

Semaine 8

18 et 19 avril 2024

2.1.4 Énergie d'une onde EM

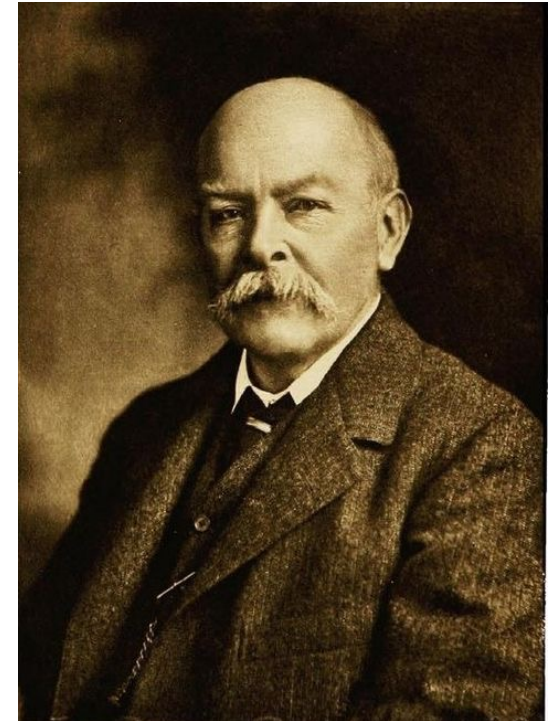
2.1.5 Quantité de mouvement d'une onde EM

2.1.6 Génération des ondes EM

2.1.6.1 Les potentiels retardés

2.1.6.2 Oscillateur de Hertz

Serie 7

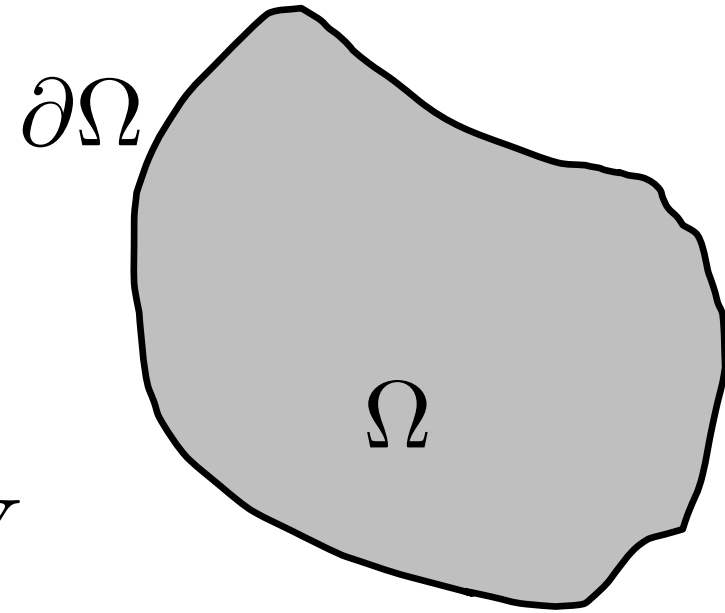


John Henry Poynting
(1852 - 1914)

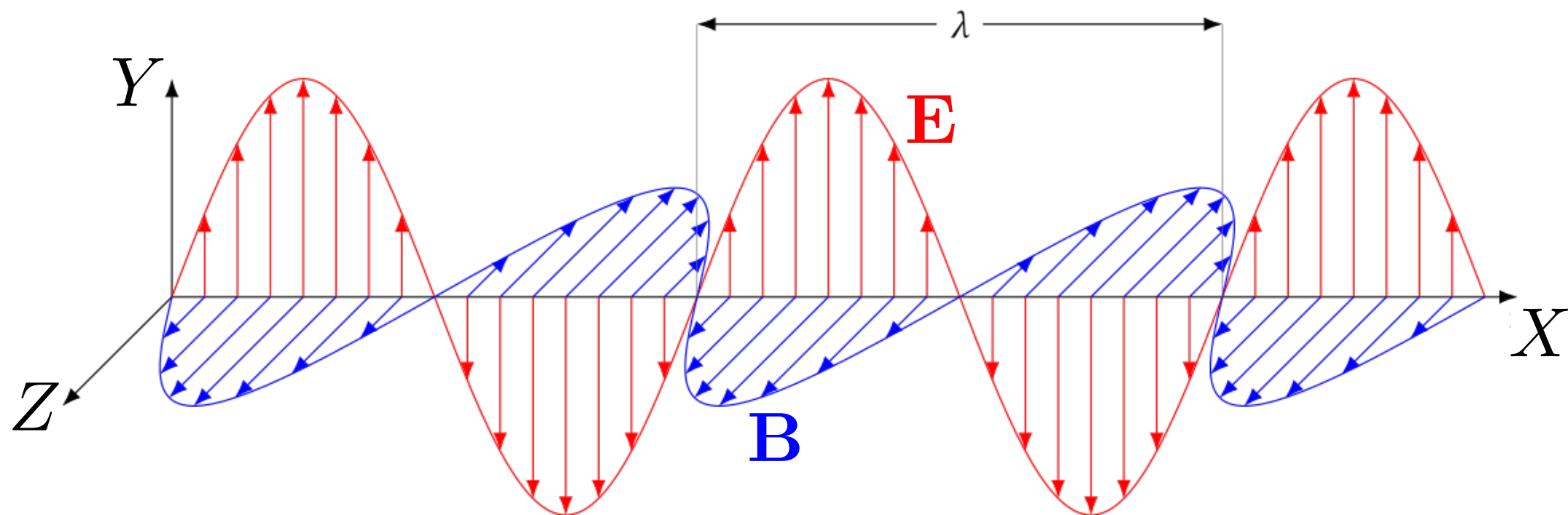
2.1.4 Énergie d'une onde EM

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} w dV = - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dA - \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV$$



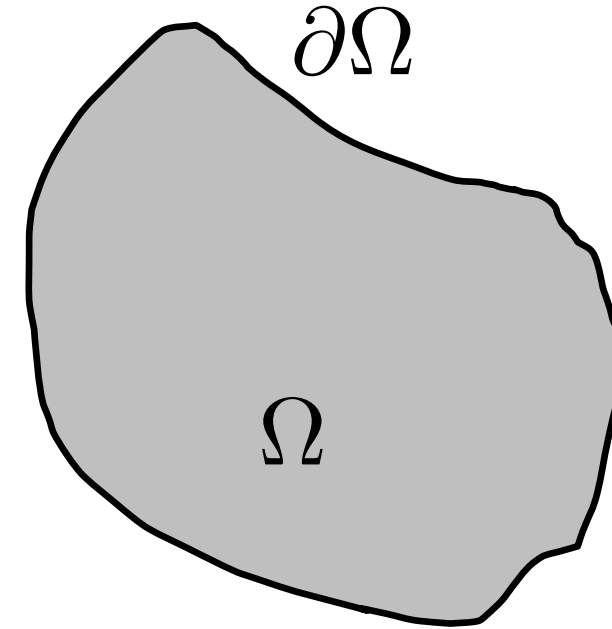
Vecteur de Poynting : $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$



2.1.4 Quantité de mouvement d'une onde EM

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \int_{\Omega} (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV = -\frac{d\mathbf{G}}{dt} + \int_{\partial\Omega} \sum_{\alpha,\beta} T_{\alpha,\beta} n_{\beta} \mathbf{u}_{\alpha} dA$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} \mathbf{g} dV, \quad \mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad \text{densité de la quantité de mouvement de champ E.M.}$$



$$T_{\alpha\beta} = E_{\alpha} D_{\beta} + H_{\alpha} B_{\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} (E_{\gamma} D_{\gamma} + H_{\gamma} B_{\gamma}) \quad \text{tenseur des contraintes de Maxwell}$$

Système isolé: $\frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{d\mathbf{G}}{dt} = 0$

Potentiel vecteur et scalaire

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\mathbf{E} = - \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\text{Condition de Lorentz:} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Potentiel vecteur et scalaire

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\mathbf{E} = - \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\text{Condition de Lorentz:} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

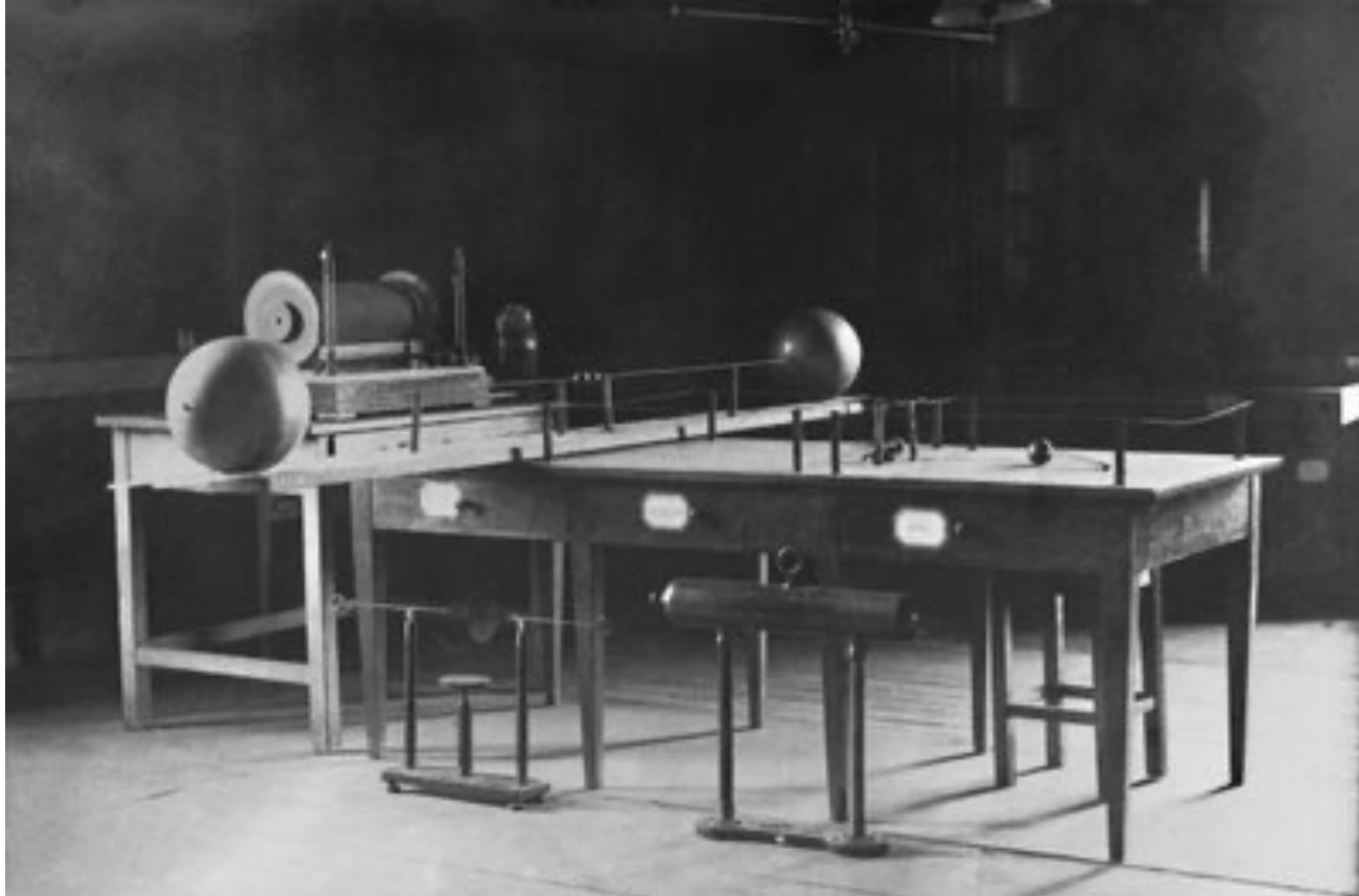
2.1.6.1 Les potentiels retardés

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} d\Omega$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} d\Omega$$

$$R = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$$

2.1.6.2 Oscillateur de Hertz



(ρ, θ, φ) : Scalar function F ; Vector field $\mathbf{f} = f_\rho \mathbf{e}_\rho + f_\theta \mathbf{e}_\theta + f_\varphi \mathbf{e}_\varphi$

- gradient : $\nabla F = \frac{\partial F}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial F}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$
- divergence : $\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 f_\rho) + \frac{1}{\rho} \sin \varphi \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi f_\varphi)$
- curl : $\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{\rho \sin \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi f_\theta) - \frac{\partial f_\varphi}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\varphi) - \frac{\partial f_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial f_\rho}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\theta) \right) \mathbf{e}_\varphi$
- Laplacian : $\Delta F = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)$

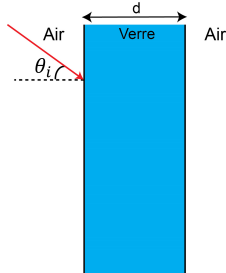
Série 7

19 avril 2024

Série 7 : Interférences et diffraction

1 Interferométrie de Fabry-Perot

Un interféromètre de Fabry-Perot est un instrument optique composé de 2 miroirs semi-réfléchissants. Il permet de laisser passer uniquement les longueurs d'onde de la lumière incidente qui sont en résonance avec la cavité optique formée par les 2 miroirs. Dans cet exercice, on se propose d'étudier la figure d'interférences de cet interféromètre et déduire certaines de ces propriétés. Pour simplifier l'analyse, on considère une onde chromatique incidente sur une lame de verre de largeur d et d'indice de réfraction n avec un angle incident θ_i par rapport à la normale. Le premier rayon incident est réfracté avec un angle θ_r .



- Expliquer avec un diagramme comment se comporte le rayon lumineux incident dans la lame de verre, puis en sortie de l'autre côté de la lame de verre. Pour deux rayons successifs en sortie, calculer la différence de marche delta et en déduire la différence de phase $\Delta\phi$ entre deux rayons réfractés par les 2 miroirs en fonction de θ_r .
- On suppose que le coefficient de réflexion à l'interface verre-air est égal à $R < 1$. Calculer l'amplitude $s_n(\Delta\phi)$ de chaque refraction en sortie de l'interféromètre. En déduire l'intensité totale s_{tot} .
- Montrer que la transmittance est donnée par l'expression :

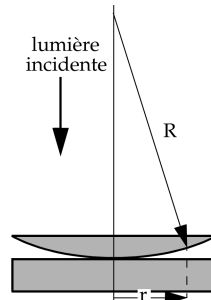
$$T(\theta_r) = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\Delta\phi(\theta_r)}{2}}$$

- Donner les conditions pour avoir un maximum la transmittance et dessiner la transmittance pour un angle θ_r fixe en fonction de $\Delta\phi$ puis de λ . Que remarque-t-on ? En déduire une application de l'interféromètre de Fabry-Perot.

2 Anneaux de Newton

Une lentille optique plan-convexe, posée sur une plaque de verre, est illuminée par une onde monochromatique. On suppose que l'épaisseur d de la couche d'air sous la lentille est négligeable par rapport au rayon R , i.e $d \ll R \forall r$.

- En utilisant l'approximation citée ci-dessus, déterminer l'épaisseur $d(r)$ de la couche d'air sous la lentille. Sous cette hypothèse, la surface de la lentille peut être approximée comme parallèle à la plaque de verre. Décrire le comportement d'un faisceau incident réfléchi aux différents interfaces.



- Montrer qu'un observateur placé au-dessus de la lentille observe des interférences qui se manifestent par des anneaux concentriques alternativement sombres et clairs appelés *Anneaux de Newton*. Déterminer le rayon r_m du m -ième anneau sombre ainsi que la loi décrivant l'augmentation du rayon entre deux anneaux sombres consécutifs.

- Quelle est l'aire séparant deux anneaux sombres ; dépend-elle de m ?
- Déterminer la loi décrivant le rayon r'_m de la même interférence constructive.

Indication : Lors de la propagation de la lumière d'un milieu 1 à un milieu 2 sous incidence normale, le champ électromagnétique transmis n'est pas déphasé et le champ électromagnétique réfléchi subit un déphasage de 180° si $n_1 < n_2$ et de 0° si $n_1 > n_2$.

3 Pression de radiation

Dans cet exercice, on s'intéresse à dériver l'expression de la pression de radiation par 2 approches différentes.

On considère une onde électromagnétique plane progressive se propageant dans le vide et incidente sur une surface plane en $x = 0$.

$$\vec{E}_i = Re \left(E_{0,i} e^{i(kx - \omega t)} \vec{e}_y \right) = E_{0,i} \cos(kx - \omega t) \vec{e}_y$$

En $x = 0$, on suppose que la surface plane correspond à un miroir métallique, parfaitement conducteur. Les conditions aux bords imposent que, en $x = 0$, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls. Ceci implique donc une onde électromagnétique réfléchie

$$\vec{E}_r = Re \left(E_{0,r} e^{i(kx + \omega t)} \vec{e}_y \right) = E_{0,r} \cos(kx + \omega t) \vec{e}_y$$

- Déterminer l'amplitude $E_{0,r}$ en fonction de $E_{0,i}$. Donner une expression pour les champs électrique et magnétique $\vec{E}$ et $\vec{B}$ résultants pour $x < 0$. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\langle \vec{S} \rangle$, ainsi que la densité volumique d'énergie moyenne de l'onde électromagnétique.
- Déterminer la charge surfacique σ et le courant surfacique $\vec{J}_s$ en $x = 0$

Indication Les conditions de bord à l'interface entre 2 milieux s'écrivent :

$$\begin{aligned} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)_\perp &= \sigma & (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)_\parallel &= 0 \\ (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)_\perp &= 0 & (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)_\parallel \cdot (\vec{t} \times \vec{n}) &= \vec{J}_s \cdot \vec{t} \end{aligned}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface, en direction du matériau 2, et $\vec{t}$ un vecteur tangent à la surface

- L'expression de la force résultante est donnée par :

$$d\vec{F} = \frac{1}{2} \sigma \vec{E} + \vec{J}_s \times \vec{B} dS,$$

où dS est un petit élément de surface. Donner une explication pour le terme $1/2$. En déduire que l'onde exerce une pression P sur le miroir dont on calculera la valeur moyenne $\langle P \rangle$ en fonction de la densité volumique moyenne d'énergie $\langle u_v \rangle$ de l'onde incidente, puis de la densité volumique moyenne d'énergie $\langle u_{v,tot} \rangle$ de l'onde totale

Dans un second temps, l'expression de la pression de radiation peut être également dérivée en considérant la nature corpusculaire de la lumière. Pour la suite de l'exercice

- En utilisant la relation $E = c|\vec{p}| = hf$, déterminer l'expression de la pression de radiation produite en fonction de P et de la distance r de la surface considérée par rapport à la source.
- Déterminer le rayon limite R_{lim} d'une sphère métallique pour lequel celle-ci pourrait être éjectée du système solaire, en tenant compte de la pression de radiation. On suppose que le soleil émet un rayonnement avec une pression de radiation P . La section efficace de la sphère est donnée par πR^2 .

