
Mécanique analytique — série 6 supplémentaire

*Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch
fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch
adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch*

Exercice 1 : Problème de la chaînette

Trouver la configuration d'un fil soumis à la pesanteur, de masse linéique ρ et de longueur L , fixé entre deux points de même hauteur.

Exercice 2 : La fondation de Carthage

Didon, de son petit nom Élixa, princesse phénicienne et fille du roi de Tyr, se voit voler ses rêves de pouvoir (ainsi que son mari) par son frère Pygmalion. Déçue par la cruauté de la vie, elle s'en va un peu plus loin, en Tunisie, où elle débarque en 814 av. J.-C.

Comme l'on pouvait s'y attendre, les futurs tunisiens ne voient pas d'un très bon œil cette arrivée massive d'autres gens, qui semblent vouloir s'installer là pour un moment. Ils donnent donc, dans un mouvement de générosité extrême, une peau de boeuf, et promettent de donner toute la terre qui pourrait tenir dans cette peau à Didon.

Comme l'on pouvait déjà un peu moins s'y attendre, la jeune future déesse, astucieuse et débrouillarde avec des ciseaux, découpe la peau de boeuf, lanière fine par lanière fine, jusqu'à obtenir un ruban de .. 4 km !

Et puis, devinant intuitivement un résultat mathématique qu'il ne fut possible de démontrer que quelques millénaires plus tard (et que l'on va s'employer à formuler, puis montrer), elle délimite un arc de cercle autour de deux points sur la côte, obtenant de fait l'aire maximale possible avec un périmètre fixe, et délimite Carthage. Math rocks.

Formulez ce problème d'isopérimètre mathématiquement, en partant sur une géométrie de demi-plan (la ville doit avoir un port, plus ou moins grand). Fixez deux points sur la carte et montrez que la frontière optimale, étant donnés ces deux points, est un arc de cercle. Discutez ensuite le choix de ces deux points sur la carte afin d'optimiser l'aire enclose dans l'arc de cercle pour une longueur de L de ruban donné.

Pour la route : 4 km, ça vous paraît possible ? Avec les outils de l'époque ?