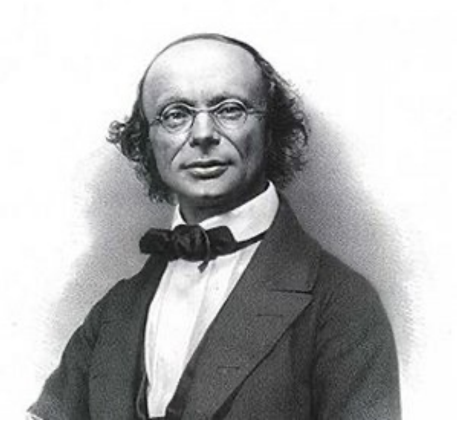
Physique Avancée IV — Semestre de printemps 2024

Semaine 5

21 et 22 mars 2024

Ernst Heinrich Weber
(1795–1878)

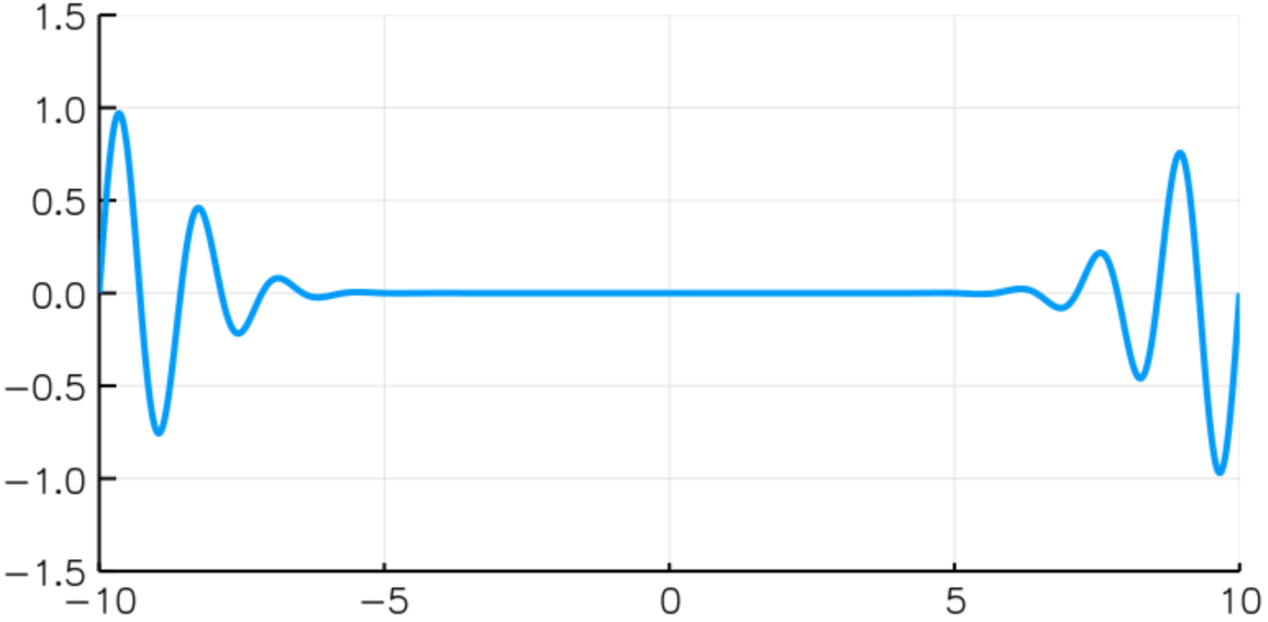


Wilhelm Eduard Weber
(1804-1891)

- 1.3.4 Pulse, vitesse de phase et vitesse de groupe
- 1.3.5 Ondes stationnaires
  - 1.3.5.1 Exemple: onde sur corde
  - 1.3.5.2 Formulation générale d'un mouvement harmonique stationnaire
- 1.4 Interaction ondes-milieu de propagation
  - 1.4.1 Réflexion et réfraction
    - 1.4.1.1 Réflexion et réfraction à la jonction de deux cordes différentes
    - 1.4.1.2 Ondes planes

Série 5

1.3.4 Pulse, vitesse de phase et vitesse de groupe



$$u_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}$$

1.3.3.2 Solution générale

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$ avec $$\xi(x,0) = a(x), \left.\frac{\partial \xi}{\partial t}\right|_{t=0} = b(x)$$

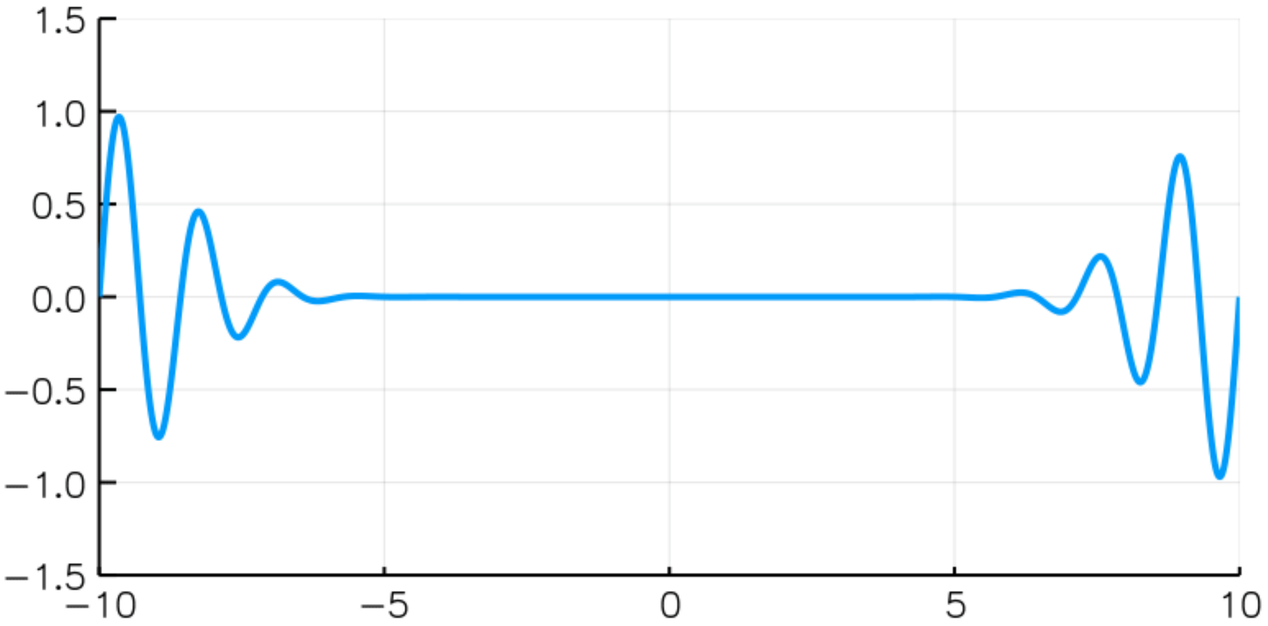
Solution :

$$\xi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int C(k) \exp[i(kx - \omega t)] dk$$

avec $C(k) = \begin{cases} [A(k) - iB(k)]/2 & \text{si} \quad k > 0 \\ [A(k) + iB(k)]/2 & \text{si} \quad k < 0 \end{cases}$

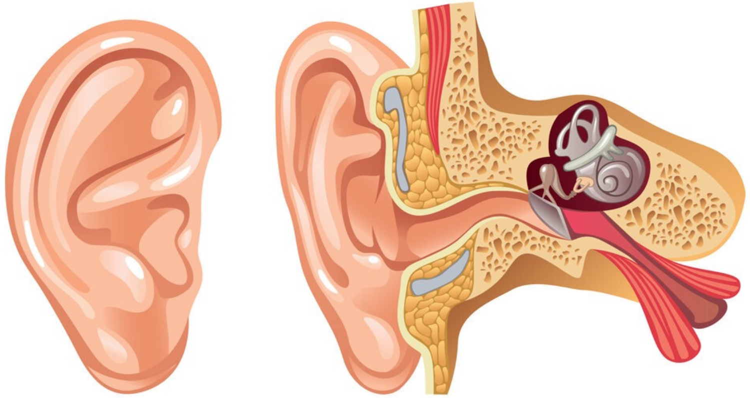
et $A(k) = \mathcal{F}_k(a(x))$, $\omega B(k) = \mathcal{F}_k(b(x))$

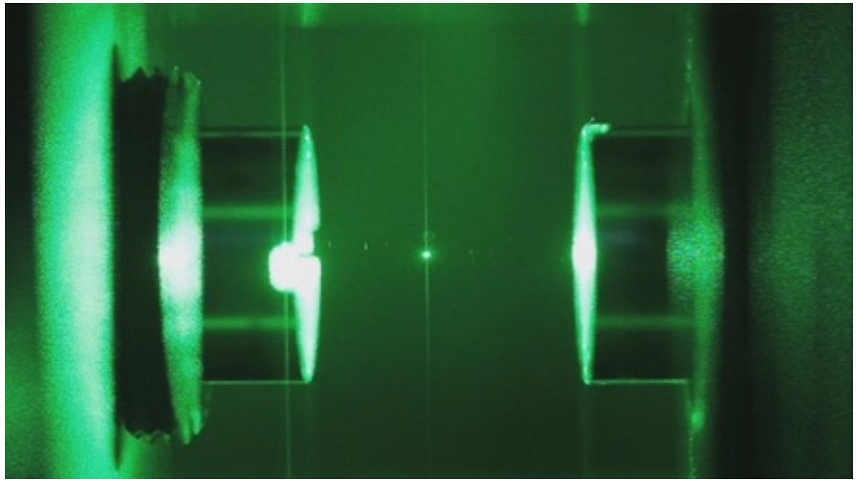
1.3.4 Pulse, vitesse de phase et vitesse de groupe



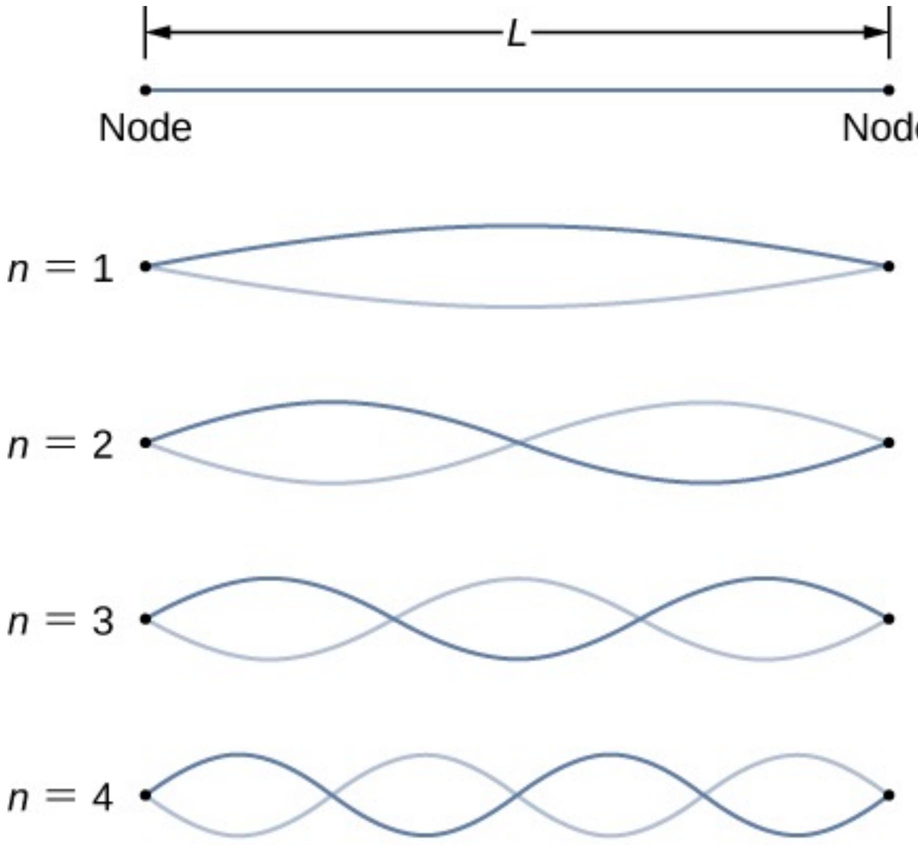
$$u_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}$$

1.3.5 Ondes stationnaires





1.3.5.1 Ondes sur corde



$$\frac{1}{2}\lambda_1 = L \qquad \lambda_1 = \frac{2}{1}L$$

$$\lambda_2 = L \qquad \lambda_2 = \frac{2}{2}L$$

$$\frac{3}{2}\lambda_3 = L \qquad \lambda_3 = \frac{2}{3}L$$

$$\frac{4}{2}\lambda_4 = L \qquad \lambda_4 = \frac{2}{4}L$$

$$\lambda_n = \frac{2}{n}L \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

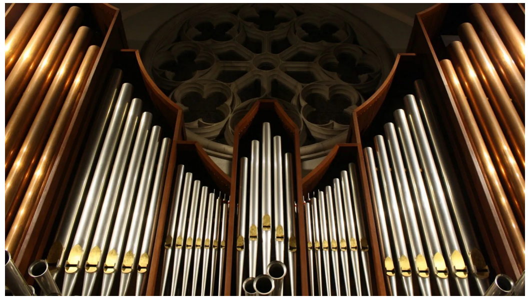
1.3.5.2 Formulation générale d'un mouvement harmonique

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Ondes stationnaires: $\xi = f(x)\sin(\omega t)$

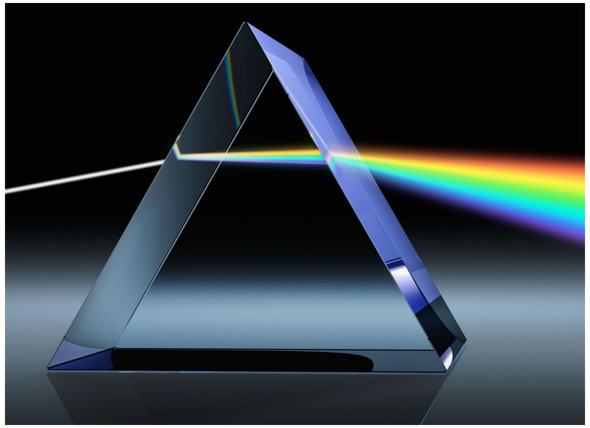
$$\longrightarrow \quad f(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$$

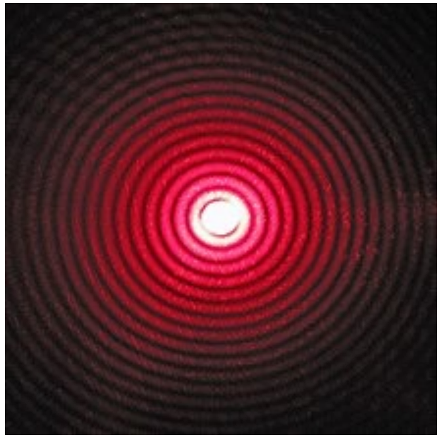
$$B = 0 \qquad kL = n\pi$$



$$A = 0 \qquad kL = n\pi$$

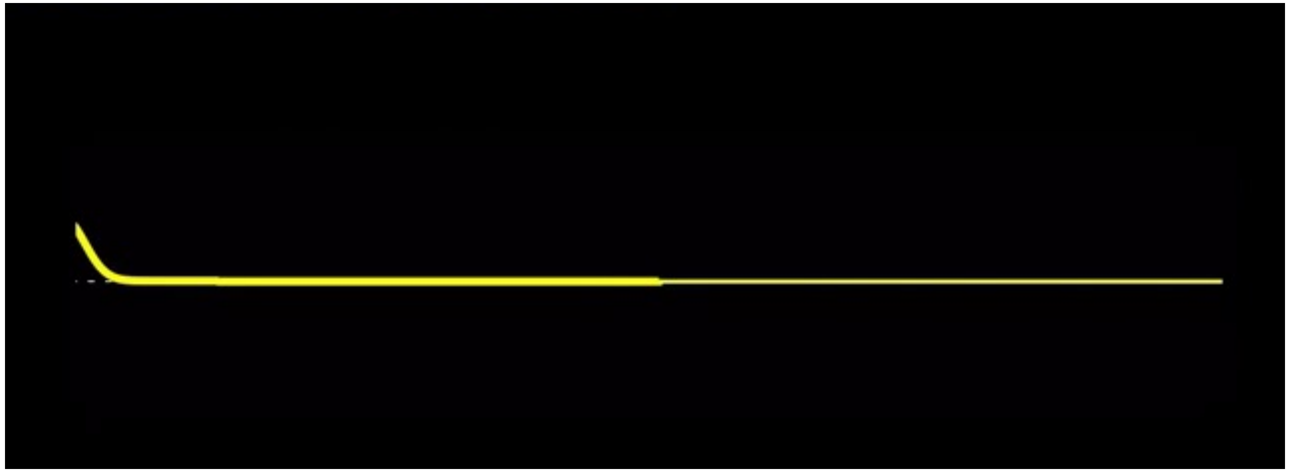
1.4 Interaction ondes-milieu de propagation





- Réflexion et réfraction
- Diffraction
- Diffusion

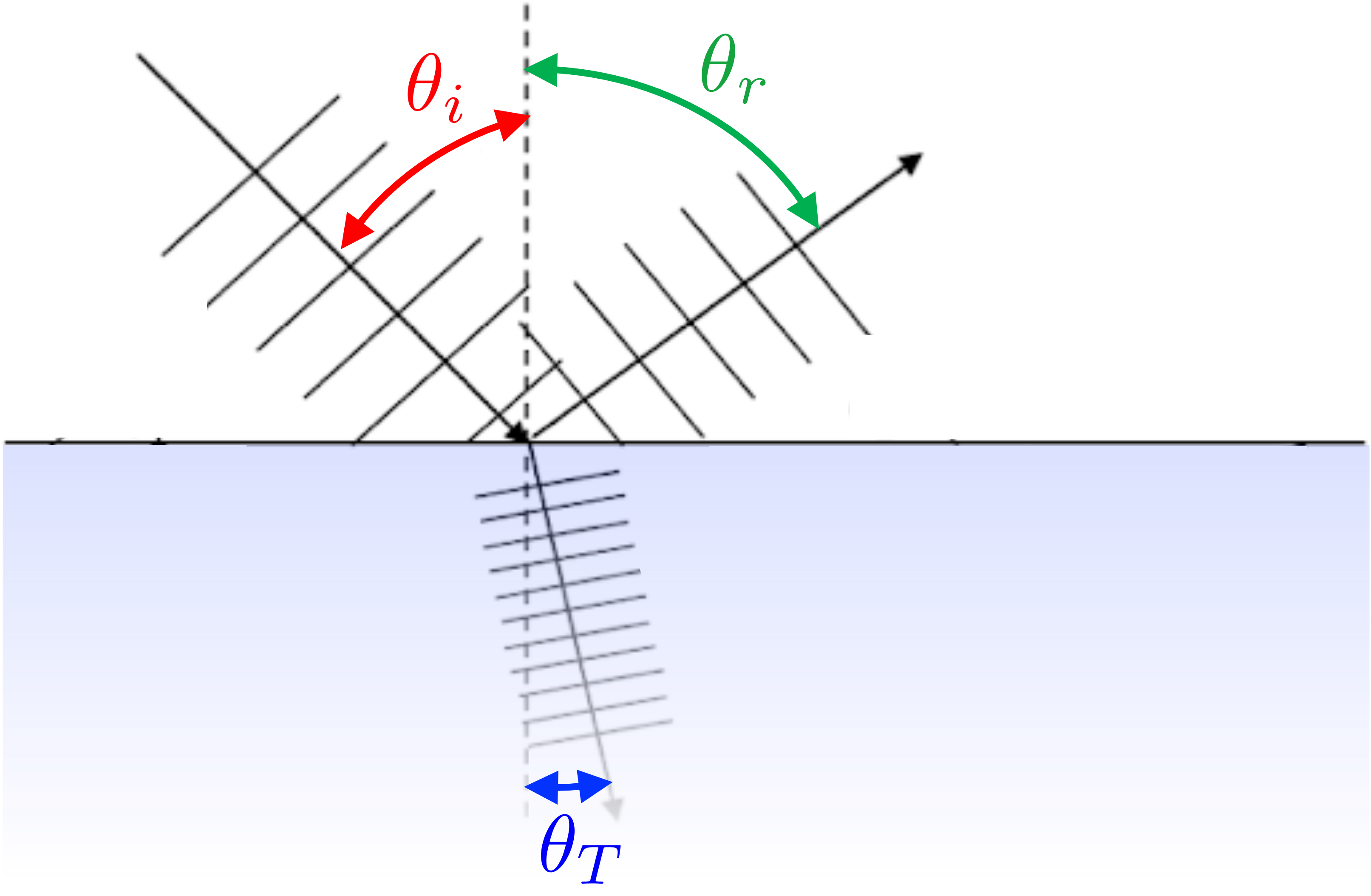
1.4.1.1 Réflexion et réfraction à la jonction de deux cordes



$$T = \frac{\xi_{0T}}{\xi_{0i}} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

$$S = \frac{\xi_{0r}}{\xi_{0i}} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

1.4.1.1 Ondes planes



$$\theta_i = \theta_r$$

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_T} = n_{21}$$

Série 5

Cours de physique IV – Prof. Paolo Ricci – SPC

22 mars 2024

Série 5 : Ondes stationnaires

1 Ondes stationnaires dans une colonne d'eau

Un long cylindre vertical de rayon R et de longueur L, ouvert à son extrémité supérieure, est rempli d'eau au moyen d'une pompe de débit Q fixée à la base du cylindre. Un diapason, dont la fréquence propre est ν, est placé au sommet du cylindre. Dans un premier temps, on suppose que l'eau est un milieu opaque (il ne permet pas la transmission de l'onde sonore).

(a) Déterminer les fréquences de résonance en fonction de la hauteur H de la colonne d'air. On note u_{air} la vitesse de propagation de l'onde sonore dans l'air.

(b) Lorsque le niveau monte, déterminer le temps Δt séparant deux situation où le cylindre entre en résonance avec le diapason.

Dans un second temps, on ne considère plus l'eau comme étant une milieu opaque et on indique par H la distance fixe entre le fond du cylindre et le niveau de l'eau. On considère une onde progressive incidente sinusoïdale d'amplitude ξ_i^0 et de fréquence ω. À l'interface entre l'eau et l'air, l'onde incidente se décompose en une onde réfléchie, se propageant dans l'air, et une onde transmise dans l'eau.

(c) En posant les conditions de continuité de l'amplitude du déplacement et de la pression à l'interface, dériver les amplitudes ξ_r^0 et ξ_t^0 des ondes transmises et réfléchies en fonction de l'amplitude ξ_i^0. On note κ_{air} et κ_{eau} les coefficients de compressibilités des milieux respectifs.

Finalement, on s'intéresse à la possibilité d'observer des ondes stationnaires qui se développent dans l'eau et l'air. On supposera donc que la partie temporelle des solutions d'onde pour chacun des milieux est la même

(d) Déterminer les conditions nécessaires pour qu'une onde stationnaire soit présente dans les 2 milieux en fonction des nombres d'onde k_{air}, k_{eau}, de la fréquence ω, de H ainsi que L.

Applications numériques : $R = 4$ cm, $Q = 18$ cm^3/s, $\nu =$200 Hz, $u_{\text{air}} = 344\,\mathrm{m}/s$

2 Timbre d'un instrument à cordes

Dans cet exercice, on propose d'étudier les vibrations d'une corde de longueur L dans les cas où elle est initialement pincée ou frottée. On considère la corde sujette à une tension T et de masse linéique μ. La corde est fixe à chacune de ses extrémités.

Pour commencer, on considère une corde pincée. On suppose que la corde est initialement de forme triangulaire, avec le sommet à l'endroit où la corde est pincée. À l'endroit où la corde est pincée, celle-ci est déplacée de A par rapport à la position au repos de la corde.

(a) Dériver l'évolution temporelle de la corde lorsque celle-ci est initialement pincée au milieu. Quelle est l'intensité de chaque harmonique ?

(b) Refaire le point a) en considérant la corde pincée au $1/3$ de la longueur de la corde.

On aimerait également étudier le cas d'une corde frappée plutôt que pincée, comme pour un piano par exemple. Initialement, la corde est supposée être à sa position d'équilibre mais sur un intervalle de longueur a centré en $L/2$, une vitesse initiale v_0 est donnée aux éléments de la corde. Si on indique avec ψ le déplacement de la corde, cette condition se traduite en

$$\psi(x,0) \equiv 0$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} v_0 & \text{si } \frac{L-a}{2} \leq x \leq \frac{L+a}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(c) Dériver l'évolution temporelle d'une corde frappée.

3 Corde dans un milieu visqueux

On considère une corde de longueur L dans un milieu visqueux. Les bords de la corde sont considérés comme étant fixes. Chaque élément infinitésimal de corde dx est soumis à une force de frottement infinitésimale $d\vec{F} = -\lambda\vec{v}dx$, où $\lambda > 0$ est le coefficient de frottement par unité de longueur. La corde, de masse linéique μ, est soumise à une tension T. La vitesse de propagation de la perturbation est notée u.

Dans cet exercice, on cherche à étudier le comportement de cette corde.

(a) Montrer que l'équation d'onde, en tenant compte des frottements, s'écrit comme :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\psi}{\partial t} = u^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

(b) En utilisant la méthode de séparation de variables, dériver les modes propres d'une corde dans un milieu visqueux. Discuter de l'évolution temporelle des différents régimes observés pour ces modes propres

(c) Obtenir la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$.

(d) En considérant $\omega \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}$, que peut-on dire sur l'évolution temporelle d'un paquet d'onde ?