

Mécanique analytique — série 8

*Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch
fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch
adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch*

Exercice 1 : Crochets de Poisson

- a) Montrer à l'aide des crochets de Poisson que si deux composantes du moment cinétique sont conservées, alors la troisième l'est aussi.
- b) Problème de Kepler : Considérer une particule de masse m dans le champ gravitationnel créé par une masse immobile M :

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}$$

- i. Quelles sont les dimensions de G ? Faire le lien avec le potentiel habituellement utilisé pour le champ de pesanteur terrestre. On peut par exemple trouver une expression de g en fonction de M , G et R .
- ii. Montrer que le moment cinétique ainsi que l'énergie sont des quantités conservées.
- iii. Montrer que le vecteur de Laplace-Runge-Lenz

$$\vec{K} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - GMm \frac{\vec{r}}{r}$$

est une constante du mouvement.

- iv. Dans quelles directions pointent les vecteurs $\vec{L}$ et $\vec{K}$?

Indications : Pour simplifier les calculs il est intéressant d'utiliser le tenseur de Levi-Civita, ε_{ijk} , et la notation d'Einstein.

Exercice 2 : Trajectoires sur un cylindre

Considérer un cylindre de rayon R .

- a) Ecrire la longueur de la trajectoire du point $(z = 0, \phi = 0)$ au point $(z = h, \phi = \alpha)$ sous la forme d'une fonctionnelle

$$L = L[\phi(z)]$$

- b) Trouver l'**ensemble des trajectoires** qui minimisent L . Comment comprendre le fait qu'il y ait plusieurs trajectoires ? Dans quel sens chacune est-elle un minimum ?
- c) Pour $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ trouver la longueur des 4 trajectoires les plus courtes.
- d) Comparer ce résultat avec le chemin qui relie les points :
 $(z = 0, \phi = 0) \rightarrow (z = 0, \phi = \frac{2}{3}\pi) \rightarrow (z = h, \phi = \frac{2}{3}\pi)$.
- e) Même chose avec $\alpha = \pi$. Quelle est la différence avec le cas précédent ? Pourquoi ?