

01 mars 2024

Série 2 : L'équation d'onde et sa solution

1 Onde de Alfvén : Modèle MHD idéal

En 1942, Hannes Alfvén chercha à expliquer pourquoi la couronne solaire était plus chaude que la surface-même du soleil. Pour expliquer ceci, il introduit le modèle Magnétohydrodynamique (MHD) qui combine les équations d'électrodynamique (Maxwell, Ohm) avec les équations provenant de la mécanique des fluides (Navier-Stokes, Laplace, conservation de la masse). Ce modèle prédit qu'il existe des ondes au sein des plasmas qui pourraient expliquer les transports d'énergie de la surface du soleil à la couronne solaire. Cette prédiction lui a valu le prix Nobel en 1970. Dans cet exercice, on cherche à exprimer la relation entre la pulsation et le nombre d'onde, c'est-à-dire la relation de dispersion, $\omega = f(k)$ pour ces ondes en utilisant le modèle MHD :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0 \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p & \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} &= \eta \mathbf{J} \\ \frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

- (a) À partir des 8 équations du modèle, en éliminant la dépendance en $\mathbf{E}$ et en $\mathbf{J}$, réduire le modèle MHD aux 4 équations suivantes dans le cas du modèle MHD idéal ($\eta = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 & \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) & \frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) &= 0 \end{aligned}$$

- (b) Linéariser les quantités ρ , p , $\mathbf{B}$ et $\mathbf{u}$ comme pour l'exercice 2 de la série 1. En approximant au plus petit ordre dans l'amplitude de perturbation, déduire que les équations dérivées au point (a) peuvent être écrites en termes de $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\rho}$ et $\tilde{p}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \tilde{\mathbf{u}}) &= 0 & \rho_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} &= -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \mathbf{B}_0 \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} &= \nabla \times (\tilde{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}_0) & \tilde{p} &= \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \tilde{\rho} = c_s^2 \tilde{\rho} \end{aligned}$$

où $c_s = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ est la vitesse du son. Le plasma est au repos à l'équilibre.

Ces équations sont difficilement solvables. Afin de les simplifier, on suppose que les perturbations $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\rho}$ et $\tilde{p}$ peuvent être exprimées avec l'Ansatz général suivant : $\tilde{A}(\mathbf{x}, t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$

- (c) En utilisant l'Ansatz donné et en éliminant la dépendance en $\tilde{p}$, reformuler les équations trouvées au point (b).

On se propose de dériver la relation de dispersion des ondes de Alfvén transverses. Pour se faire, on impose que $\tilde{\mathbf{u}} = (0, \tilde{u}_y, 0)$ et que $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$ ainsi que $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$.

- (d) À partir des équations trouvées en (c), montrer que la relation de dispersion s'écrit : $\omega^2 = c_A^2 k_z^2$ où $c_A = B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0}$ est la vitesse de Alfvén.

On considère désormais que $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_x, 0, \tilde{u}_z)$. Cette nouvelle hypothèse permet de prédire deux nouveaux types d'onde : les ondes de Alfvén compressionnelles et les ondes magnéto-sonores.

challenge

- (e) Montrer que cette hypothèse permet de dériver 2 relations de dispersion ;

$$\omega^2 = \frac{1}{2}(c_A^2 + c_s^2)k^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}(c_A^2 + c_s^2)^2 k^4 - c_A^2 c_s^2 k_z^2} \quad (21)$$

En absence de champ magnétique B_0 , que peut-on dire sur la relation de dispersion ?

2 Ondes cylindriques

Dans le cours, il a été vu comment dériver l'expression générale d'une onde sphérique et le calcul de diverses quantités associées comme son intensité. Dans cet exercice, on propose de dériver ces mêmes expressions, avec une approche similaire, mais dans le cas d'une onde cylindrique.

- (a) En partant de l'équation d'onde générale et en utilisant la méthode de séparation des variables $\xi(\mathbf{x}, t) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)\cos(\omega t + \phi)$, montrer que les fonctions R, Θ, Z satisfont les propriétés suivantes :

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} R \right) + [(k_r r)^2 - n^2] R = 0$$

$$\Theta'' + n^2 \Theta = 0$$

$$Z'' + k_z^2 Z = 0,$$

avec $k^2 = k_z^2 + k_r^2$ et $\omega^2 = c^2 k^2$.

Résoudre les équations données ci-dessus et obtenir la forme générale des solutions d'onde en coordonnées cylindriques dans le cas $k_r \neq 0$. Note : on cherche les solutions définies pour $r \in [0 + \infty[$.

- (b) On s'intéresse aux solutions où il n'y a pas de dépendance en θ et z . Donner la forme approchée de la solution de l'équation d'onde cylindrique pour $r \rightarrow \infty$. Discuter du sens de la propagation ainsi que de la dépendance en r de la solution trouvée.
- (c) Soit $\xi(r, t)$, une onde sonore cylindrique sinusoïdale donnée par :

$$\xi(r, t) = \frac{\xi_0 \sin(kr - \omega t)}{\sqrt{r}}$$

Montrer que l'intensité moyenne de l'onde est proportionnelle à $1/r$ et donner la signification physique de cette dépendance.

Indications

— La forme du laplacien en coordonnées cylindriques est donnée par l'expression suivante :

$$\nabla^2 f(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

— Les fonctions de Bessel J_α et de Yankel Y_α sont les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2) y = 0$$

— Le comportement asymptotique de ces fonctions $J_\alpha(x)$ et $Y_\alpha(x)$ pour $x \rightarrow 0$ est donné par

$$\begin{cases} J_\alpha(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \\ Y_\alpha(x) \sim -\frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\alpha \end{cases},$$

et pour $x \rightarrow \infty$, par

$$\begin{cases} J_\alpha(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ Y_\alpha(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}.$$