
Mécanique analytique — série 5

*Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch
fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch
adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch*

Exercice 1 : Problème de la surface minimale de révolution

Considérer la surface de révolution obtenue en prenant une courbe dans un plan (x, y) passant par deux points extrêmes donnés, $\mathcal{P}(1, 0)$ et $\mathcal{Q}(\cosh(2), 2)$, et en la faisant tourner autour de l'axe y . Trouver la courbe pour laquelle l'aire de la surface est minimale. Pour ce faire, paramétriser la courbe selon $(x(y), y)$ ou $(x, y(x))$, et utiliser une quantité conservée pour résoudre le système.

Indications :

- Pour que la paramétrisation $y(x)$ soit valable, on suppose que cette fonction est définie sur l'intervalle $[x_P, x_Q]$ et est monotone.
- Pour résoudre l'intégrale, effectuer le changement de variable $x = a \cosh(\theta)$ avec a et $\theta = \theta(y)$ à définir.

Exercice 2 : Problème de la brachistochrone

Sous l'action de la pesanteur un point matériel glisse sans frottement sur un rail de masse négligeable situé dans le plan vertical (x, y) . Si le point matériel est initialement immobile à l'origine $\mathcal{O}$, trouver la courbe donnant la forme du rail pour que le point matériel se déplace de l'origine au point $\mathcal{P}(x_0, y_0)$ en un temps minimal.

Indications :

- Utiliser la conservation de l'énergie pour obtenir la vitesse v de la masse en un point quelconque de la trajectoire en fonction de y .
- Choisir la paramétrisation $(x(y), y)$ ou $(x, y(x))$.
- Utiliser une quantité conservée pour résoudre le système.
- Est-il possible que la forme idéale du rail passe par un point plus bas que y_0 ?

Exercice 3 : Rotateurs couplés

Un point matériel de masse m_1 est contraint de se déplacer sur un cercle de rayon a . Un deuxième point matériel de masse m_2 est contraint de se déplacer sur un cercle de rayon b . Les deux cercles appartiennent à deux plans parallèles éloignés d'une distance z , tels que la ligne joignant les deux centres est perpendiculaire aux deux plans. Les deux masses sont attachées aux deux bouts d'un ressort de constante élastique k et de longueur au repos nulle.

- a) Ecrire le Lagrangien du système et déterminer les constantes du mouvement à l'aide des symétries du problème.
- b) Trouver le changement de coordonnées qui amène à une coordonnée cyclique correspondant à une des quantités conservées.