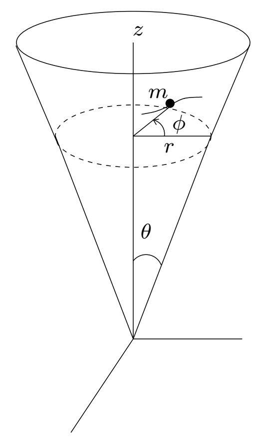
Mécanique analytique — série 7

Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch

Exercice 1 : Particule dans un cône, contraintes et multiplicateurs de Lagrange

On s'intéresse à la dynamique d'une particule se déplaçant sur la paroi d'un cône d'ouverture 2θ, soumise à la force de pesanteur. Dans un premier temps, nous allons aborder le problème en définissant des coordonnées généralisées qui satisfont naturellement les contraintes. Dans un second temps, nous allons réexaminer ce problème à l'aide des multiplicateurs de Lagrange, afin de nous familiariser avec leur manipulation à l'aide d'un exemple simple.



a) Choisir des coordonnées polaires (comme dans la figure ci-contre) ou sphériques (r est alors la distance séparant la particule du sommet du cône). En utilisant la contrainte, écrire le lagrangien $\mathcal{L}_2$ de ce système en fonction des deux coordonnées généralisées (r, ϕ). Identifier deux quantités conservées, et exprimer $\dot{\phi}$ et $\dot{r}$ en fonction de ces quantités conservées et de r. On ne cherchera pas à résoudre explicitement les équations du mouvement.

b) Ecrire maintenant le lagrangien $\mathcal{L}_3$ de ce système, en coordonnées cylindriques, sans tenir compte de la contrainte.

c) Ecrire la contrainte sous la forme : $f(\{q_i\}) = 0$.

d) Considérer $\mathcal{L} = \mathcal{L}_3 + \lambda f(\{q_i\})$ comme nouveau lagrangien dépendant de $(\{q_i\}, \lambda, \{\dot{q}_i\})$ et établir les équations de Lagrange, en considérant a priori λ comme une variable dynamique.

e) Discuter à nouveau les constantes du mouvement.

f) A l'aide des équations du mouvement, trouver λ en fonctions des coordonnées et des constantes du mouvement.

g) Calculer les forces de contrainte R_r, R_z et R_ϕ données par

$$R_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \alpha} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha} \qquad (\alpha = r, z, \phi).$$

Exercice 2 : $\mathcal{L} \to \mathcal{H}$

Pour chaque lagrangien, trouver le hamiltonien correspondant et établir les équations de Hamilton.

a) Pendule en rotation ($r = R = \text{const}$ et $\dot{\phi} = \omega = \text{const}$)

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta\right) - mgR\cos\theta$$

b) Pendule sphérique ($r = R = \text{const}$)

$$\mathcal{L}(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) - mgR \cos\theta$$

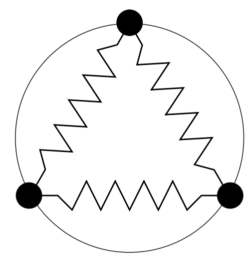
c) Système de ressorts (cf. série 4, exercice 2)

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \right) - \frac{k}{2} \left(x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2 \right)$$

d) Pendule en déplacement (cf. série 3, exercice 5)

$$\mathcal{L}(u, \dot{u}, \phi, \dot{\phi}) = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{u}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + m_2 l \dot{u} \dot{\phi} \cos\phi + m_2 g l \cos\phi$$

Exercice 3 : Particules sur un anneau



Voici un exercice complet sur les petites oscillations. Il est long, mais constitue une bonne révision du sujet.

Trois particules de masse identique m glissent sans frottement sur un cercle de rayon R. Elles sont connectées par trois ressorts identiques avec des propriétés élastiques décrites par le potentiel $V(x) = k \cosh(x/R)$; où x est la longueur du ressort, $k > 0$. La force de gravitation n'est pas présente.

a) Déterminer le nombre de degrés de liberté et trouver une paramétrisation convenable.

b) Esquisser le potentiel $V(x)$.

c) Trouver le potentiel $V(\{q_i\})$. Montrer que la disposition équilatérale est en équilibre ; la stabilité sera discutée plus loin. Trouver les deux autres dispositions en équilibre et donner l'énergie potentielle pour chacune.

d) Par analyse dimensionnelle, trouver la dépendance en R, m et k des fréquences d'oscillation du système. Essayer de donner plus de précisions sur les fréquences attendues en utilisant des arguments de symétrie.

e) Ecrire le lagrangien.

f) Quelles sont les quantités conservées ?

g) Développer l'énergie potentielle jusqu'au deuxième ordre autour de la position d'équilibre équilatéral. Trouver les matrices M et K.

h) Trouver les fréquences et modes propres.

i) Vérifier la stabilité de la configuration équilatérale, ainsi que les déductions du point (d).

j) Donner le rayon de validité de cette solution.

k) Discuter l'évolution du système avec les conditions initiales proches de la position d'équilibre équilatérale.

l) Reconsidérer le système avec le potentiel $V(x) = -k \cosh(x/R)$ et refaire les points c), g) à k).

m) Avec le potentiel inversé ($V = -k \cosh(x/R)$), définir les coordonnées normales et les utiliser pour exprimer le lagrangien.