

Règlement de l'examen

Il est strictement interdit de consulter la donnée de l'examen avant le signal de début !

- Il y a en tout *deux exercices* ayant chacun approximativement le même poids dans la note finale.
 - Répondre à chaque exercice et sous-exercice dans la zone correspondante du feuillet de réponse. Si votre réponse nécessite plus que l'espace alloué, il y a un "espace de secours" à chaque fin d'exercice qui peut être utilisé. Le cas échéant, veuillez indiquer clairement l'emplacement de la suite de votre réponse.
 - Avant de commencer un exercice, lire attentivement *tout* l'énoncé. Certaines remarques, indications et hypothèses importantes sont à la fin de la donnée.
 - Le rouge est prohibé, de même que les crayons à papier ou les stylos à friction (comme Frixion Ball), qui ne sont pas correctement scannés.
 - L'utilisation de calculatrices, téléphones portables, smartwatch, ou tout autre appareil électronique est strictement interdite.
 - L'examen dure en tout 3h à partir du signal de début.
 - Mettre votre carte CAMIPRO en évidence sur la table.
 - Il n'est pas possible de quitter la salle durant les 30 premières minutes, même si l'examen a été rendu. De manière générale, il n'est pas permis de quitter la salle sans autorisation.
 - Un formulaire d'une page A4 recto verso est autorisé durant l'examen.
 - Rester à sa place pour la restitution de l'examen. Ne pas quitter sa place d'examen avant l'autorisation donnée.
 - Le feuillet de réponse est à rendre. Les feuilles de brouillons ne seront pas corrigées.
 - Le corrigé sera disponible dans quelques jours sur le Moodle du cours.
-
- Après avoir rendu l'examen, veuillez svp remplir le formulaire d'évaluation du cours, merci !

Bon travail !

24 juin 2024

Examen final

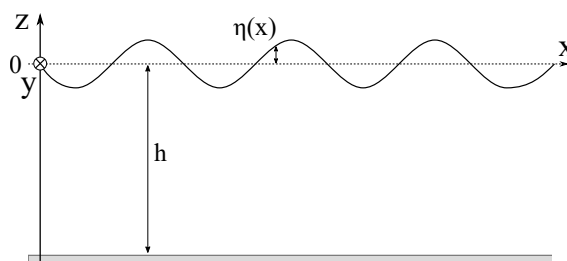
1. Origine d'un tsunami.

Lors d'un séisme ou d'un glissement de terrain du fond océanique, une perturbation se forme à la surface de l'océan, d'une hauteur de quelques dizaines de centimètres et d'une largeur pouvant atteindre plusieurs centaines de kilomètres. Nous allons voir que sous certaines conditions, cette perturbation se propage sans se disperser, et augmente en hauteur.

Pour commencer, on considère une vague sur l'océan, dont le fond est à une profondeur h . L'écart de hauteur de la surface de l'eau par rapport à sa position d'équilibre $z = 0$ est définie par $z = \eta(x)$. On considère le problème invariant selon y , donc $\partial_y = 0$.

L'équation de Navier-Stokes (où l'on a négligé la viscosité) décrit l'évolution de la vitesse de l'eau :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \rho \mathbf{g} \quad (1)$$



avec ρ la densité de l'eau, $\mathbf{u}$ sa vitesse, P la pression et $\mathbf{g}$ l'accélération de la pesanteur. L'eau est traitée comme un fluide incompressible, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, et irrotationnel, $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Cela permet d'introduire la fonction scalaire ϕ tel que $\mathbf{u} = \nabla \phi$. À l'équilibre, $\mathbf{u} = 0$. Sur le fond de l'océan, la vitesse verticale est nulle.

- (a) Montrer que ϕ est solution de :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0.$$

Pour résoudre l'évolution d'une vague se propageant selon x , on cherche ϕ de la forme

$\phi(x, z, t) = f(z)e^{i(kx - \omega t)}$. Montrer que $f(z) = \phi_0 \cosh[k(z + h)]$.

- (b) En linéarisant l'équation (1) et en négligeant les produits de termes de fluctuations, montrer que la pression dans l'eau peut s'écrire $P = P_{eq} + \tilde{p}$, avec $P_{eq} = p_0 - \rho g z$ la pression à l'équilibre et $\tilde{p} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ la variation de pression (dite "pression dynamique"). En considérant l'équilibre, justifier que p_0 est la pression atmosphérique.
- (c) Pour un élément quelconque de la surface de l'eau, une tension s'exerce sur les bords de la surface, dans la direction tangente à la surface, et perpendiculairement au bord où elle s'applique. Montrer que la force nette de tension s'exerçant sur un élément infinitésimal de surface $dx dy$ s'écrit :

$$\mathbf{F}_\gamma = \gamma dx dy \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \mathbf{e}_z.$$

avec γ la tension de surface en N/m.

Indication : on considère que la surface fait de petits angles par rapport à l'horizontale.

- (d) En utilisant l'équilibre des forces s'appliquant sur un élément infinitésimal de la surface de l'eau, déduire la relation de dispersion des ondes de surface, dans la limite $\eta(x) \ll h$:

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) \tanh(kh).$$

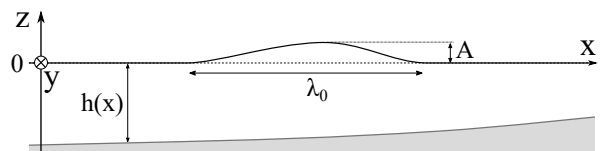
Indication : pour cela justifier et utiliser que $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta}$. Négliger également la masse de l'élément de surface.

- (e) Écrire la relation de dispersion en faisant apparaître les nombres d'onde k_h et k_c , correspondant respectivement aux longueurs d'ondes caractéristiques $\lambda_h = 2\pi h$ et $\lambda_c = 2\pi\sqrt{\frac{\gamma}{g\rho}}$. Quelle est la signification physique associée à λ_h et à λ_c ? Estimer l'ordre de grandeur de ces longueurs d'ondes caractéristiques. Dans le cas de longueurs d'ondes beaucoup plus petites que la profondeur de l'océan ($\lambda \ll \lambda_h$), et telles que $\lambda \ll \lambda_c$, calculer les expressions de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe.

Indication : à l'interface air/eau $\gamma = 74 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$. On considère une profondeur de l'océan de 7 km.

On considère maintenant des longueurs d'ondes beaucoup plus grandes que la profondeur de l'océan, $\lambda \gg \lambda_h$, ainsi que $\lambda \gg \lambda_c$. De plus, on considère une perturbation de la surface de l'eau d'une amplitude $\max[\eta(x)] = A$ et de largeur λ_0 , qui se propage selon x . Cette vague peut être exprimée comme une superposition d'ondes harmoniques de nombres d'ondes $k \in [0, \frac{2\pi}{\lambda_0}]$.

Comme précédemment, l'amplitude reste petite devant la profondeur, $A \ll h$. La profondeur varie selon x , mais suffisamment lentement pour considérer qu'on a localement sur la largeur de la perturbation $h(x) \approx h$, de sorte que les développements précédents restent valides.



- (f) Montrer qu'au premier ordre en kh , la vitesse de groupe de la perturbation est $v_g = \sqrt{gh}$.
- (g) L'énergie mécanique de la vague, par unité de volume, est donnée en moyenne par $e_m = \frac{\rho g A^2}{8h}$. En négligeant les effets de dissipation (due à la viscosité, aux frottements avec le fond de l'océan, etc...), et en s'appuyant sur des considérations de conservation, montrer que la hauteur et la largeur de la perturbation évoluent comme :

$$A \propto h^{-1/4} \quad \lambda_0 \propto \sqrt{h}.$$

- (h) Suite à un séisme au niveau du fond marin à une profondeur de 7 km, une perturbation de largeur 350 km et de hauteur 60 cm se forme à la surface de l'océan. Quelle est l'ordre de grandeur de sa vitesse ? Arrivant proche des côtes, où la profondeur de l'eau est réduite à 2 m, que sont devenues la vitesse, hauteur et largeur de cette perturbation ?
- (i) En utilisant une approximation à un ordre plus élevé en kh par rapport au point (f), montrer que l'écart de vitesses de phase Δv_ϕ , sur l'ensemble des ondes de nombre d'onde k composants la perturbation, est de l'ordre de $\Delta v_\phi \sim \sqrt{gh} \frac{h^2}{\lambda_0^2}$.
- (j) L'écart de vitesses de phase tend à disperser le paquet d'onde, donc à atténuer la perturbation. Mais un autre effet s'oppose à cette dispersion. Comme v_g dépend de la hauteur, montrer que la différence de vitesse entre le point le plus haut et plus bas de la perturbation est de l'ordre de $\Delta v^* \sim A \sqrt{\frac{g}{h}}$. Cela donne lieu à un raidissement de la perturbation, et un enrichissement de son spectre spatial. Lorsque ces deux effets se compensent, la perturbation (que l'on appelle alors "onde solitaire") arrive à se propager dans le milieu dispersif sans s'atténuer. Montrer que cette condition de formation d'une onde solitaire peut s'exprimer $U \sim 1$, avec U un nombre sans dimension que l'on précisera. Vérifier que l'exemple de la perturbation donné en question (h) vérifie bien cette condition.

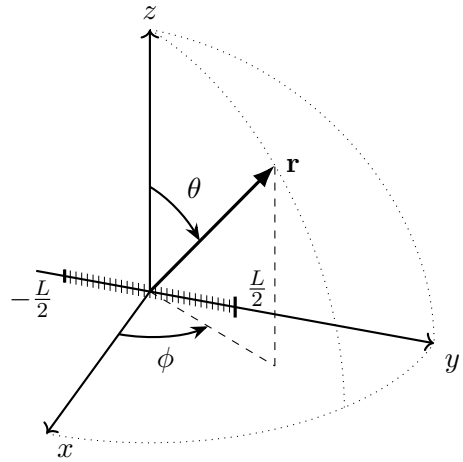
Indications : on rappelle que $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ et $\tanh(x) \underset{x \ll 1}{\approx} x - x^3/3$.

2. Antenne réseau à commande de phase.

Un courant électrique oscillant dans un fil conducteur génère un champ électromagnétique qui se propage dans l'espace. En juxtaposant un ensemble de tels fils, le signal émis par chacun d'entre eux s'additionne aux autres. En déphasant le signal émis par chaque fil, il est possible de modifier la direction du maximum de l'intensité du signal total sans avoir à changer l'orientation de l'appareil. Un tel dispositif peut donc servir d'antenne directionnelle.

On modélise l'antenne par un ensemble de fils verticaux, alignés le long de $\mathbf{e}_z$, distribués sur une distance L le long de $\mathbf{e}_y$. L'antenne est centrée à l'origine. Le courant électrique $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ oscillant verticalement dans le fil décalé de y_0 le long de $\mathbf{e}_y$ par rapport à l'origine ($-L/2 \leq y_0 \leq L/2$) est déphasé de $\beta(y_0)$ et peut être approximé par

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} = J_0 \delta(x) \delta(y - y_0) \delta(z) \mathbf{e}_z e^{i(\beta(y_0) - \omega t)}.$$



Notation. Afin de simplifier les expressions, on séparera la partie temporelle des oscillations de la partie spatiale :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad \text{et} \quad f(\mathbf{r}, t) = \tilde{f}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}.$$

- (a) En partant des équations de Maxwell dans le vide, montrer que les champs électrique, $\mathbf{E}$, et magnétique, $\mathbf{B}$, satisfont l'équation d'onde.

Pour commencer, on considère un seul fil. On supposera que la distance à l'observateur, r , est grande en comparaison aux longueurs d'ondes électromagnétiques λ , qui elles même sont grandes comparée à y_0 , i.e. $r \gg \lambda \gg y_0$. Dans la suite, on négligera tous les termes d'ordre y_0/r et λ/r ou supérieurs, excepté dans le déphasage où on gardera les termes d'ordre y_0/r et on négligera les termes d'ordre supérieurs.

- (b) Soit $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ avec $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potentiel vecteur. Montrer que, sous les approximations considérées,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 J_0}{4\pi r} e^{i[kr - \omega t - ky_0 \sin \theta \sin \phi + \beta(y_0)]} \mathbf{e}_z.$$

On rappelle l'équation de potentiel retardé

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') e^{ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}',$$

où $k = \omega/c = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$

- (c) Dériver le champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Montrer que, sous les approximations considérées, il peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r} \mathbf{F}(\theta, \phi) e^{i[kr - \omega t - ky_0 \sin \theta \sin \phi + \beta(y_0)]},$$

avec $\mathbf{F}$ une fonction à spécifier.

- (d) Dériver le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Discuter la direction du vecteur de Poynting. Est-ce que l'intensité du signal émis par le fil possède une symétrie sphérique ?

On considère maintenant l'ensemble des fils de l'antenne. Pour simplifier les calculs, on supposera en avoir une infinité de sorte à avoir un continuum de fils dans l'intervalle $-L/2 \leq y_0 \leq L/2$.

- (e) Dans un premier temps, on supposera que $\beta(y_0) = 0$. Par superposition, calculer le champ magnétique total résultant de la somme des contributions de chaque fils, et donner l'angle ϕ qui maximise l'intensité du signal.
- (f) On pose maintenant $\beta(y_0) = ay_0 + b$, où a et b sont des constantes. Dans ce cas, calculer le champ magnétique total et donner l'angle ϕ qui maximise l'intensité du signal.

Un vaisseau spatial muni d'une antenne directionnelle à l'avant du cockpit se déplace à vitesse relativiste $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ par rapport à la Terre et cherche à y envoyer un message. Lorsqu'il émet son message, il mesure sa distance à la Terre, r' , et observe cette dernière sous un angle ϕ'_0 par rapport à sa ligne de déplacement, soit $\mathbf{r}'_{\text{terre}} = r' \cos \phi'_0 \mathbf{e}_x + r' \sin \phi'_0 \mathbf{e}_y$. On cherche à déterminer l'angle ϕ' avec lequel il doit envoyer son message afin que la station sur Terre le reçoive.

On remarque que l'image de la Terre, observée par l'astronaute, est également un signal lumineux. On distingue donc trois évènements dans l'espace-temps : l'évènement A où la terre émet son image, l'évènement B où le vaisseau reçoit l'image de la Terre et répond, et finalement l'évènement C où la Terre reçoit le message. Dans le référentiel de l'astronaute, les trois évènements ont respectivement les coordonnées (x'_A, y'_A, t'_A) , $(0, 0, 0)$ et (x'_C, y'_C, t'_C) .

- (g) Exprimer l'angle ϕ' en fonction de x'_C et y'_C ainsi que x'_A , y'_A et t'_A en fonction de r' et ϕ'_0 .
- (h) Appliquer la transformation de Lorentz pour calculer les coordonnées des évènements A , B , et C dans le référentiel où la Terre est au repos.
- (i) Exprimer ϕ' comme fonction des paramètres mesurés par l'astronaute.

Indication : Equations de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Indication : Intégration de la distribution de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

Indication : Opérateurs différentiels en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \nabla f &= \mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r F_\phi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\phi \\ \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \end{aligned}$$