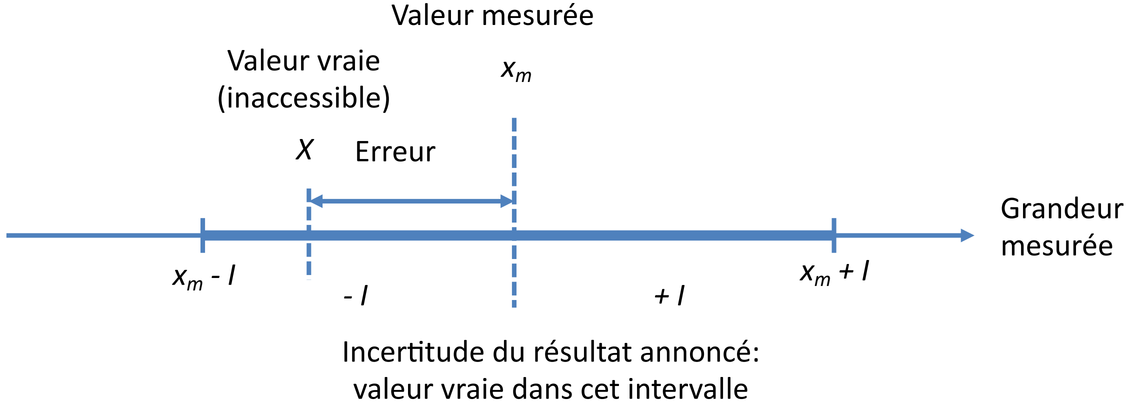
Traitement des incertitudes de mesure

Incertitude et erreur
Erreurs systématiques et aléatoires
Détermination des incertitudes aléatoires
Chiffres significatifs et arrondissement
Propagation des incertitudes
Méthode des moindres carrés

Erreur et incertitude

- Aucune mesure n'est jamais exacte
- La valeur vraie est en général inconnue



- Essayer d'assurer que les incertitudes sont aussi faibles que possible et d'avoir une estimation fiable de la façon dont elles sont grandes
- Un résultat expérimental n’est pas complet sans une estimation d’incertitude
- **Incertitude de mesure:** Paramètre, associé au résultat d’un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande.

Erreurs aléatoires et erreurs systématiques

- ~~erreurs accidentelles~~

- erreurs aléatoires – statistiques, distribution de probabilité

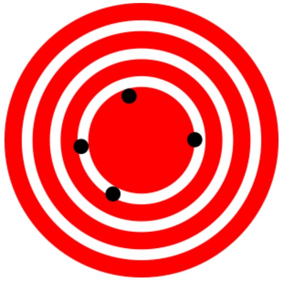
- erreurs systématiques – la mesure est toujours biaisé dans un sens

sources:

- étalons
- appareillage
- méthode
- opérateur
- phénomène physique ou objet mesuré
- influences extérieures

Précision vs. exactitude (accuracy)

faibles erreurs aléatoires et forte erreur systématique



fortes erreurs aléatoires et faible erreur systématique

- vérifiez vos instruments

Exemple: voltmètre numérique

MODEL	FUNCTION	RANGE	ACCURACY	RESOLUTION
M-3860D M-3850D M-3870D	DC VOLTAGE	400 mV 4 V 40 V 400 V	± 0.3% of rdg +1 dgt	100 µV 1 mV 10 mV 100 mV
		1000 V	± 0.5% of rdg +1 dgt	1 V
M-3850D M-3870D	AC VOLTAGE	400 mV 4 V 40 V 400 V	± 0.8% of rdg +3 dgt	100 µV 1 mV 10 mV 100 mV
		750 V	± 1.0% of rdg +3 dgt	1 V
3860D	AC VOLTAGE (True rms)	400 mV 4 V 40 V	± 0.8% + 3 dgt (± 2.5% + 5 dgt)	100 µV 1 mV 10 mV
		400 V 750V	± 1.0% of rdg +3 dgt	100 mV 1 V

Note: Impedence of AC Voltage True rms (M-3860D)

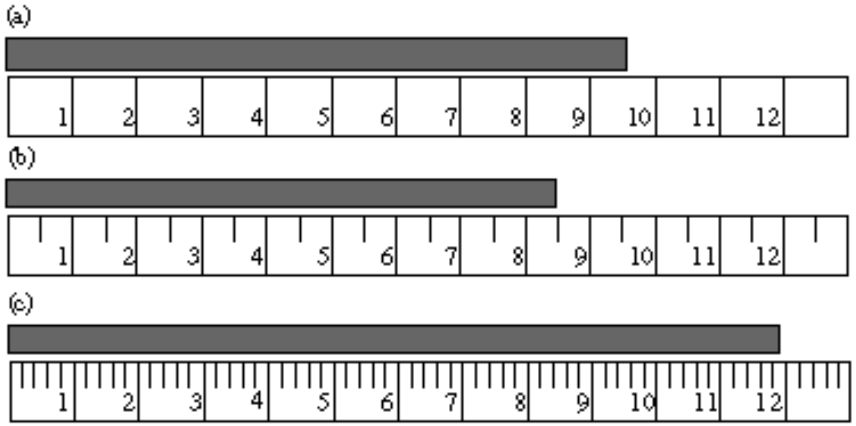
1. 40Hz to 20KHz for 400mV, 4V, 40V & 200V
2. 40Hz to 1KHz for above 200V to 750V

Détermination des incertitudes

précision de l'instrument (instrument limit of error, ILE):

1/2, 1/4, 1/5, 1/10 de la division

1/2 du dernier chiffre sur le display numérique



Détermination des incertitudes

incertitude estimée

souvent plus grande que la précision de l'instrument

ex. 1: balance avec la division de 0.1 g ne réagit pas à moins de 1 g

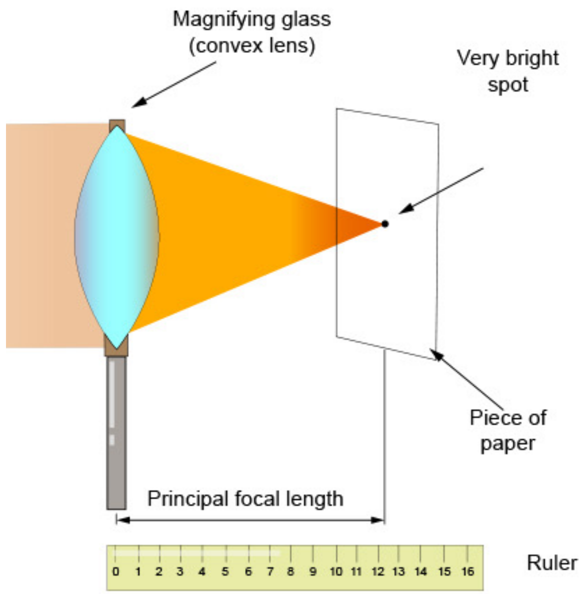
on estime ± 0.5 g

ex. 2: mesure de la longueur focale d'une lentille avec une règle

la précision de 0.5 mm

la position de l'écran peut varier de 1 cm

on estime ± 0.5 cm



Détermination des incertitudes

approche statistique: mesures répétées

valeur moyenne

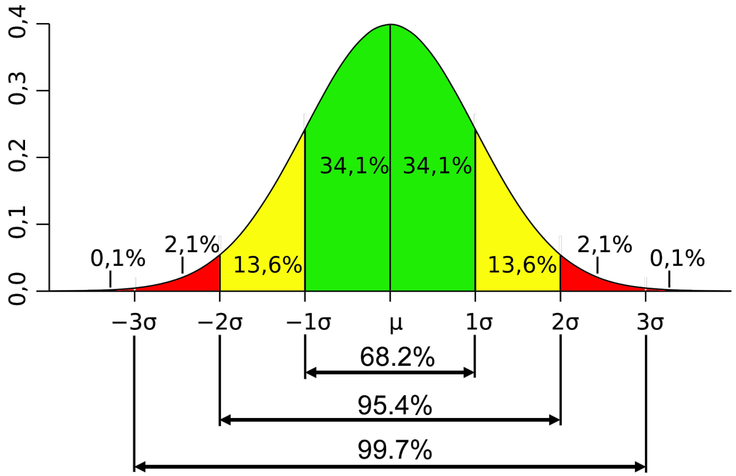
$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

écart type

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N-1}}$$

erreur sur la moyenne

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N(N-1)}}$$



distribution de Gauss

résultat: $\boxed{\overline{x} \pm \sigma}$

Chiffres significatifs - arrondissement

1. Arrondir l'incertitude
   à un chiffre significatif (règle général)
   éventuellement à deux chiffres significatifs si le premier = 1
2. Arrondir le résultat an gardant le même nombre de décimales
3. Pas oublier les unités!

problème:
mesure par une balance
sensibilité 0.02 g
moyenne 12.14286 g
écart type 0.07313 g

12.14286 g ✗
(12.14 ± 0.02) g ✗
12.14286 g ± 0.07313 ✗
12.143 ± 0.073 g ✗
(12.14 ± 0.07) ✗
(12.1 ± 0.1) g ✗
12.14 g ± 0.07 g ✓
(12.14 ± 0.07) g ✓

12.14 g ± 70 mg

Propagation des incertitudes

On utilise le résultat d'une mesure pour en calculer un autre

fonction $G(x, y, z)$

calcul avec les erreurs estimées

$$\Delta G = \left|\frac{\partial G}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\Delta y\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial z}\Delta z\right|$$

calcul avec les écarts types

$$\sigma_G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\sigma_z\right)^2}$$

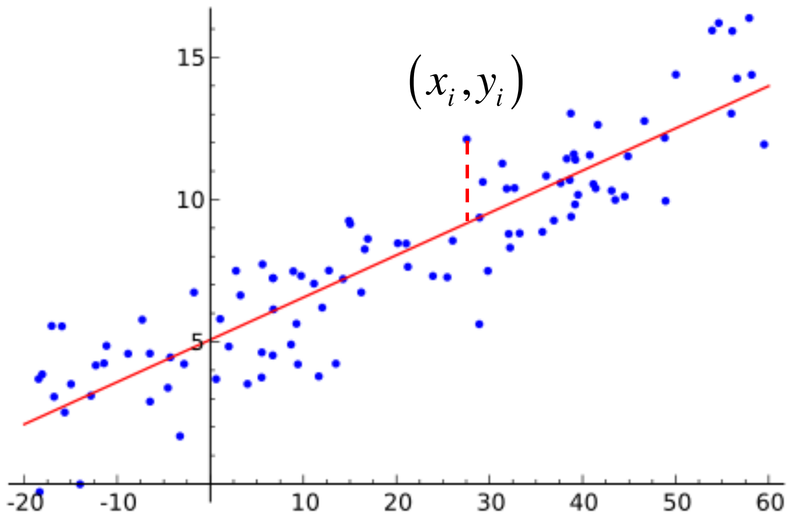
Propagation des incertitudes - exemples

$$\Delta G = \left|\frac{\partial G}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\Delta y\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial z}\Delta z\right|$$

fonction	erreur absolue	erreur relative
$G = x + y$	$\Delta G = \lvert\Delta x\rvert + \lvert\Delta y\rvert$	
$G = x - y$	$\Delta G = \lvert\Delta x\rvert + \lvert\Delta y\rvert$	
$G = x \cdot y$	$\Delta G = \lvert y\Delta x\rvert + \lvert x\Delta y\rvert$	$\frac{\Delta G}{G} = \left\lvert\frac{\Delta x}{x}\right\rvert + \left\lvert\frac{\Delta y}{y}\right\rvert$
$G = \frac{x}{y}$	$\Delta G = \left\lvert\frac{\Delta x}{y}\right\rvert + \left\lvert\frac{-x}{y^2}\Delta y\right\rvert$	$\frac{\Delta G}{G} = \left\lvert\frac{\Delta x}{x}\right\rvert + \left\lvert\frac{\Delta y}{y}\right\rvert$

L'erreur relative finale ne peut pas être inférieure à la plus grande erreur relative des facteurs!

Méthode des moindres carrés



$$a = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x}$$

$$(\Delta a)^2 = \frac{\sum_i (y_i - ax_i - b)^2}{(n-2)\cdot \sum_i (x_i - \overline{x})^2}$$

On cherche la droite $y = ax + b$

telle que $\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - (ax_i + b)\right)^2$ soit minimum

Méthode des moindres carrés

Si vous mesurez une dépendance linéaire, vous pouvez obtenir une pente de droite par la méthode des moindres carrés.

Par exemple, si vous mesurez la contrainte σ et la déformation ε, vous calculez le module de Young *E* an utilisant la loi de Hooke

et le fit linéaire ($y=ax+b$ où $y=\sigma$, $x=\varepsilon$, $a=E$, $b=0$).

Pour calculer l'incertitude ΔE, vous devriez utiliser l'incertitude de la pente donnée par la formule:

$$(\Delta a)^2 = \frac{\sum_i \left(y_i - ax_i - b\right)^2}{(n-2)\cdot \sum_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

au lieu de calculer une moyenne puis écart type pour tout les points de mesure.

Excel: fonction LINEST(y,x,const,stats)

(=LINEST(B1:B6,A1:A6,TRUE,TRUE) & CTRL+Shift+Enter)

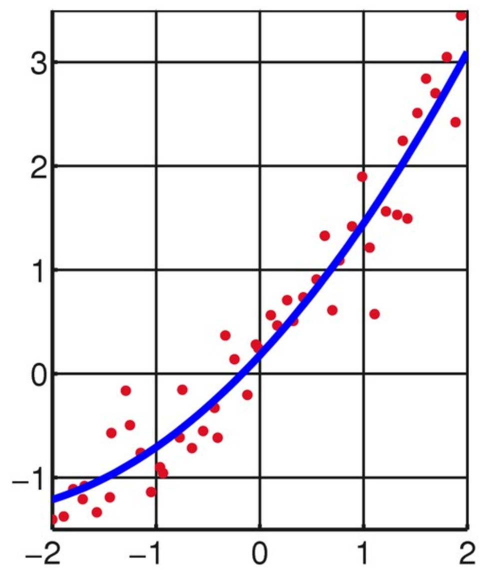
Linéarisation des fonctions

$y = Ae^{-\lambda t}$ $\ln y = \ln A - \lambda t$ log-lin

$y = ax^{b}$ $\ln y = \ln a + b \ln x$ log-log

Il est plus facile de juger visuellement
la qualité d'un fit linéaire!

Linéarisez vos fonctions!



Plus d’information

Cours PHYS-231 Science des données Prof. Lenka Zdeborová

JCGM 100 : “ Evaluation des données de mesure – Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure ”, 2008.
Bureau international des poids et mesures

J. R. Taylor, Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques, Editions Dunod, 2000