Mécanique analytique — série 0

Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch

Exercice 1 : Fonctions de plusieurs variables

Méthode : différentiation d'une fonction de plusieurs variables
La définition d'une fonction $f(\alpha, \alpha')$ où α' est la dérivée de α doit en réalité s'interpréter comme la définition de $f(x, y)$ où x et y sont deux variables muettes, indépendantes. Dans ce contexte, α' n'est donc pas une fonction de α (et vice versa), et l'on aura $\partial\alpha'/\partial\alpha = 0$ et $\partial\alpha/\partial\alpha' = 0$.

a) Soit la fonction f définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

avec x, y deux variables indépendantes. Exprimer la différentielle totale df.

b) On considère maintenant que y est également une fonction de x. Comment est modifiée la différentielle totale ?

c) Soit maintenant la fonction g définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, \dot{y}) &\longmapsto g(x, y, \dot{y}) \end{aligned}$$

où y est désormais une fonction de deux variables, $y(x, t)$, et où $\dot{y} = dy/dt$. On suppose d'abord que x ne dépend pas de t. Calculer dg/dt ainsi que $\partial g/\partial t$. Ce résultat change-t-il si x est une fonction de t ?

d) Considérons maintenant la fonction suivante :

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$$

où q et $\dot{q}$ sont des fonctions du temps t.
Calculez explicitement

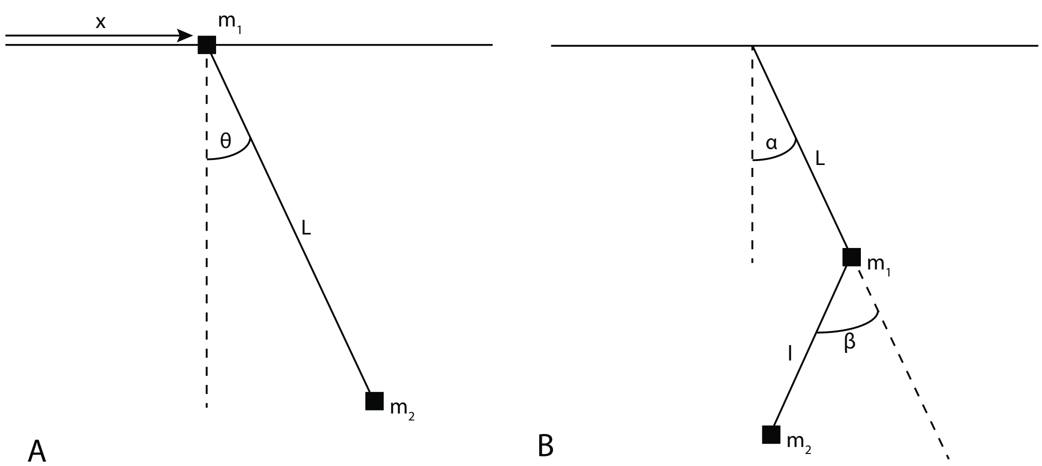
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

De quel type d'équation s'agit-il ?

Exercice 2 : Systèmes de coordonnées divers

Coordonnés Dans ce cours, nous serons souvent amenés à caractériser des systèmes en utilisant différents types de coordonnées (cartésiennes, polaires, cylindriques, sphériques). Il n'est pas inhabituel de définir un système avec un mélange de plusieurs types de coordonnées. Le but de cet exercice est de vous entraîner à la manipulation de ces grandeurs.

1. Pour les deux systèmes ci-dessous, calculer l'énergie totale en fonction des coordonnées indiquées.



A Le point matériel m_1 est libre de se déplacer sans frottements sur un axe horizontal. Le point matériel m_2 est attaché au point m_1 par un fil inextensible (considéré toujours tendu) de longueur L . Caluler l'énergie totale en fonction de $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}$ et L en tenant compte de la gravité.

B Pendule composé : On considère les deux fils toujours tendus. Calculer l'énergie totale en fonction de $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, L$ et l en tenant compte de la gravité.

2. Considérez une masse ponctuelle m contrainte à se déplacer sur un cylindre vertical de rayon R. La masse est rattachée à un point fixe sur l'axe central du cylindre par un ressort de longueur au repos nulle et de constante de raideur k. Nous négligeons la gravité dans cet exercice. Calculez la trajectoire du point pour des conditions initiales arbitraires ainsi que la force de soutien du cylindre. Discutez les différences qualitatives du mouvement en fonction des conditions initiales et des grandeurs caractéristiques du système.

   Rappel L'accélération en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{e_z}$$

Exercice supplémentaire 1 : Prérequis de Mathématiques et de Physique

Nous allons utiliser de manière intensive les outils mathématiques que vous avez appris jusqu'ici, aussi bien en théorie que durant les exercices. Ce premier devoir est donc un petit récapitulatif des connaissances que l'on s'attend que vous ayez acquises durant la premières année.

1. Calculez la limite suivante
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{-x}}{x}. \tag{1}$$
2. Trouver l'angle entre les deux vecteurs $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$ and $\mathbf{b} = (0, 1, -4)$.
3. Calculez les valeurs et vecteurs propres de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$
4. Trouvez la transformation U pour passer de la base canonique à la base des vecteurs propres de A. Comment change la matrice A sous cette transformation ?
5. Résoudre ces deux équations différentielles du premier ordre par la méthode de séparation des variables :
$$\frac{dy}{dx} = y^2 x^3 \quad | \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(x^2-1)}{y+1} \text{ pour } y \neq -1. \tag{3}$$
Note : pour la seconde équation, il n'est pas possible d'exprimer explicitement y en fonction de x. On s'arrêtera à une expression de la forme $f(y) = g(x)$.
6. Calculez le moment d'inertie d'un anneau de densité linéique τ et rayon R autour d'un axe perpendiculaire à l'anneau et passant par son centre.
7. Calculez le moment d'inertie du même anneau, mais par rapport à un axe parallèle au précédent et décalé d'une distance R.
8. Supposez que l'on ait creusé un tunnel traversant la planète terre, passant par son centre. Décrivez le mouvement d'un objet de masse m qui tombe dans le tunnel. On considère que le diamètre du tunnel est négligeable par rapport au rayon de la terre. Considérez une densité uniforme ρ de la planète.