}{e^{i\frac{1}{2}\phi} - e^{-i\frac{1}{2}\phi}}\right) \\
&= S_0 \Im\left(e^{i(kr-\omega t+\phi)} \frac{\sin(\frac{3}{2}\phi)}{\sin(\frac{1}{2}\phi)}\right) \\
&= S_0 \frac{\sin(\frac{3}{2}\phi)}{\sin(\frac{1}{2}\phi)} \sin(kr - \omega t + \phi)
\end{aligned} \tag{18}$$

On rappelle que l'intensité d'une onde I est proportionnelle au carré de son amplitude S^2 . En considérant la moyenne temporelle de l'intensité et notant $I_0 = S_0^2/2$, il est possible d'obtenir une expression pour l'intensité moyenne de 3 sources cohérentes :

$$\begin{aligned}
I_{tot}(\theta) &\propto S_0^2 \left(\frac{\sin(\frac{3}{2}\phi)}{\sin(\frac{1}{2}\phi)} \right)^2 \langle \sin^2(kr - \omega t + \phi) \rangle \\
&= \frac{S_0^2}{2} \left(\frac{\sin(\frac{3}{2}\phi)}{\sin(\frac{1}{2}\phi)} \right)^2 \\
&= I_0 \left(\frac{\sin(\frac{3}{2}\phi)}{\sin(\frac{1}{2}\phi)} \right)^2
\end{aligned} \tag{19}$$

On considère désormais le cas d'une fente de largeur d . Pour étudier le phénomène de diffraction, on fait l'hypothèse que l'onde plane incidente sur la fente peut être décrite à l'aide de N sources cohérentes équidistantes d'amplitude S_0/N

- (b) Dériver l'intensité moyenne sur l'écran en fonction de θ . Comment l'expression se simplifie-t-elle dans la limite $N \rightarrow \infty$?

On raisonne comme pour le point a). La distance entre chaque source est donnée par $a = d/N$. L'amplitude pour chaque onde est donnée par :

$$S_{i=1,\dots,N}(r, t) = \frac{S_0}{N} \sin(kr - \omega t) \tag{20}$$

La différence de chemins entre chaque source est également de $a \sin(\theta)$. Par conséquent, l'onde résultante est donnée par :

$$\begin{aligned}
S_{tot}(\theta, t) &= \sum_{i=1}^N S_i(\theta, t) \\
&= \frac{S_0}{N} \Im\left(e^{i(kr-\omega t)} \sum_{n=0}^{N-1} e^{inka \sin(\theta)}\right) \\
&= \frac{S_0}{N} \Im\left(e^{i(kr-\omega t)} \frac{e^{iNka \sin(\theta)} - 1}{e^{ika \sin(\theta)} - 1}\right) \\
&= \frac{S_0}{N} \Im\left(e^{i(kr-\omega t) + ik \frac{N-1}{2} a \sin(\theta)} \frac{\sin(\frac{Nka}{2} \sin(\theta))}{\sin(\frac{ka}{2} \sin(\theta))}\right) \\
&= \frac{S_0}{N} \left(\frac{\sin(\frac{Nka}{2} \sin(\theta))}{\sin(\frac{ka}{2} \sin(\theta))} \right) \sin\left(kr - \omega t + \frac{N-1}{2} ka \sin(\theta)\right)
\end{aligned} \tag{21}$$

L'intensité moyenne est donc donnée par

$$\begin{aligned}
I_{tot}(\theta) &\propto \frac{S_0^2}{N^2} \left(\frac{\sin(\frac{Nka}{2} \sin(\theta))}{\sin(\frac{ka}{2} \sin(\theta))} \right)^2 \langle \sin^2(kr - \omega t + \frac{N-1}{2} ka \sin(\theta)) \rangle \\
&= \frac{I_0}{N^2} \left(\frac{\sin(\frac{Nka}{2} \sin(\theta))}{\sin(\frac{ka}{2} \sin(\theta))} \right)^2 \\
&= \frac{I_0}{N^2} \left(\frac{\sin(\frac{kd}{2} \sin(\theta))}{\sin(\frac{kd}{2N} \sin(\theta))} \right)^2
\end{aligned} \tag{22}$$

Dans la limite où $N \rightarrow \infty$, $\sin(\frac{ka}{2N} \sin(\theta)) \approx \frac{ka}{2N} \sin(\theta)$. (22) peut donc se réécrire en fonction de $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$.

$$\begin{aligned}
I_{tot}(\theta) &= \frac{I_0}{N^2} \left(\frac{\sin(\frac{kd}{2} \sin(\theta))}{\sin(\frac{kd}{2N} \sin(\theta))} \right)^2 \\
&\approx I_0 \left(\frac{\sin(\frac{kd}{2} \sin(\theta))}{\frac{kd}{2} \sin(\theta)} \right)^2 \\
&= I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{kd}{2} \sin(\theta)\right) = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin(\theta)\right)
\end{aligned} \tag{23}$$

- (c) Donner une condition pour que plusieurs pics de diffraction soient visibles ? À partir de ce résultat, dessiner qualitativement la figure de diffraction pour : i) $a/\lambda = 1$, ii) $a/\lambda = 2$. Indication : raisonner sur les zéros de la fonction sinus cardinal.

Les zéros de la fonction $\text{sinc}^2(x)$ correspondent aux zéros de $\sin(x)$, mis à part pour $x = 0$, i.e $x = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}^*$. Une condition pour que le pic m soit visible (et donc que le zéro m soit visible) est qu'il existe un angle θ tel que

$$\frac{kd}{2} \sin(\theta) = m\pi \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{m\lambda}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{\lambda} > m.$$

On observe sur la figure 1 que pour $d/\lambda = m$, on observe m zéros et donc m pics.

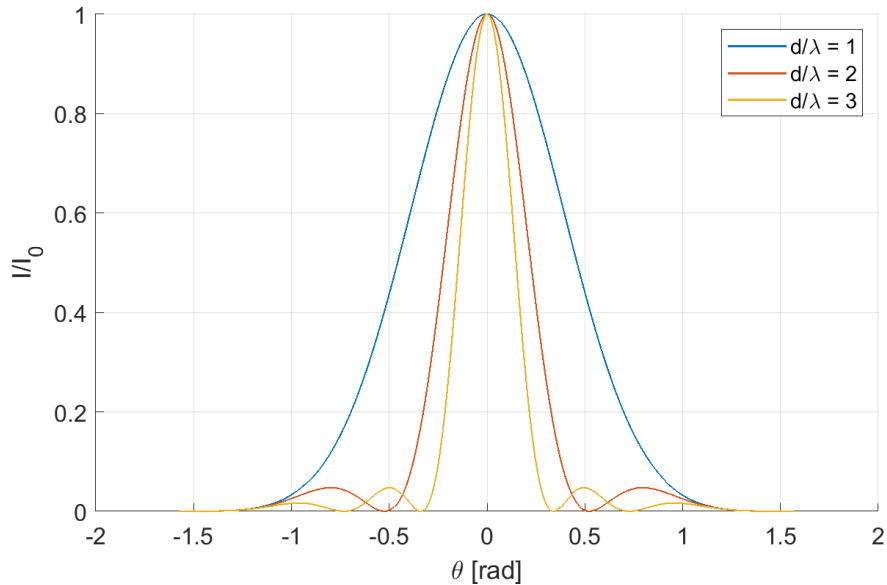


FIGURE 1 – Figures de diffractions pour différentes valeurs de d/λ

Pour aller plus loin, les maximums de la fonction $\text{sinc}^2(x)$ correspondent aux extremas de la fonction $\text{sinc}(x)$. En prenant la dérivée, nous obtenons deux conditions pour les extremas de $\text{sinc}(x)$:

$$\text{sinc}'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2} = 0 \implies \tan(x) = x \quad (24)$$

Cette dernière égalité ne peut pas être résolue analytiquement. La solution triviale est $x = 0$. Toutefois, on peut approximer la première solution non-triviale comme étant $x \approx 4.494$. Ceci donne donc une condition pour que le maxima de la première tâche secondaire soit visible.

$$\frac{d}{\lambda} > 1.43 \quad (25)$$

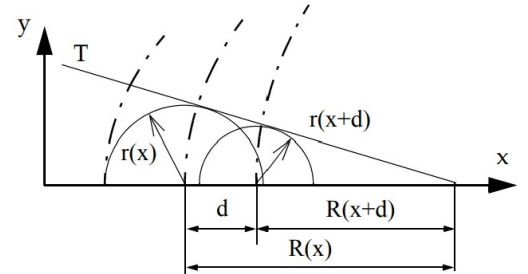
3 Rayon laser courbe

Au cours, l'expérience du rayon laser courbe a été montrée. La raison pour laquelle la lumière prend une trajectoire courbe est que le liquide dans le récipient est en réalité un mélange graduel entre de l'eau et de la glycérine. Ces deux liquides ont des indices de réfraction différents : $n_{\text{eau}} = 1.33$ et $n_{\text{gly}} = 1.44$. Ceci implique un gradient d'indice de réfraction qui est la cause de la courbature du rayon laser. On cherche à comprendre intuitivement comment un indice de réfraction variable induit un rayon laser courbe. Soit $n(x) = n_0 + \alpha x$, l'indice de réfraction du mélange eau-glycérine. On suppose que l'onde lumineuse incidente est une onde plane qui se propage selon l'axe y .

challenge

- (a) Montrer que la trajectoire du laser est un arc de cercle de rayon $R(x) = n(x)/\alpha$. Indication : à l'aide du principe de Huygens, considérer l'avancement du front d'onde du laser à différentes positions, pour en déduire la trajectoire du front d'onde global.

À $t=0$, une onde plane se trouve à l'entrée du milieu, en $y=0$. Par le principe de Huygens, chaque point de l'axe x devient source d'une onde sphérique, représentée sur la figure à l'instant Δt . Les rayons r des cercles représente la distance parcourue par l'onde pendant Δt . L'enveloppe de l'ensemble de ces demi-cercles formera le front d'onde associé au faisceau.



Au point x , le rayon d'un demi-cercle est donné par :

$$r(x) = u(x) \cdot \Delta t = \frac{c \cdot \Delta t}{n(x)} \quad (26)$$

Pour un petit déplacement d par rapport au point x , le rayon du demi-cercle est donné par :

$$r(x+d) = u(x+d) \cdot \Delta t = \frac{c \cdot \Delta t}{n(x) + \alpha d} \simeq \frac{c \cdot \Delta t}{n(x)} \left(1 - \frac{\alpha d}{n(x)} \right) \quad (27)$$

On considère la tangente aux 2 demi-cercles en x et $x+d$. Par le théorème de Thalès, on obtient que :

$$\frac{r(x+d)}{r(x)} = \frac{R(x+d)}{R(x)} \implies 1 - \frac{\alpha d}{n(x)} = \frac{R(x) - d}{R(x)} = 1 - \frac{d}{R(x)} \quad (28)$$

Finalement, en isolant $R(x)$, nous obtenons le résultat attendu :

$$R(x) = \frac{n(x)}{\alpha} \quad (29)$$

(b) Est-ce que les ondes lumineuses vont converger ou diverger dans ce milieu ?

On constate par (29) que le rayon de l'arc de cercle décrit par le faisceau lumineux augmente quand x augmente. Par conséquent, les lignes de faisceau proche de l'origine suivront rapidement une trajectoire horizontale. Le faisceau se concentrera donc sur les lignes traitillées qui convergent.