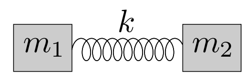
Mécanique analytique — série 4

Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch

Exercice 1 : Deux masses et un ressort



Deux particules de masse m_1 et m_2 sont reliées par un ressort de constante k et de longueur au repos L. Elles ne peuvent se déplacer que selon l'axe x.

a) Choisir des coordonnées généralisées pour décrire le système et écrire le Lagrangien.

b) Trouver les quantités conservées du système. Montrer, en particulier, que l'impulsion totale $\sum_i p_i = \sum_i m_i \dot{x}_i$ est conservée.

c) Trouver les positions d'équilibre, en choisir une et décrire de petites oscillations autour d'elle.

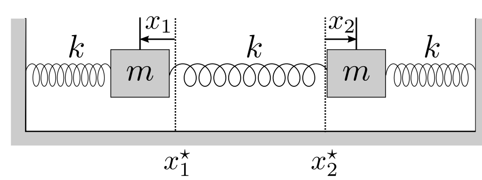
d) Trouver les modes d'oscillation ainsi que les coordonnées normales.

e) Exprimer le lagrangien et les quantités conservées en fonction des coordonnées normales.

f) Quel est le rayon de validité de ce résultat ?

g) Quelle solution devrait-on trouver dans la limite $m_2 \gg m_1$; est-ce le cas ?

Exercice 2 : Deux masses et trois ressorts



On considère deux masses m reliées entre elles par un ressort de raideur k, qui glissent sans frottement sur un plan horizontal. Chaque masse est de plus reliée par un ressort de raideur k à un mur. L'allongement des trois ressorts est nul quand $x_1 = x_2 = 0$ (voir figure).

a) Ecrire le lagrangien du système.

b) Ecrire les équations d'Euler-Lagrange.

c) Trouver les solutions harmoniques de ces équations (fréquences $\omega_\pm$ et mouvements $\vec{A}_\pm$ propres). On suppose $\vec{x} = \vec{A}\exp^{i\omega t}$.

d) Normaliser ces modes afin d'obtenir des coordonnées normales :

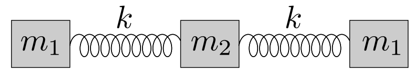
$$\begin{aligned} \vec{x} &= \Delta \begin{pmatrix} Q_+ \\ Q_- \end{pmatrix} \\ (\Delta)^T M \Delta &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

Réécrire le lagrangien dans ces coordonnées.

e) On déplace la masse 1 de sorte que $x_1(t = 0) = a$, $x_2(t = 0) = 0$, puis on lâche les masses sans vitesses initiales. Déterminer la trajectoire des deux masses.

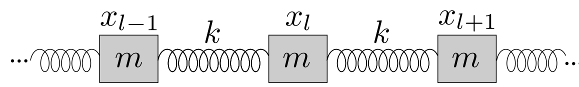
f) Donner le rayon de validité de cette solution.

Exercice 3 : Trois masses et deux ressorts



Trois particules de masse m_1, m_2 et m_1 sont reliées par deux ressorts de constante k et de longueur au repos L_1 et L_2. Elles ne peuvent se déplacer que selon l'axe x. Procéder comme à l'exercice 1.

Exercice 4 : Une infinité de masses !



On considère une série de masses m reliées entre elles par des ressorts de rigidité k et de longer au repos L. Pour les positions nous supposons que $x_l > x_{l-1}$.

a) Ecrire le Lagrangien du système. Pour l'instant, ignorer ce qu'il se passe aux bords.

b) Ecrire les équations d'Euler-Lagrange pour la masse l.

c) Trouver les points d'équilibre $x_l^\star$ et donner un ansatz harmonique en x et t pour des petites variations autour de $x_l^\star$.

d) Déduire la relation entre fréquence temporelle et nombre d'onde (relation de dispersion) utilisant l'ansatz trouvé à la question précédente.

e) On suppose maintenant que le système est périodique, i.e. $m_{l+N} = m_l$. Quelles sont les solutions possibles pour q ?

f) Donner le rayon de validité de cette solution.

1 Devoir 3 : Le Lagrangien du champ EM

Dans cet exercice, nous étudions un exemple très important d'un Lagrangien pour lequel le term cinétique prend une forme non-triviale.
Comme vous le savez, une particule chargée (charge q) se déplaçant avec une vitesse $\mathbf{v}$ dans une champ électrique $\mathbf{E}$ et magnétique $\mathbf{B}$ est soumise à la force de Lorentz donnée par :

$$\mathbf{F} = q\left[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right] . \tag{1}$$

1. Par les équations de Maxwell, nous savons que les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ peuvent être écrits en termes d'un potentiel scalaire $\phi(\mathbf{x}, t)$ et d'un potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} , \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} . \end{aligned} \tag{2}$$

   Montrez que les champs électriques et magnétiques sont invariants (i.e. ne change pas) si l'on transforme les potentiels de la façon suivante

$$\begin{aligned} \phi \to \phi' &= \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t} , \\ \mathbf{A} \to \mathbf{A}' &= \mathbf{A} - \nabla\chi , \end{aligned} \tag{3}$$

   où χ est une fonction arbitraire de l'espace et du temps. Une telle transformation s'appelle une transformation de jauge.

2. **(Optionel)** Pour deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, où $\mathbf{a}$ ne dépend pas de $\mathbf{x}$, montrez que

$$\mathbf{a} \times \left[\nabla \times \mathbf{b}\right] = \nabla\left(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\right) - \left(\mathbf{a} \cdot \nabla\right)\mathbf{b} . \tag{4}$$

3. En utilisant la formule vectorielle démontrée au point précédent, montrez que la force de Lorentz peut être écrite de la façon suivante :

$$\mathbf{F} = q\left[-\nabla\phi - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \nabla\left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\right)\right] \tag{5}$$

4. Montrez qu'en partant du Lagrangien suivant, nous obtenons les équations du mouvement d'une particule chargée soumise à la force de Lorentz

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - q\left[\phi - \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}\right] . \tag{6}$$

5. Comme vu durant le cours, deux Lagrangiens ne différant que par une dérivée totale d'une fonction $W(\mathbf{x}, t)$ mènent aux mêmes équations du mouvement et sont donc équivalents. En utilisant ce résultat, montrez que si l'on applique la transformation en eq.3 au Lagrangien du champ électromagnétique, les équations du mouvement sont invariantes, comme prévu au point 1. Nous voyons donc que la jauge choisie χ n'a pas d'influence physique, puisqu'elle ne change pas les équations du mouvement.

6. Considérez le cas où les potentiels ϕ et $\mathbf{A}$ ne dépendent pas de z ni du temps, i.e. $\phi = \phi(x, y)$ et $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y)$. Trouvez deux quantités conservées du système.