Physique Avancée IV — Semestre de printemps 2024

Semaine 1

22 et 23 février 2024

Introduction

1. Les ondes

    1.1 L’équation d'onde

        1.1.1 Propagation d’une perturbation

        1.1.2 L’équation d’onde (équation de d’Alembert)

            1.1.2.1 Ondes transversales sur une corde

            1.1.2.2 Propagation d’une onde de pression

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert
(1717-1783)

Série 1

Bienvenue au ...

Cours de Physique Avancée IV

pour étudiants de deuxième année
en section de physique

Prof. Paolo Ricci
Swiss Plasma Center

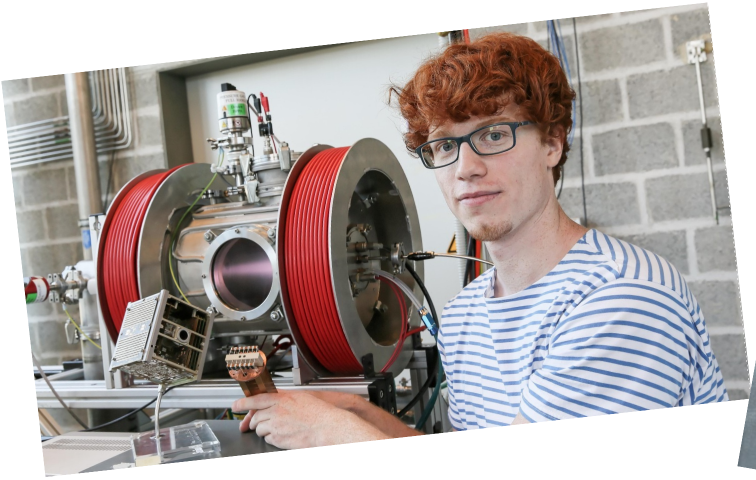
Site web du cours:

http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=16011

Moodle

Exercices - Répartition des assistants
(vendredi 9:15 - 11:00)

Salle	**Assistant Principal**	**Assistants**
GRA 332	Felicien Filleul, Samuel Ernst	Samy Conus
GRB 330	Simon Vincent, Pierrick Giroud-Garampon	Léonard Lebrun et Rodolfo Lippo




Coordination

Exercices - Répartition des assistants

(vendredi 10:15 - 12:00 - après séance préparatoire en CE6)

Salle	**Assistant Principal**	**Assistants**
GRA 332	Felicien Filleul, Samuel Ernst	Samy Conus
GRB 330	Simon Vincent, Pierrick Giroud-Garampon	Léonard Lebrun et Rodolfo Lippo

– Enoncés disponibles sur le web quelques jours avant la séance (imprimés par vous)
– Pré-corrigés disponibles sur le web après la séance
– Corrigés disponibles sur le web quelques jours après la séance
– Test à blanc: vendredi 9 mai (vendredi de l’Ascension)?

Les séries

23 septembre 2022

Série 1 : Introduction à l'équation d'onde

1 Onde sinusoïdale

(a) Montrer que la fonction sinusoïdale suivante : $f(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$; est solution de l'équation d'onde : $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sous une condition entre le nombre d'onde k et la fréquence angulaire ω qu'il faudra spécifier.

(b) Toujours pour la même onde sinusoïdale $f(x,t)$, donner la longueur d'onde λ (distance entre deux crêtes d'une onde) et la période T. Également, trouver l'amplitude maximale, l'amplitude moyenne et l'amplitude quadratique moyenne ainsi que la vitesse de propagation de l'onde u. S'agit-il d'une onde progressive ou rétrograde ? Dessinez cette fonction pour : a) $t = 0$, b) $t = \frac{\pi}{3\omega}$ c) $t = \frac{2\pi}{3\omega}$.

2 Onde acoustique unidimensionnelle

Dans cet exercice, on se propose de dériver, d'une façon alternative par rapport au cours, l'équation d'onde pour une onde acoustique en une dimension. On considère les trois quantités physiques suivantes :

— $\rho(x,t)$ le champ de densité massique du gaz
— $v(x,t)$ le champ de vitesse dans le gaz
— $p(x,t)$ le champ de pression dans le gaz

Dans l'approximation des faibles perturbations, ces trois quantités peuvent être réécrites de la façon suivante :

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(x,t); \quad v(x,t) = v_0 + \tilde{v}(x,t); \quad p(x,t) = p_0 + \tilde{p}(x,t);$$

où les termes ρ_0, v_0 et p_0 sont les valeurs constants de la densité massique, de la vitesse et de la pression lorsque le gaz est à l'équilibre et les termes $\tilde{\rho}(x,t)$, $\tilde{v}(x,t)$ et $\tilde{p}(x,t)$ sont des perturbations par rapport à l'équilibre telle que $\tilde{\rho}(x,t) \ll \rho_0$, $\tilde{v}(x,t) \ll v_0$, $\tilde{p}(x,t) \ll p_0$. Pour approcher ce problème, le point de départ est le modèle du fluide :

— Conservation de la masse : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$
— Navier-Stokes : $\rho \frac{Dv}{dt} = -\nabla p + \mu \vec{\nabla}^2 \rho + \rho \vec{F}$, avec μ la viscosité du fluide et $\vec{F}$ la force externe.

(a) En utilisant l'équation de Navier-stokes, montrer que le champ de vitesse $v(x,t)$ peut s'écrire comme :

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$$

en ne conservant que les termes de 1^er^ ordre dans l'amplitude des perturbations. On néglige par ailleurs la viscosité μ de celui-ci et on considère qu'aucune force externe ne s'y exerce également. On considère le gaz comme étant au repos à l'équilibre.

(b) À partir de l'équation de conservation de la masse et l'hypothèse que le gaz est sujet à une transformation adiabatique ($pV^\gamma = \text{const}$), montrer que :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\gamma p_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}$$

où p_0 est la pression du gaz à l'équilibre.

(c) En combinant les deux précédents résultats, conclure que la champ de pression p obéit à une équation d'onde dont la vitesse de propagation c est donnée par $\sqrt{\gamma RT/M}$ où M est la masse molaire du gaz et R la constante des gaz parfaits.

(d) Comparer la vitesse du son de l'air à 20°C avec celle de l'Hélium (He). À partir de ce résultat, expliquer intuitivement pourquoi cela a une influence sur la tonalité de la voix lorsque l'on respire de l'Hélium.

applications numériques : $M_{\text{air}} = 29$ g/mol, $M_{\text{He}} = 4.003$ g/mol, $\gamma_{\text{air}} = 1.4$, $\gamma_{\text{He}} = 1.66$, $R = 8.314$ J · mol^{-1}· K^{-1}

3 Onde élastique dans un barreau

On se propose, dans cet exercice, de dériver l'équation d'onde qui régit la propagation d'une onde de déformation longitudinale dans un barreau élastique de longueur L. Dans un premier temps, on adopte une approche discrète où on considère un système de N masses m_i reliées une-à-une par des ressorts de raideur k et de longueur au repos l_0. À l'équilibre, les masses sont équidistantes et la distance entre chacune est égale à l_0. On suppose $x_i > x_{i-1}$ et que toutes les masses ont la même masse m.

(a) Dériver l'équation du mouvement d'une masse m_i en négligeant les effets dus à la longueur finie du barreau

(b) En prenant la limite $N \longrightarrow \infty$, montrer que l'équation du mouvement trouvée en a) se réduit à une équation d'onde dont la vitesse de propagation est donné par : $u = \sqrt{T/\mu}$, où μ est la masse linéique du barreau et $T = k \cdot l_0$ correspond à la tension dans le barreau.

L'équation d'onde dans un milieu élastique peut également être découlée en adoptant le formalisme de la mécanique des corps déformables. On nomme $\xi(x,t)$ le déplacement de la section en x à l'instant t. La densité massique ρ et la section S du barreau sont considérés constants.

(c) En écrivant la loi de Newton pour une section du barreau, dériver l'équation suivante :

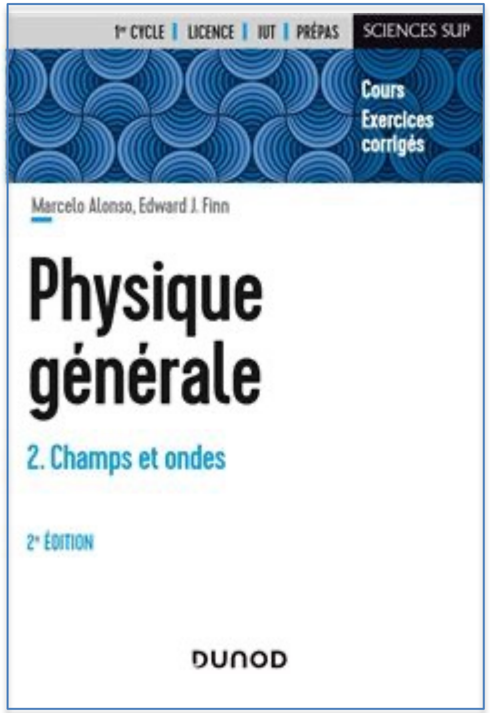
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

où $\sigma(x,t)$ est la contrainte au point x à l'instant t. La contrainte est définie dans cette exercice comme $\sigma = \frac{F}{S}$ où F est la force appliqué sur la section en x.

(d) En mécanique des corps déformables, on appelle $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$ la variation relative de la longueur d'un élement infinitésimal du barreau. Dans le cas d'un régime élastique, la loi de Hooke $\sigma = E\epsilon$, où E est le module de Young qui caractérise l'élasticité du matériau, décrit la relation entre contrainte et déformation. En utilisant la loi de Hooke, démontrer que $\xi(x,t)$ est solution d'une équation d'onde dont la vitesse de propagation est donnée par $c = \sqrt{E/\rho}$. Comparer cette expression de la vitesse de propagation avec celle trouvée en b).

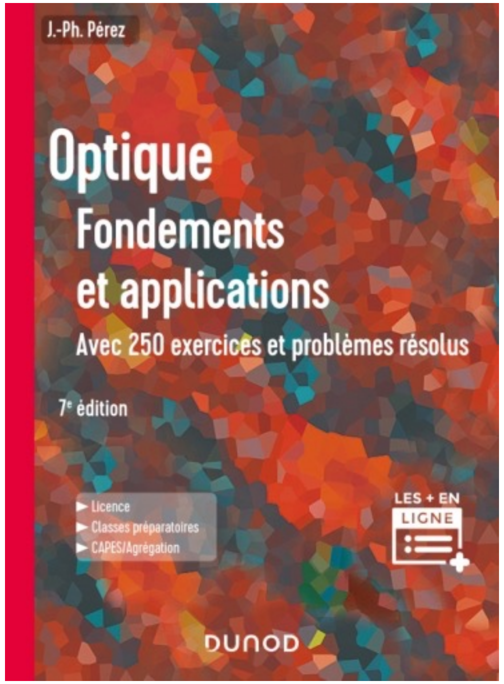
Pierre Wets
Responsable Expériences

Bibliographie



M. Alonso and E.J. Finn,
Physique générale - Tome 1 (relativité) et 2, 2e édition, Dunod

J.Ph. Perez, Optique - Fondements et application,
7e édition, Dunod

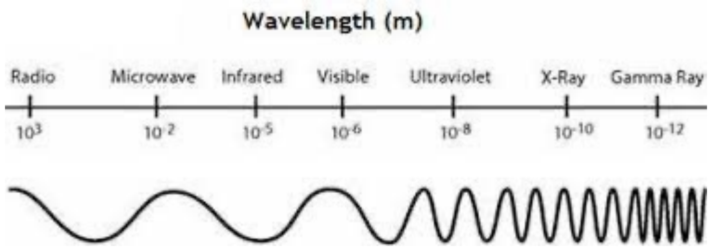


Buts du cours

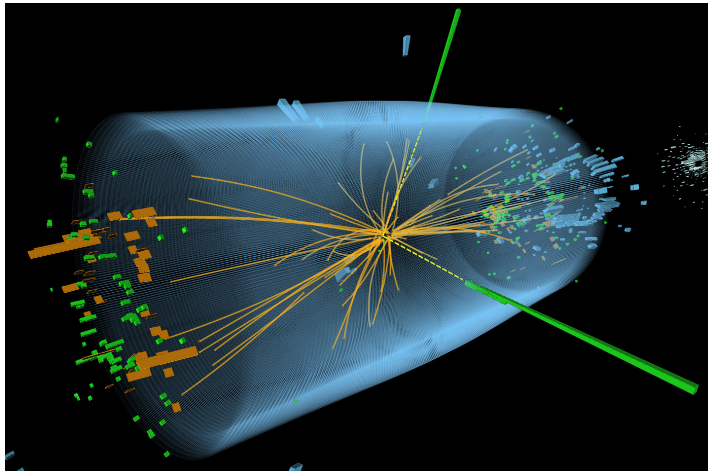
Attendre une compréhension fondamentale de:

- la dynamique ondulatoire

- phénomènes de base lies aux ondes électromagnétiques



- dynamique à vitesse proche de c



Organisation du cours

1. Les ondes

1.1 L'équation d'onde
1.2 Propriétés de base des ondes
1.3 Superposition d'onde
1.4 Interaction ondes-milieu de propagation

2. Ondes électromagnétiques

2.1 Propriétés de base des ondes électromagnétiques
2.2 Propagation des ondes électromagnétiques dans la matière
2.3 Réflexion et réfraction des ondes électromagnétiques

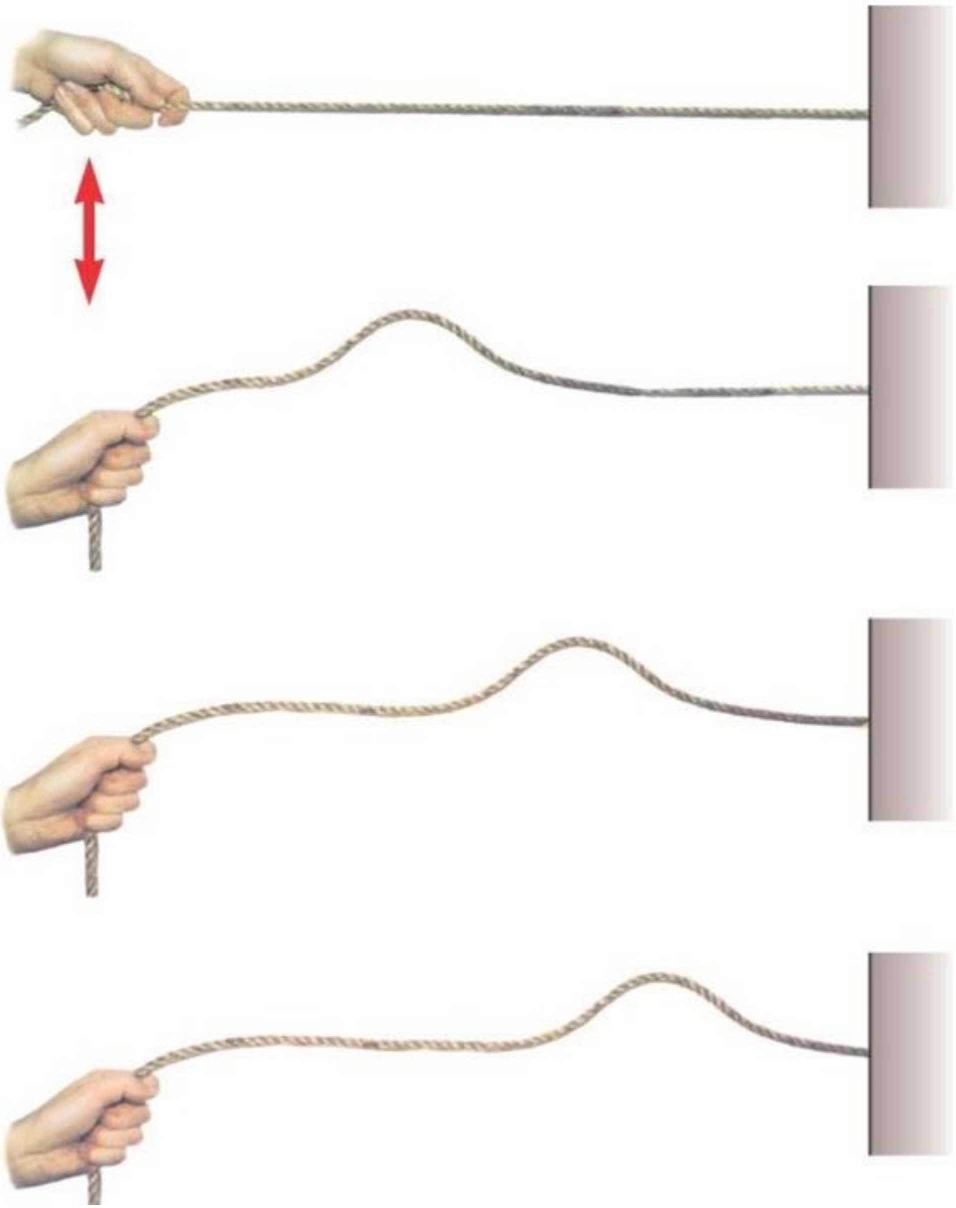
3. La relativité restreinte

3.1 Introduction
3.2 Cinématique relativiste
3.3 Dynamique relativiste

1. Les ondes



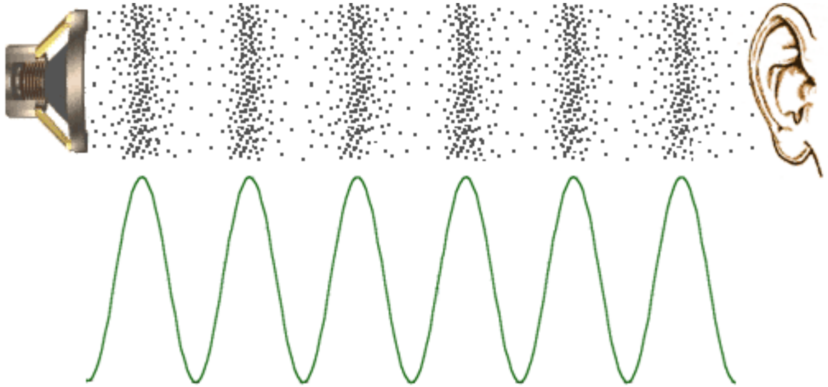

1.1.1 Propagation d'une perturbation

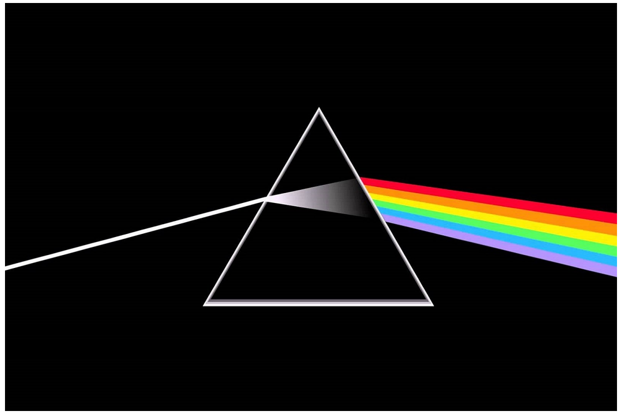


$$\xi(x,t) = f(x \pm vt)$$

1.1.2 L'équation d'onde (de d'Alembert)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$





Série 1

23 septembre 2022

Série 1 : Introduction à l'équation d'onde

1 Onde sinusoïdale

(a) Montrer que la fonction sinusoïdale suivante : $f(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$; est solution de l'équation d'onde : $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sous une condition entre le nombre d'onde k et la fréquence angulaire ω qu'il faudra spécifier.

(b) Toujours pour la même onde sinusoïdale $f(x,t)$, donner la longueur d'onde λ (distance entre deux crêtes d'une onde) et la période T. Également, trouver l'amplitude maximale, l'amplitude moyenne et l'amplitude quadratique moyenne ainsi que la vitesse de propagation de l'onde u. S'agit-il d'une onde progressive ou rétrograde ? Dessinez cette fonction pour : a) $t = 0$, b) $t = \frac{\pi}{3\omega}$ c) $t = \frac{2\pi}{3\omega}$.

2 Onde acoustique unidimensionnelle

Dans cet exercice, on se propose de dériver, d'une façon alternative par rapport au cours, l'équation d'onde pour une onde acoustique en une dimension. On considère les trois quantités physiques suivantes :

— $\rho(x,t)$ le champ de densité massique du gaz
— $v(x,t)$ le champ de vitesse dans le gaz
— $p(x,t)$ le champ de pression dans le gaz

Dans l'approximation des faibles perturbations, ces trois quantités peuvent être réécrites de la façon suivante :

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(x,t); \quad v(x,t) = v_0 + \tilde{v}(x,t); \quad p(x,t) = p_0 + \tilde{p}(x,t);$$

où les termes ρ_0, v_0 et p_0 sont les valeurs constants de la densité massique, de la vitesse et de la pression lorsque le gaz est à l'équilibre et les termes $\tilde{\rho}(x,t)$, $\tilde{v}(x,t)$ et $\tilde{p}(x,t)$ sont des perturbations par rapport à l'équilibre telle que $\tilde{\rho}(x,t) \ll \rho_0$, $\tilde{v}(x,t) \ll v_0$, $\tilde{p}(x,t) \ll p_0$. Pour approcher ce problème, le point de départ est le modèle du fluide :

— Conservation de la masse : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$
— Navier-Stokes : $\rho \frac{Dv}{dt} = -\nabla p + \mu \vec{\nabla}^2 \rho + \rho \vec{F}$, avec μ la viscosité du fluide et $\vec{F}$ la force externe.

(a) En utilisant l'équation de Navier-stokes, montrer que le champ de vitesse $v(x,t)$ peut s'écrire comme :

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$$

en ne conservant que les termes de 1er ordre dans l'amplitude des perturbations. On néglige par ailleurs la viscosité μ de celui-ci et on considère qu'aucune force externe ne s'y exerce également. On considère le gaz comme étant au repos à l'équilibre.

(b) À partir de l'équation de conservation de la masse et l'hypothèse que le gaz est sujet à une transformation adiabatique ($pV^\gamma =$ const), montrer que :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\gamma p_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}$$

où p_0 est la pression du gaz à l'équilibre.

(c) En combinant les deux précédents résultats, conclure que la champ de pression p obéit à une équation d'onde dont la vitesse de propagation c est donnée par $\sqrt{\gamma RT/M}$ où M est la masse molaire du gaz et R la constante des gaz parfaits.

(d) Comparer la vitesse du son de l'air à 20°C avec celle de l'Hélium (He). À partir de ce résultat, expliquer intuitivement pourquoi cela a une influence sur la tonalité de la voix lorsque l'on respire de l'Hélium.

applications numériques : $M_{\text{air}} = 29$ g/mol, $M_{\text{He}} = 4.003$ g/mol, $\gamma_{\text{air}} = 1.4$, $\gamma_{\text{He}} = 1.66$, $R = 8.314$ J · mol^{-1}· K^{-1}

3 Onde élastique dans un barreau

On se propose, dans cet exercice, de dériver l'équation d'onde qui régit la propagation d'une onde de déformation longitudinale dans un barreau élastique de longueur L. Dans un premier temps, on adopte une approche discrète où on considère un système de N masses m_i reliées une-à-une par des ressorts de raideur k et de longueur au repos l_0. À l'équilibre, les masses sont équidistantes et la distance entre chacune est égale à l_0. On suppose $x_i > x_{i-1}$ et que toutes les masses ont la même masse m.

(a) Dériver l'équation du mouvement d'une masse m_i en négligeant les effets dus à la longueur finie du barreau

(b) En prenant la limite $N \longrightarrow \infty$, montrer que l'équation du mouvement trouvée en a) se réduit à une équation d'onde dont la vitesse de propagation est donné par : $u = \sqrt{T/\mu}$, où μ est la masse linéique du barreau et $T = k \cdot l_0$ correspond à la tension dans le barreau.

L'équation d'onde dans un milieu élastique peut également être découlée en adoptant le formalisme de la mécanique des corps déformables. On nomme $\xi(x,t)$ le déplacement de la section en x à l'instant t. La densité massique ρ et la section S du barreau sont considérés constants.

(c) En écrivant la loi de Newton pour une section du barreau, dériver l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

où $\sigma(x,t)$ est la contrainte au point x à l'instant t. La contrainte est définie dans cette exercice comme $\sigma = \frac{F}{S}$ où F est la force appliqué sur la section en x.

(d) En mécanique des corps déformables, on appelle $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$ la variation relative de la longueur d'un élement infinitésimal du barreau. Dans le cas d'un régime élastique, la loi de Hooke $\sigma = E\epsilon$, où E est le module de Young qui caractérise l'élasticité du matériau, décrit la relation entre contrainte et déformation. En utilisant la loi de Hooke, démontrer que $\xi(x,t)$ est solution d'une équation d'onde dont la vitesse de propagation est donnée par $c = \sqrt{E/\rho}$. Comparer cette expression de la vitesse de propagation avec celle trouvée en b).