

Changement de référentiel / invariance de jauge

Construction de la mécanique Lagrangienne / de Newton à Lagrange

$$F=ma \quad \rightarrow \quad \dots \quad \rightarrow \quad \text{Equations de Lagrange}$$

Donc l'invariance Galiléenne doit être conservée dans le formalisme de Lagrange.

!!!! Les Equations de Lagrange restent les mêmes, pas le Lagrangien !!!!

Ex: particle libre

Lagrangien

$$L = T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Transformation Galiléenne

$$x' = x - v_0 t$$

Nouveau Lagrangien

$$L(x', \dot{x}') = \frac{1}{2}m(\overbrace{\dot{x}' + v_0}^{\dot{x}})^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + m\dot{x}'v_0 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Changement de référentiel / invariance de jauge

Construction de la mécanique Lagrangienne / de Newton à Lagrange

$$F=ma \quad \rightarrow \quad \dots \quad \rightarrow \quad \text{Equations de Lagrange}$$

Donc l'invariance Galiléenne est conservée dans le formalisme de Lagrange.

!!!! Les Equations de Lagrange restent les mêmes, pas le Lagrangien !!!!

Ex: particle libre

Différence entre les deux Lagrangiens

$$\begin{aligned} L(x', \dot{x}') - L'(x', \dot{x}') &= m\dot{x}'v_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \frac{d}{dt} \underbrace{\left(mv_0x' + \frac{1}{2}mv_0^2t \right)}_{F(x',t)} \end{aligned}$$

A.k.a. ***invariance de jauge*** : “On peut ajouter n’importe quelle fonction du type $\frac{dF}{dt}(q, t)$ au Lagrangien, sans changer la physique/les équations du mouvement.

Théorème de Noether



“A chaque *symétrie continue* correspond une intégrale première”

Exemple: transformation de coordonnées dépendant d'un seul paramètre

$$q_i \rightarrow q_i(s)$$

laissant le Lagrangien invariant

$$\frac{d}{ds} L(\{q_i(s)\}, \{\dot{q}_i(s)\}, t) = 0$$

Alors

$$C = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(s)}{\partial s} \right) = \text{constant}$$

Démonstration : $dC/dt = \dots = dL/ds$

Théorème de Noether



“A chaque *symétrie continue* correspond une intégrale première”

Exemples:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

- coordonnées cycliques - n'apparaissant pas dans L
->conservation de l'impulsion généralisée

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

- invariance par translation
->conservation de l'impulsion totale

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \frac{\partial}{\partial s} (\vec{x}_i + s\vec{u}) = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{P}$$

- invariance par rotation
->conservation du moment cinétique en direction de l'axe de rotation