Mécanique analytique — série 12

Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch

Exercice 1 : Billard plan rectangulaire

On se propose de déterminer les trajectoires périodiques d'un billard plan rectangulaire par la méthode des variables action-angle. Considérer un billard plan délimité par $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$, et étudier le mouvement d'un point matériel de masse m qui se déplace sans frottement à l'intérieur du billard subissant une réflexion élastique lorsqu'il rencontre une paroi. Ces réflexions sont décrites par :

$$\begin{array}{ccll} (p_x, p_y) & \rightarrow & (-p_x, p_y) & \text{sur les parois } x = 0 \text{ et } x = a \\ (p_x, p_y) & \rightarrow & (p_x, -p_y) & \text{sur les parois } y = 0 \text{ et } y = b \end{array}$$

a) Tracer les portraits de phase dans les plans (x, p_x) et (y, p_y).

b) Résoudre l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi pour le mouvement de la particule entre deux collisions sur les parois par la méthode de séparation des variables.

c) Déterminer les variables actions I_x et I_y associées aux mouvements suivant x et y.

d) Etablir l'expression pour l'énergie α_1 en fonction de I_x et I_y.

e) En déduire les fréquences du mouvement suivant x et y. Sous quelles conditions le mouvement est-il globalement périodique ? Donner deux exemples de trajectoires périodiques pour un billard carré.

Exercice 2 : Particule oscillante

Une particule de masse m se déplace dans un potentiel unidimensionnel donné par

$$V(x) = V_0 \tan^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

a) Tracer le potentiel et le portrait de phase.

b) Déterminer la fréquence des petites oscillations.

c) Déterminer la forme de la solution générale $W_\pm(x; E)$ de l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi. Exprimer le résultat sous forme intégrale.

d) Calculer la variable action I en fonction de E (voir indication). Noter que les points de rebroussements (bornes de l'intégrale) dépendent de E.

e) En déduire E en fonction de I, puis la fréquence des oscillations.

f) Dans quelle limite le résultat est-il compatible avec celui du point 2 ? Pourquoi ?

g) Déterminer la fréquence en fonction de E quand $E \gg V_0$. Interpréter le résultat.

Indication :

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+\alpha z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{\alpha}(\sqrt{\alpha+1} - 1) \quad \text{pour} \quad \alpha \geq -1\ .$$

Exercice 3 : Variable action

Une particule de masse m se déplace dans un potentiel unidimensionnel suivant, avec $k_-, k_+ > 0$:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}k_-\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 & 2x < -a \\ 0 & -a \leq 2x \leq \ \ a \\ \frac{1}{2}k_+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 & 2x > \ \ a \end{cases}$$

a) Esquisser précisément le potentiel et le portrait de phase.

b) En partant de l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi, calculer la variable action.

c) Pour $a = 0$, déterminer la fréquence des oscillations en fonction de l'énergie. Montrer que la fréqence est la moyenne harmonique $2\omega_1\omega_2/(\omega_1+\omega_2)$ des fréquences de deux oscillateurs harmoniques simples.

d) Toujours pour $a = 0$, discuter du comportement de la fréquence dans les cas limites $k_- \to 0$ et $k_- \to \infty$.

Exercice 4 : Double puits de potentiel

Une particule de masse m se déplace dans un potentiel unidimensionnel donné par

$$V(x) = V_0\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1\right]^2$$

a) Esquisser la forme du potentiel.

b) Trouver les minima du potentiel et déterminer la fréquence des petites oscillations autour de ces derniers.

c) Dessiner le portrait de phase.

d) Ecrire l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi. Exprimer la solution $W(E,x)$ sous forme intégrale.

e) Trouver les points de rebroussement de la trajectoire en fonction de l'énergie du système. Discuter le nombre de solutions différentes dans les cas $E > V_0$ et $E < V_0$. A quels mouvements correspondent ces solutions ?

f) Exprimer la variable action I en fonction de E sous forme intégrale. Distinguer les cas où $E > V_0$ et $E < V_0$.

g) Dans la limite $E \ll V_0$, calculer l'intégrale et en déduire la fréquence ω de l'oscillation. Retrouve-t-on le résultat du point 2 ?

Exercice 5 : Portraits de phase

a) Tracer les portraits de phase pour une particule de masse m se déplaçant dans les potentiels suivants :

(i) $V_1(x) = \dfrac{x^3}{\alpha^2} - \beta^2 x$ (ii) $V_2(x) = \lambda^2\sin^2(x)$ (iii) $V_3(r) = -\dfrac{\kappa^2}{r} + \dfrac{L^2}{r^2}$

b) Tracer les portraits de phase pour une particule de masse m décrite par les hamiltoniens suivants :

(i) $H_4 = \dfrac{p^2}{2m}\left(1 - \dfrac{q^2}{L^2}\right) + \xi q^4$ (ii) $H_5 = \dfrac{p^2}{2m} + \lambda pq + \xi q^4$