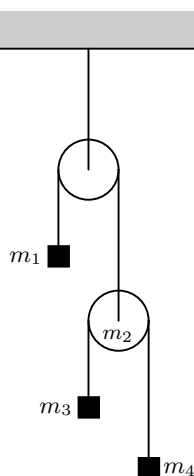


Mécanique analytique — série 2

*Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch
fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch
adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch*

Exercice 1 : Machine d'Atwood

Considérer le dispositif suivant soumis à la seule action de la pesanteur :



- Paramétrer les positions des masses et donner les contraintes de ce système.
- Ecrire les équations de Newton pour les quatre masses et déterminer leur accélération.
- Que peut-on dire de l'accélération de m_1 si les masses m_1 et m_2 sont égales ? Et si les masses satisfont l'égalité $m_1 = m_2 + m_3 + m_4$?
- Quelles sont les limites de cette description ?

Exercice 2 : Particule sur un cylindre

Considérer une particule de masse m , soumise à la gravité, contrainte à se déplacer sur un cylindre vertical de rayon R .

- Trouver les équations du mouvement.
- Trouver une condition initiale afin que la particule revienne au point de départ après N tours.

Exercice 3 : Particule sur un rail en 2D (pour les courageux)

Considérer une particule de masse m qui se déplace sans frottement sur un rail dont la forme est donnée par $y = f(x)$, soumise à la force de gravitation. Trouver une équation différentielle du second ordre satisfaite par f définissant la forme du rail pour que le mouvement soit harmonique en x .

Exercice supplémentaire 1 : Gyroscope

Lorsqu'on cherche à résoudre un problème de physique, il est souvent crucial de choisir un référentiel adéquat. Le gyroscope est un excellent exemple d'un tel système, où le bon choix de référentiels peut énormément simplifier la vie.

Considérez une tige rigide de longueur L de masse négligeable. A une de ses extrémités est attachée une disque de rayon R , de masse totale M et d'épaisseur négligeable. Le disque est attaché à la tige par son centre, toujours perpendiculaire à la tige et libre de tourner sans frottements autour de cette dernière. L'autre extrémité de la tige est fixée à un point O , autour duquel elle est libre de tourner sans frottements.

1. Calculez les 2 moments d'inertie principaux du disque suivants : le premier autour de l'axe perpendiculaire passant par son centre, le second dans le plan du disque et passant par son centre. Que pouvez vous dire du troisième axe d'inertie ?
2. Supposons que la tige soit dirigée selon un certain vecteur $\mathbf{e}_r$, formant un angle θ avec l'axe z et se trouvant dans un plan formant un angle φ avec l'axe x . Trouvez le tenseur d'inertie $\mathcal{I}$ du solide total (tige + disque) exprimé dans le référentiel $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ associé au solide, pour une rotation autour du point O .
3. Considérez maintenant le référentiel Cartésien habituel $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. Quelle transformation devriez-vous appliquer à $\mathcal{I}$ pour trouver le tenseur d'inertie $\mathcal{I}'$ exprimé dans le référentiel $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$? Il n'est pas nécessaire de calculer explicitement la forme finale de $\mathcal{I}'$.
4. Supposons maintenant de connaître $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ et $\dot{\psi}$, où $\dot{\psi}$ est la vitesse angulaire autour de $\mathbf{e}_r$, i.e. $\boldsymbol{\omega}_\psi = \dot{\psi}\mathbf{e}_r$. Exprimez la vitesse angulaire totale $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_r + \omega_2\mathbf{e}_\theta + \omega_3\mathbf{e}_\varphi$, obtenue en prenant la somme vectorielle des vitesses angulaires.
5. Calculez le moment cinétique total L par rapport au point O , exprimé dans le référentiel $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$.
6. En prenant la gravité dirigée selon $\mathbf{e}_z$, écrivez le théorème du moment cinétique en utilisant les variables θ , φ and ψ .
7. Trouvez la relation entre $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ et θ lorsque θ est constante dans le temps.