08 mars 2024

Corrigé 3 : Effet Doppler, onde de choc

1 Test des sirènes d'alarme

On désire connaître la distance jusqu'à laquelle une sirène peut être entendue. On suppose qu'une sirène émet une onde sonore sphérique. Sa puissance est notée P et émet à une fréquence notée f.

(a) Calculer l'intensité sonore, l'amplitude de déplacement des molécules d'air et l'amplitude de la variation de pression en tout point de l'espace. Calculer ces différentes valeurs (intensité, amplitude de vibration et de variation de pression) à 1km de la sirène.

L'onde sonore émise correspond à une onde sinusoïdale sphérique sortante dont l'expression générale est donnée par :

$$\xi(r,t) = \frac{A}{r}\sin(kr - \omega t) \tag{7}$$

À partir de la puissance moyenne émise par la sirène, il est possible de déduire la valeur de l'intensité. En effet, par conservation de l'énergie et symétrie, on a que l'intensité est homogène sur une surface sphérique autour de la source. Par conséquent, on a que :

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \tag{8}$$

où r est le rayon de la sphère considérée. En utilisant le résultat, l'amplitude de déplacement des molécules $\xi_0(r)$ est donnée par :

$$\xi_0(r) = \frac{A}{r} \tag{9}$$

Comme vu en cours, l'onde de vibration (ou de déplacement) est liée à une onde de pression qui est donnée par la relation suivante :

$$\Delta p(r,t) = p(r,t) - p_0 = -K\frac{\partial \xi}{\partial r} = -KA\left[\frac{k}{r}\cos(kr-\omega t) - \frac{1}{r^2}\sin(kr-\omega t)\right] \tag{10}$$

où K est le coefficient de compressibilité. À une distance suffisante, i.e $\frac{k}{r} = \frac{2\pi}{\lambda r} \gg \frac{1}{r^2}$, l'amplitude de la variation de pression est donnée par :

$$\Delta p_0(r) = K\frac{Ak}{r} \tag{11}$$

Cette expression peut aussi s'écrire en fonction des données de l'énoncé, en utilisant le fait que $u = \lambda f$ et que $u^2 = \frac{K}{\rho}$ où ρ est la densité massique de l'air. On obtient que :

$$\Delta p_0(r) = \frac{2\pi f A u \rho}{r} \tag{12}$$

Finalement, l'intensité peut être reliée à l'amplitude de déplacement $\xi_0(r)$ par la formule dérivée en cours :

$$I = \frac{1}{2}\frac{\rho\omega^2 A^2 u}{r^2} = \frac{2\pi^2 f^2 A^2 \rho u}{r^2} \tag{13}$$

En utilisant (8), on peut exprimer le terme A en fonction de la puissance et des quantités physiques connus :

$$\frac{P}{4\pi r^2} = \frac{2\pi^2 f^2 A^2 \rho u}{r^2} \Longrightarrow A = \left(\frac{P}{8\pi^3 f^2 u \rho}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

En appliquant les valeurs numériques données, la valeur trouvée de A est de $4.77{\cdot}10^{-4}$ m^2. Les résultats obtenus dans les équations (9), (11) et (13) permettent de calculer les valeurs de $I(r)$, de $\Delta p_0(r)$ et de $\xi_0(r)$ à 1 km :

$$I(r = 1 \text{ km}) = 7.96 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2 \tag{15}$$

$$\Delta p_0(r = 1 \text{ km}) = 2.66 \cdot 10^{-1} \text{ N/m}^2 \tag{16}$$

$$\xi_0(r = 1 \text{ km}) = 4.77 \cdot 10^{-7} \text{ m} \tag{17}$$

(b) On considère de plus que l'onde subit une atténuation, avec un parmètre d'atténuation de α. À quelle distance r_{max} la sirène cesse d'être perceptible (i.e. $I < I_{\text{seuil}}$) ? Donner une expression pour r_{max} et la résoudre graphiquement.

Avec l'indication, on trouve que l'intensité réelle en fonction de l'intensité sans atténuation est donné par :

$$I(r) = I_0(r)e^{-2\alpha r} \tag{19}$$

La condition pour que le son de la sirène soit toujours perceptible s'écrit $I(r) > I_{\text{seuil}}$ où I_{seuil} est la valeur de l'intensité au seuil de perceptibilité. En exprimant $I_0(r)$ à partir de (8), nous obtenons la condition suivante :

$$g(r) = \frac{P}{4\pi r^2 I_{\text{seuil}}} e^{-2\alpha r} > 1 \tag{20}$$

Comme la fonction $g(r)$ est strictement décroissante, la distance maximale se trouve en posant l'égalité dans la relation ci-dessus :

$$\frac{P}{4\pi r_{\text{max}}^2 I_{\text{seuil}}} = e^{2\alpha r_{\text{max}}} \tag{21}$$

Cette équation ne possède pas de solution analytique. On peut néanmoins obtenir numériquement une valeur de $r_{\text{max}} = 14.02$ km.

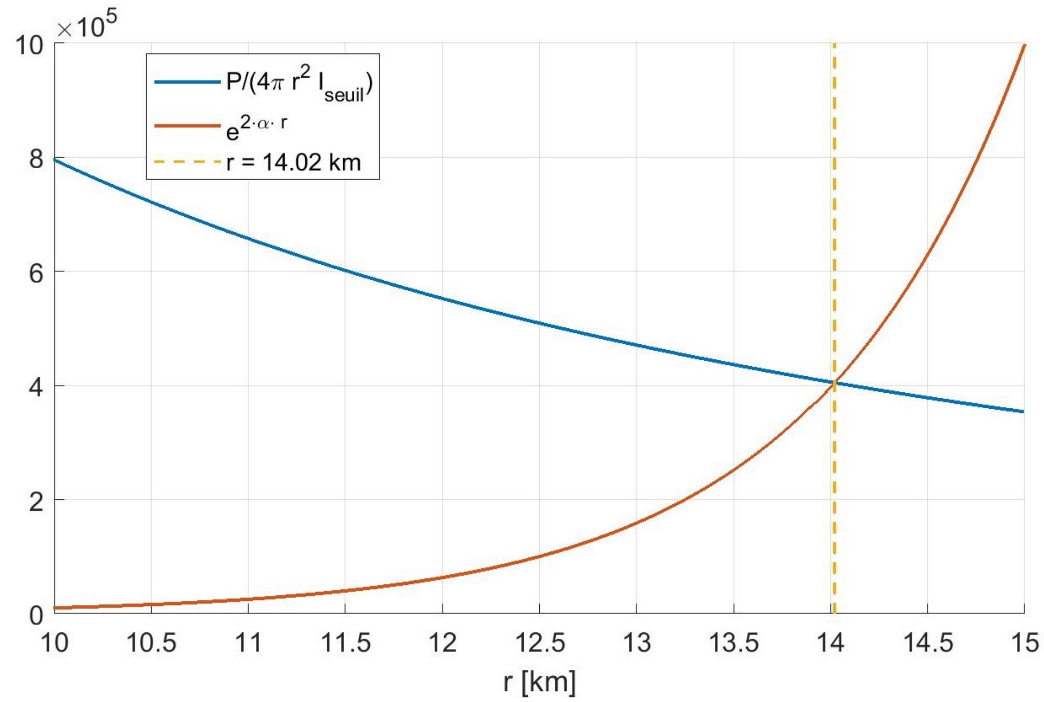
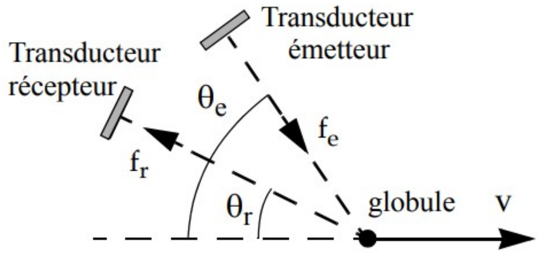


Figure 1

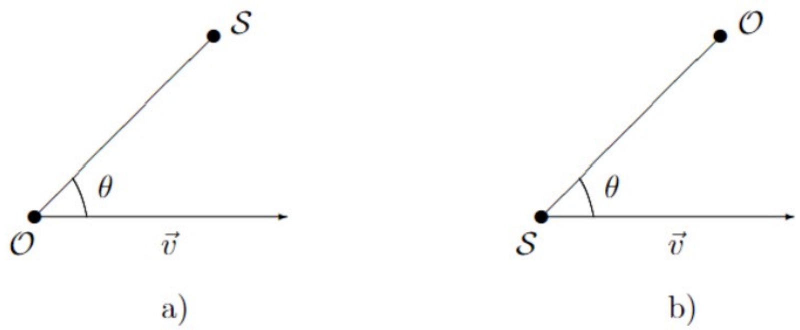
2 Échographie Doppler

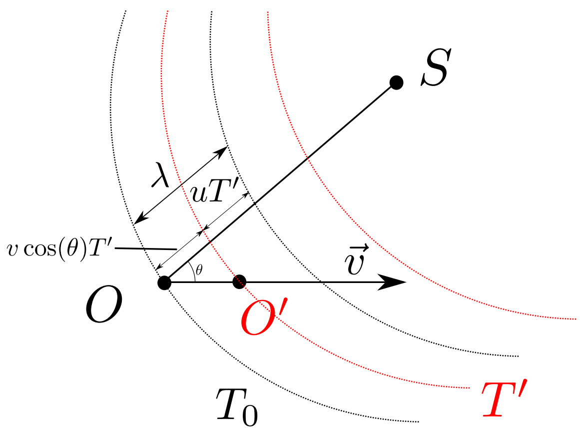
L'échographie Doppler est un examen médical très répandu et l'une des applications les plus notables de l'effet Doppler en médecine. Il permet de mesurer avec précision le débit sanguin dans les vaisseaux sanguins à l'aide d'ultrasons. Dans cet exercice, on propose de comprendre son fonctionnement. Les transducteurs sont placés comme montré ci-contre. On suppose que les angles θ_e et θ_r sont approximativement égaux, i.e $\theta_e \approx \theta_r = \theta$. On appelle u la vitesse de propagation des ultrasons dans les tissus et le sang.



Pour résoudre ce problème, il est nécessaire de généraliser la formule de l'effet Doppler vue en cours. En effet, on a considéré l'observateur et la source se déplaçant sur un même axe. On souhaite dériver la fréquence perçue par l'observateur où la source ne se déplace pas dans l'axe observateur-source.

(a) Dériver l'expression de la fréquence perçue par un observateur en mouvement par rapport source immobile. L'angle entre le vecteur vitesse de l'écoulement sanguin $\vec{v}$ et la direction où se trouve la source est noté θ (voir Figure a)). On considère que $v \ll u$ où v est la vitesse de l'observateur.





L'expression de la fréquence perçue peut être obtenue en adoptant une approche intuitive. À l'instant $t = 0$, on suppose qu'un front d'onde atteint l'observateur. Afin de déterminer la fréquence perçue par l'observateur, il faut déterminer l'intervalle de temps T' pour que le front d'onde suivant atteigne l'observateur en tenant compte du déplacement de celui-ci. Sur la figure, les front d'ondes sont représentés au temps initial $T_0 = 0$ en noir et au temps T' en rouge. On remarque que, par des considérations géométriques, T' est lié aux autres quantités par la relation suivante :

$$\lambda - u \cdot T' = \cos\theta \cdot v \cdot T' \tag{22}$$

En utilisant le fait que $f' = \frac{1}{T'}$ et $\lambda = \frac{u}{f}$, (22) peut être ré-exprimer afin d'obtenir la fréquence perçue par l'observateur :

$$f' = f\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta\right) \tag{23}$$

(b) Répéter ce raisonnement pour le cas d'une source en mouvement et d'un observateur immobile (voir Figure b).)

On adopte une approche similaire au point a). À l'instant $t = 0$, la source émet un front d'onde en direction de l'observateur. Après une période T, la source émet un deuxième front d'onde. On cherche donc à évaluer la distance entre les deux fronts d'onde, correspondant à la valeur de la longueur d'onde perçue par l'observateur. Par des considérations géométriques présentées sur la figure ci-dessous, on obtient une expression pour la longueur d'onde de l'onde perçue par l'observateur :

$$\lambda' = \lambda - \cos\theta \cdot v \cdot T \tag{24}$$

Similairement au point précédent, en utilisant le fait que $T = \frac{1}{f}$, $\lambda = \frac{u}{f}$ et $\lambda' = \frac{u}{f'}$. En réécrivant (24), on obtient donc l'expression finale pour la fréquence perçue par l'observateur quand la source est en mouvement.

$$f' = \frac{f}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} \tag{25}$$

(c) Appliquer ces résultats afin de dériver la fréquence perçue par le transducteur récepteur en fonction de la fréquence émise par le transducteur émetteur. En déduire une expression pour la vitesse des globules rouges en fonction de la fréquence Doppler, $f_D = |f_r - f_e|$.

En utilisant (23), la fréquence perçue par les globules rouges f_g peut être écrite :

$$f_g = \left(1 - \frac{v}{u}\cos\theta\right) f_e \tag{26}$$

On suppose que l'onde réfléchie par le globule rouge a une fréquence égale à celle perçue par celui-ci provenant de l'onde émise. Par conséquent, on peut calculer la fréquence reçue par le transducteur récepteur à partir de la fréquence f_g en utilisant (25) :

$$f_r = \frac{f_g}{1 + \frac{v}{u}\cos\theta} \approx f_g(1 - \frac{v}{u}\cos\theta + \mathcal{O}(\left(\frac{v}{u}\right)^2)) \tag{27}$$

En combinant (23) et (25), on en déduit une relation entre f_e et f_r.

$$f_r = f_e\left(1 - \frac{v}{u}\cos\theta\right)\left(1 - \frac{v}{u}\cos\theta + \mathcal{O}(\left(\frac{v}{u}\right)^2)\right) = f_e(1 - 2\frac{v}{u}\cos\theta + \mathcal{O}(\left(\frac{v}{u}\right)^2)) \tag{28}$$

Cette dernière expression permet d'exprimer v en fonction de f_D, f_e et θ :

$$v = -\frac{(f_r - f_e) \cdot u}{2\cos\theta f_e} = \frac{f_D u}{2\cos\theta f_e} \tag{29}$$

(d) Calculer numériquement la vitesse des globules rouges

En appliquant (29), on obtient la valeur suivante pour la vitesse :

$$v = \frac{1200 \cdot 1500}{2\cos(60°) \cdot (8 \cdot 10^6)} = 0.225 \text{ m/s} \tag{30}$$

Jusqu'à présent, l'atténuation des tissus a été négligée. Toutefois, afin d'éviter un échauffement trop important des tissus, l'intensité de l'onde émise est limitée à une valeur $I_{\max}$. L'atténuation des tissus humains est importante et est dénotée α. On considère que l'artère mesurée se trouve à une profondeur P de l'épiderme.

(e) Calculer l'intensité de l'onde reçue par le transducteur. En déduire également son amplitude. Application numérique : P = 5 cm, α = 57.5 m^{-1}, Densité des tissus : $\rho = 10^3$ kg/m^3, $I_{\max}$ = 0.01 W/m^2

On rappelle la relation pour l'intensité réelle I :

$$I = I_0 e^{-2\alpha r} \tag{31}$$

où I_0 est l'intensité initiale et r est la distance parcourue au sein du milieu absorbant. Cette même distance parcourue, notée d, peut être calculée par :

$$d = 2 \cdot \frac{P}{\sin\theta} \tag{32}$$

Par simplicité, on suppose que l'onde réfléchie par le globule rouge est de même intensité que l'onde reçue par celui-ci. Par conséquent, l'intensité réelle perçue par le transducteur récepteur I en fonction de l'intensité de l'onde émise par le transducteur émetteur est donnée par :

$$I = I_0 e^{-2\alpha d} = I_0 e^{-2\alpha \frac{2P}{\sin\theta}} \tag{33}$$

En appliquant les valeurs numériques données et en considérant l'onde émise comme étant d'intensité maximale, la valeure trouvée pour I est de $1.71 \cdot 10^{-7}$ W/m^2. Pour trouver la valeur de l'amplitude de l'onde reçue, il est possible d'utiliser la formule de l'intensité pour une onde sinusoïdale :

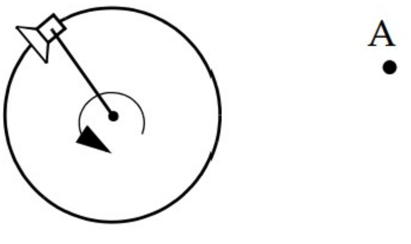
$$I = \frac{1}{2}\rho \cdot u \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2 \tag{34}$$

On trouve alors

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{2I}{\rho u \omega^2}} \tag{35}$$

Numériquement, $\xi_0 = 2.4 \cdot 10^{-7}$ μm.

3 Haut-Parleur tournant



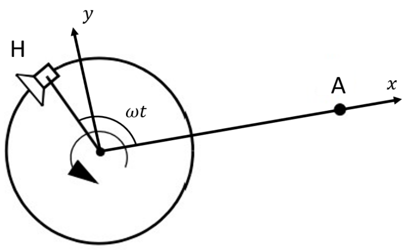
Un haut-parleur est fixé à l'extrémité d'un bras de longueur R tournant à vitesse angulaire ω. Il émet une onde de fréquence f.

(a) Déterminer la fréquence perçue par un observateur A immobile, situé à distance d de l'axe du bras, en fonction de f, d, R, ω et du temps

La fréquence perçue par l'observateur immobile est sujette à l'effet Doppler, exprimée comme :

$$f' = \frac{1}{1 - \frac{v}{c}\cos\alpha} \tag{36}$$

avec v la vitesse de la source, exprimée positivement lorsque orientée vers de la source à l'observateur, et α est l'angle entre le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ de la source et le vecteur $\mathbf{AH}$.



La vitesse de la source peut être exprimée en fonction de ω et R : $\vec{v} = R\omega\hat{e}_\theta$. Par conséquent, il suffit de déterminer l'expression de $\cos\alpha$. Les vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{AH}$ peuvent être exprimés en fonction du temps t :

$$\mathbf{v} = R\omega \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix} \qquad \mathbf{AH} = R\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\omega t - d \\ R\sin\omega t \end{pmatrix} \tag{37}$$

L'expression de $\cos\alpha$ peut être déduite en utilisant le produit scalaire :

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{AH}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{AH}\|} = \frac{1}{R\omega\|\mathbf{AH}\|}\begin{pmatrix} R\cos\omega t - d \\ R\sin\omega t \end{pmatrix}\cdot R\omega\begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix} = \frac{d\sin\omega t}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\omega t}} \tag{38}$$

Par conséquent, on obtient une expression générale pour f' en fonction des quantités f, ω, R, d et u

$$f'(t) = f\frac{u\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\omega t}}{u\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\omega t} - R\omega d\sin\omega t} = f\frac{1}{1-\frac{R\omega d\sin\omega t}{u\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\omega t}}} \tag{39}$$

(b) Déterminer les fréquences minimale et maximale perçues par l'observateur A et les calculer numériquement.

À partir de l'expression trouvée en (39), les fréquence maximale et minimale perçue en point A peuvent être déduites en étudiant la fonction suivante :

$$g(t) = \frac{R\omega d}{u}\frac{\sin\omega t}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\omega t}} \tag{40}$$

En prenant sa dérivée, nous obtenons :

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{R\omega d}{u}\cdot\frac{\omega\cos\omega t\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\omega t} - \frac{Rd\omega\sin^2\omega t}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\omega t}}}{R^2+d^2-2Rd\cos\omega t} \tag{41}$$

En développant le numérateur et en cherchant les zéros de $dg(t)/dt$, on trouve les racines de $\cos(\omega t)$:

$$\cos(\omega t) = \frac{R^2+d^2\pm\sqrt{(R^2+d^2)^2-4R^2d^2}}{2Rd}.$$

Soit :

$$\cos\omega t = \frac{R}{d} \tag{42}$$

$$\cos\omega t = \frac{d}{R} > 1 \tag{43}$$

Seul (42) admet des solutions tel que $g_{\max} = \frac{R\omega}{u}$ et $g_{\min} = -\frac{R\omega}{u}$, ce qui permet de trouver les fréquences minimale et maximale perçue par l'observateur en A :

$$f_{\min} = f\frac{u}{u+R\omega} \qquad\qquad f_{\max} = f\frac{u}{u-R\omega} \tag{44}$$

Les calculs numériques donnent $f_{\min} = 474$ Hz et $f_{\max} = 529$ Hz.

Applications numériques : f = 500 Hz, R = 1m, d = 3m, $\omega = \frac{2\pi}{3}$ rad/s

(c) Quelle(s) fréquence(s) sont perçues par l'observateur A s'il se trouve au centre du cercle ?

Dans le cas où le point A se trouve au centre, l'expression de $\mathbf{AH}$ est donnée par :

$$\mathbf{AH} = R\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} \tag{45}$$

On remarque que $\mathbf{AH}\cdot\mathbf{v} = 0$ pour tout t. Par conséquent, la fréquence perçue f' est en réalité la fréquence émise par le haut-parleur car la composante parallèle à $\mathbf{AH}$ de $\mathbf{v}$ est toujours nulle.

4 Avion supersonique

Un avion supersonique vole à Mach 3 ($v_{\text{avion}} = 3u_{\text{son}}$) à une altitude A. Un observateur au sol déclenche son chronomètre lorsque l'avion passe au-dessus de sa tête.

(a) Calculer l'instant τ où l'onde de choc sera perçue par l'observateur et la distance parcourue par l'avion pendant ce temps.

L'angle d'ouverture α du cône de Mach est donné par

$$\sin\alpha = \frac{u_{\text{son}}}{v_{\text{avion}}} = \frac{1}{3} \tag{46}$$

Un calcul numérique donne $\alpha \simeq 19.5°$. La distance x à laquelle se trouve l'avion peut être dérivée comme suit

$$x = \frac{A}{\tan\alpha} \simeq 56.6\text{km} \tag{47}$$

Le temps τ est donné par :

$$x = v_{\text{avion}}\tau \Longrightarrow \tau = \frac{x}{v_{\text{avion}}} \simeq 54.2 \text{ s} \tag{48}$$

(b) On considère à présent qu'il y a du vent qui souffle dans la même direction que l'avion. Le vent est constant à toute altitude. Dériver de nouveau l'instant τ ainsi que la distance parcourue par l'avion pendant ce temps.

Applications numériques : A = 20 km, $u_{son} = 348$ m/s, v_{vent} = 14 m/s

Dans le cas où il y a du vent qui souffle dans la même direction que l'avion, il faut tenir compte que l'angle d'ouverture α n'est valable que lorsque le milieu est au repos dans le référentiel considéré. On appelle $\mathcal{R}$ le référentiel de l'observateur et $\mathcal{R}'$ le référentiel de l'air, qui est en mouvement par rapport au référentiel au repos. Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, la vitesse de l'avion est donné par :

$$v'_{\text{avion}} = v_{\text{avion}} - v_{\text{vent}} \tag{49}$$

L'angle d'ouverture α du cône de Mach dans le référentiel de l'air est donné par la formule vue en cours :

$$\sin\alpha' = \frac{u}{v'_{\text{avion}}} \tag{50}$$

Toutefois, il faut tenir compte du fait que le vecteur vitesse du front d'onde dans le référentiel $\mathcal{R}'$ n'est pas le même que dans le référentiel $\mathcal{R}$. En effet, la vitesse du front d'onde $\mathbf{v}$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ est donnée par :

$$\mathcal{R}' : \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u\sin\alpha' \\ u\cos\alpha' \end{pmatrix} \implies \mathcal{R} : \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u\sin\alpha' + v_{\text{vent}} \\ u\cos\alpha' \end{pmatrix} \tag{51}$$

en utilisant la transformation de Galilée inverse. Par conséquent, l'angle d'ouverture α du cône de Mach dans le référentiel $\mathcal{R}$ peut être dérivée comme suit

$$\tan\alpha = \frac{u\sin\alpha' + v_{\text{vent}}}{u\cos\alpha'} \Longrightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{u\sin\alpha' + v_{\text{vent}}}{u\cos\alpha'}\right) \simeq 21.6^\circ \qquad (52)$$

En utilisant (47) et (48), on en déduit que x $\simeq$ 50.5 km et $\tau \simeq$ 48.4 s. Ces deux résultats sont donc légèrement différents des résultats trouvés au point a). La vitesse du vent ne peut donc pas être négligée.