Mécanique analytique — série 6

Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch
fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch
adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch

Exercice 1 : L'aventurier dans le désert

Un aventurier se trouvant dans le désert aperçoit une oasis à un angle arctan(5/12) par rapport à l'horizontale. Le principe de Fermat dit que la lumière suit les trajectoires minimisant

$$S = \int n(s)ds, \tag{1}$$

où n est l'indice de réfraction du milieu et s la distance le long de la trajectoire. Dans des conditions de grande chaleur, l'indice de réfraction dépend significativement de la hauteur z au-dessus du sable approximativement par

$$n(z) = n_0(1 - az). \tag{2}$$

Trouver la trajectoire $z(x)$ suivie par la lumière depuis l'oasis et indiquer à l'aventurier la distance qu'il doit encore parcourir avant un repos bien mérité. Le rayon de courbure de la Terre est négligé.

Exercice 2 : L'homme pressé

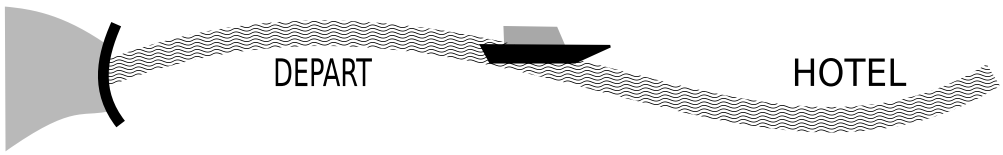
Une géodésique est le chemin le plus court entre deux points A et B d'un espace pourvu d'une métrique (un moyen de mesurer les distances). Selon la forme de cet espace, déterminer ce chemin peut-être plus ou moins facile. Entre chez soi et l'EPFL, par exemple, il faudrait prendre en compte non seulement la longueur du trajet, mais aussi l'inclinaison des routes, la densité du trafic, l'intérêt de la vue, etc.

Intéressons-nous ici à trois cas beaucoup plus simples, où la distance est le seul élément déterminant dans le calcul.

1. Montrer que la géodésique sur un plan est la ligne droite. Généraliser rapidement à la géodésique dans un espace à 3 dimensions.
2. Que dire des géodésiques à la surface d'un cylindre ?
3. Montrer que les géodésiques à la surface d'une sphère sont des grands cercles, *i.e.* des cercles dont le centre coïncide avec celui de la sphère.
   Indice : prendre le point A sur un des pôles est probablement une bonne idée. Justifier proprement que l'on puisse faire ça.

Exercice 3 : La croisière

Un bateau restaurant propose une croisière-souper le long d'une rivière dont le courant s'écoule à une vitesse $v(t) = \omega(t - 19\text{h}00)^2$ dû à un barrage situé en amont. Les clients montent au moment où la rivière est calme, à 19h00, pour être déposés à 23h00 dans un hôtel situé à 20 km en aval. L'énergie consommée à chaque instant par le bateau est donné par la vitesse relative au carré ($\epsilon(\dot{x} - v)^2$). Pour les évaluations, on prendra $\omega = 1.5$ km/h^3.



1. Formuler l'énergie consommée par le bateau sous la forme d'une fonctionnelle de sa trajectoire $x(t)$.
2. Quelle énergie est consommée s'il choisit d'avancer à vitesse constante ($\dot{x} = \text{const.}$) ?
3. Utiliser une quantité conservée afin de trouver la trajectoire optimale à suivre.
4. Quelle énergie est consommée dans ce cas ? La comparer au cas précédent.
5. Esquisser la trajectoire $x(t)$ optimale du bateau.

Indications

— $\text{arccosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

— $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

— $\text{arcsinh}\,\frac{5}{12} = \text{arccosh}\,\frac{13}{12} = \ln\frac{3}{2}$