Mécanique Analytique

Notes de cours de Paolo De le Rios

February 18, 2021

Pour bien approcher la mécanique analytique il faut d'abord bien spécifier ce à quoi il faut s'attendre. On ne va pas introduire des phénomènes qui ne sont pas une conséquence des trois lois de Newton.
Pour ce qui concerne ce cours, les trois lois de Newton donnent une description complète et exacte de tous les phénomènes (systèmes) mécaniques. L'intérêt de ce cours est dans la formulation mathématique de la mécanique. Il n'est écrit nulle part que la formulation Newtonienne soit la plus appropriée, voir adaptée. On va donc se poser la question si on peut reformuler la mécanique (les trois lois) d'une façon mathématiquement plus puissante, qui nous permet de mieux mettre en évidence les relations entre concepts et phénomènes. Donc, dans la suite, on introduira les formalismes de Lagrange, de Hamilton et de Hamilton-Jacobi, en regardant ce que chacun d'entre eux aura à révéler. Encore une fois, ils ne vont pas nous dire des choses qui ne sont pas déjà contenues dans les lois de Newton. Tout simplement, ils vont mettre en évidence certaines relations, concepts et phénomènes.
On va commencer par quelques rappels.

1 Rappels

1.1 cinématique

La cinématique exprime les relations de base entre position, vitesse et accélération :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \tfrac{d}{dt}\vec{x} = \dot{\vec{x}} \\ \vec{a} &= \tfrac{d}{dt}\vec{v} = \dot{\vec{v}} \end{aligned} \tag{1}$$

Par intégration directe, on a donc

$$v(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}\left(t'\right) dt' \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{x}(0) + \int_0^t \vec{v}\left(t'\right) dt' = \vec{x}(0) + \int_0^t \left[\vec{v}(0) + \int_0^{t'} \vec{a}\left(t''\right) dt''\right] dt' = \\ &= \vec{x}(0) + \vec{v}(0)\cdot t + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \vec{a}\left(t''\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Une conséquence évidente est que, en l'absence d'accélération, la vitesse est une constante (vectorielle : constante en intensité, direction et sens) En principe, si l'on connaît les positions et vitesses initiales, ainsi que les accélérations à chaque instant, on peut intégrer les équations.
Le problème reste tout de même que les particules (objets) dont l'on cherche l'évolution temporelle, interagissent entre elles. Donc les accélérations dépendent elles aussi des positions. Le problème est donc assez complexe.

1.2 Les trois lois de Newton

Dans son ouvrage les "Principia" (1687... en latin!), Newton a défini les lois mathématiques nécessaires pour décrire tous les systèmes mécaniques. On peut voir ces lois comme les postulats nécessaires à définir un bâtiment mathématique complet et consistant. Comme on le sait de la physique générale, il y a trois lois :

1. Un corps sur lequel aucune force est appliquée, reste dans son état de mouvement rectilinéaire uniforme, c'est à dire à vitesse constante (vectorielle)

2. $\vec{F} = m\vec{a}$

3. Loi de action-réaction

La deuxième loi est bien évidemment phénoménologique : elle est déduite des observations.

Que peut on dire de la première loi ? Utilisant la deuxième loi en absence de force :

$$m\vec{a} = 0 \implies \vec{a} = 0 \implies \vec{v} \text{ constante} \tag{4}$$

La 1ère loi est-elle donc vraiment nécessaire ?
Disons que dans mon référentiel il n'y a pas de force sur un ballon : sa vitesse $\vec{v}$ reste constante. Je dis à une amie à moi qu'il n'y a pas de force, mais elle mesure quand même une accélération (vitesse non constante), donc elle a seulement deux possibilités :

1. Je suis un menteur, et en réalité il y a une force sur le ballon
2. La première loi ne s'applique pas pour elle (et en conséquence la deuxième non plus!).

Attention : Il faut définir rigoureusement l'expression "pour elle". Elle signifie dans son référentiel. On peut donc dire que la première loi a à faire avec les référentiels. Elle nous dit quels sont les référentiels qui partage les mêmes loi (c'est à dire qui sont les "observateurs" qui tirent les mêmes conclusions en observant le même système). En mécanique, la première loi affirme donc :

- Tous les référentiels dans lesquels un corps bouge de manière uniforme ($\vec{v} = const$), si il n'est pas soumis à une force, forment un jeu de référentiels "galiléens"(ou "inertiels") et ils sont en mouvement relatif uniforme (vitesse relative constante)

Tous ces référentiels "partagent" les mêmes lois.
Après cette discussion sur ce qui se cache derrière la première loi, il est temps pour un rappel de mécanique Newtonienne.

1.3 Rappel de mécanique Newtonienne

1.3.1 Une seule particule de masse m

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) - \frac{dm}{dt}\vec{v} = \dot{\vec{p}} - \dot{m}\vec{v} \tag{5}$$

on considère uniquement les cas ou la masse ne varie pas dans le temps ($\dot{m} = 0$)

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} \qquad\qquad \dot{\vec{p}} = m\vec{v} = \text{impulsion} \tag{6}$$

En l'absence de forces, $\vec{F} = 0$, on a :

$$\dot{\vec{p}} = 0 \quad \implies \quad \vec{p} = const \qquad \text{(on dit que } \vec{p} \text{ est conservé)} \tag{7}$$

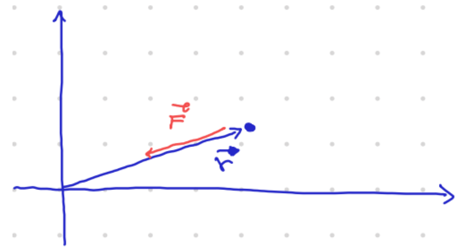
Moment cinétique On peut également calculer le moment cinétique $\vec{L}$ défini comme : $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$.
On calcule la variation temporelle de $\vec{L}$ sous l'action d'une force $\vec{F}$:

$$\dot{L} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) = \vec{r} \wedge \dot{\vec{p}} + \dot{\vec{r}} \wedge \vec{p} = \tag{8}$$

$$= \vec{r} \wedge \vec{F} + \vec{v} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge \vec{F} + m\underbrace{(\vec{v} \wedge \vec{v})}_{=0} = \underbrace{\vec{r} \wedge \vec{F}}_{\text{Moment de force}} \tag{9}$$

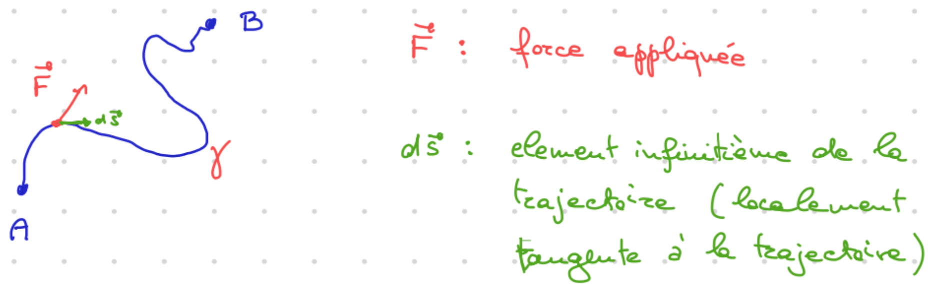
Donc le moment cinétique est conservé lorsque $\dot{\vec{L}} = 0$, ce qui est vrai si

- $\vec{F} = 0$ pas de force agissante sur la particule
- $\vec{F} \parallel \vec{r}$ c'est le cas d'une force centrale



On insiste sur la "conservation" car ce concept va être centrale pour tout le cours.

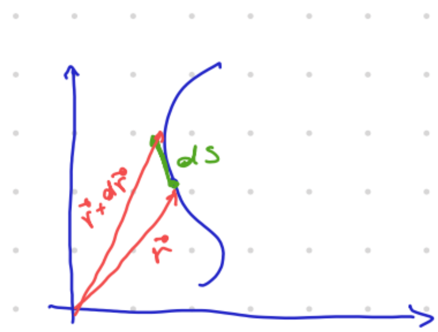
Travail et Energie On regarde maintenant l'énergie. Si on applique une force $\vec{F}$ lorsque l'on déplace une particule d'un point A à un point B, au long d'une trajectoire γ, on a que le travail est



$$W_{AB,\gamma} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{10}$$

$d\vec{s}$ dépends de la paramétrisation.
Si on choisit de paramétriser la courbe par le temps

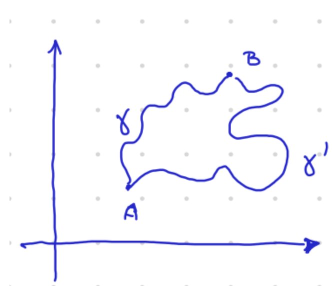
$$\begin{aligned}
W_{AB,\gamma} &= \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F} \cdot \vec{v} dt && (11)\\
&\underbrace{=}_{\text{2ème loi}} \int_{A,\gamma}^{B} \left(\frac{d}{dt}\vec{p}\right) \cdot \vec{v} dt = \int_{A,\gamma}^{B} m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt && (12)\\
&= \int_{A,\gamma}^{B} m\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) dt && (13)\\
&= \int_{A,\gamma}^{B} \frac{d}{dt} \underbrace{(\frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v})}_{\text{énergie cinétique}} dt = T_B - T_A && (14)
\end{aligned}$$



paramétrisation temporelle
$d\vec{s} = d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v} dt$

Donc le travail au long d'une trajectoire détermine le changement d'énergie cinétique.

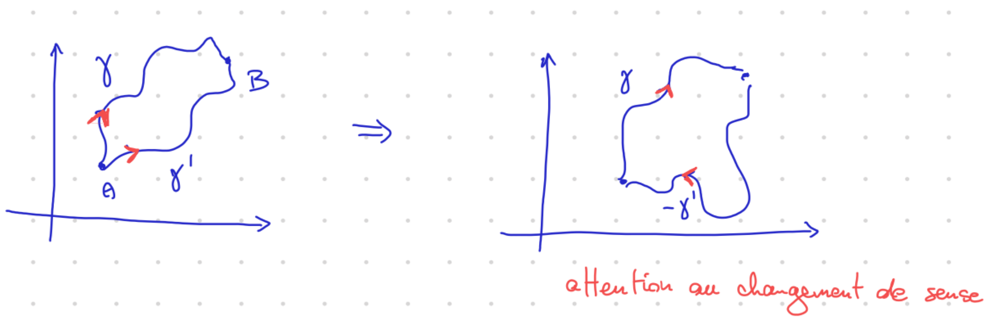
système conservatifs Que se passe-t-il si l'on va de A à B selon deux trajectoires différentes ? Est-ce que $W_{AB,\gamma}$ et $W_{AB,\gamma'}$ sont égales ?



Si ils ne sont pas les mêmes, on ne peut pas dire grand choses. Mais si ils sont égales :

$$W_{AB,\gamma} = W_{AB,\gamma'} \Rightarrow \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{A,\gamma'}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{s} \tag{15}$$

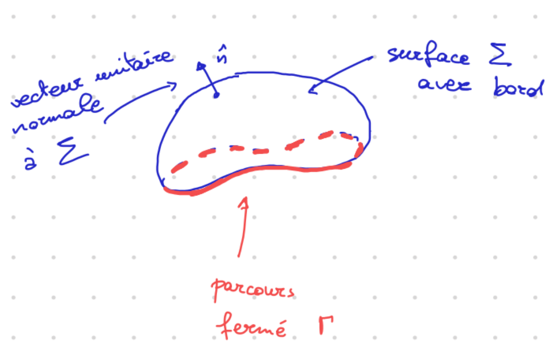
$$\Rightarrow \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{s}\cdot - \int_{A,\gamma'}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0 \tag{16}$$



On peut donc écrire

$$0 = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{s} - \int_{A,\gamma'}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{A,-\gamma'}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \oint_{\underbrace{\gamma \cup (-\gamma')}_{\Gamma}} \vec{F}\cdot d\vec{s} \tag{17}$$

Or, à l'aide du théorème de Stokes :



$$\oint_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} rot(\vec{F})\cdot \hat{n}\ d\Sigma = 0 \tag{18}$$

Où Σ est une quelconque surface avec pour bord Γ. Si cette dernière relation est vraie pour tout Γ, et pour une surface Σ (avec bord Γ), alors

$$rot\vec{F} = 0 \quad \text{partout} \tag{19}$$

Donc $\vec{F}$ est irrotationnel.

potentiel Un champs vectoriel irrotationnel implique que le vecteur peut être écrit comme gradient d'une fonction. Dans le cas particulier qu'on est en train de regarder :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \quad \text{énergie potentielle} \tag{20}$$

Attention au signe moins qui n'est qu'une convention dans la définition. Les forces avec cette propriété sont dites "conservatives".
Finalement on revient au travail de la force pendant le transport de A à B (qui ne depends pas de la trajectoire si la force dérive d'un potentiel)

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (-\nabla\vec{V} \cdot d\vec{s}) = -\int_A^B \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s} \tag{21}$$

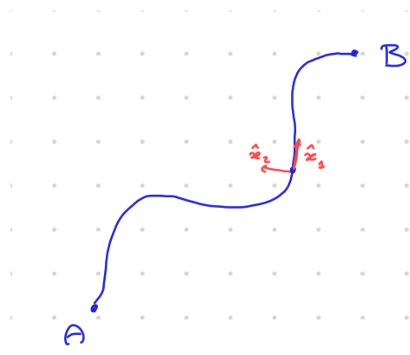
On rappelle que

$$\nabla\vec{V} = \frac{dV}{dx}\hat{x} + \frac{dV}{dy}\hat{y} + \frac{dV}{dz}\hat{z} \tag{22}$$

Ou de manière plus générale :

$$\nabla\vec{V} = \sum_{i=1}^{d} \frac{dV}{dx_i}\hat{x}_i \quad \text{en d-dimension} \tag{23}$$

Mais le choix du système de coordonnées est arbitraire
On peut toujours choisir un système de coordonnés tel que un des vecteurs unitaires est localement tangente à la trajectoire et les autres sont perpendiculaires. Dans ce cas, celui tangent est parallèle à $\vec{ds}$ et donc



$$\nabla\vec{V} \cdot d\vec{s} = \left(\frac{dV}{dx_1} \underbrace{\hat{x}_1}_{tangent} + \frac{dV}{dx_2}\hat{x}_2 + \cdots + \frac{dV}{dx_d}\hat{x}_d \right) \cdot d\vec{s} \tag{24}$$

$$= \frac{dV}{dx_1}\hat{x}_1 \cdot d\vec{s} + \sum_{i=2}^{d} \frac{dV}{dx_i} \underbrace{\hat{x}_i \cdot d\vec{s}}_{=0} \tag{25}$$

Le deuxième terme est nul car tous les $\hat{x}_i$ sont perpendiculaires à $d\vec{s}$.

Finalement

$$\nabla\vec{V} \cdot d\vec{s} = \frac{dV}{dx_1}\hat{x}_1 \cdot d\vec{s} \tag{26}$$

Mais avec $d\vec{s} = \hat{x}_1 dx_1$:

$$\nabla\vec{V} = \frac{dV}{dx_1}dx_1 \tag{27}$$

Où on appelle x_1 la paramétrisation de la trajectoire.

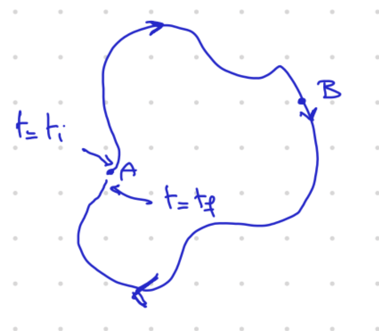
$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_{x_A}^{x_B} \frac{dV}{dx_1}dx_1 = V_A - V_B \tag{28}$$

On se rappelle que $\quad W_{AB} = T_B - T_A$
Et donc on a

$$T_B - T_A = V_A - V_B \quad \Rightarrow \quad \underbrace{T_A + V_A}_{E_A} = \underbrace{T_B + V_B}_{E_B} = \text{énergie mécanique totale} \tag{29}$$

Théorème de l'énergie mécanique Donc, pour un système de forces conservatives, l'énergie mécanique totale est conservée.

On remarque qu'une propriété d'un système de forces conservatives est qu'elles ne dépendent pas du temps. En effet :



Si la force pouvait changer dans le temps, alors on pourrait imaginer qu'elle ne soit pas nulle quand le système passe de A à B, mais qu'elle soit nulle lorsque le système revient en arrière.

Alors, $W_{AB,\gamma} \neq 0$ mais $W_{AB,-\gamma'} = 0$ et donc

$$\oint_{\gamma \cup (-\gamma')} \vec{F} \cdot d\vec{s} \neq 0 \tag{30}$$

Bien évidement on peut organiser le changement temporel de façon à ce que l'intégrale sur la boucle soit quand même nul, mais il s'agit de cas particuliers et non pas généraux.
Donc, une propriété importante d'une force conservatives est d'être <u>constante dans le temps</u>

1.3.2 N particules

Le jeu des positions est $\{\vec{r_i}\}_{i=1}^N$, des vitesses est $\{\vec{v_i}\}_{i=1}^N$ et des impulsions est $\{\vec{p_i}\}_{i=1}^N$. Chaque particule interagit avec les autres : $\vec{F_{ij}}$ est la force que la i-ème particule applique sur la j-ème.
Donc pour la deuxième loi de Newton

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_j \vec{F}_{ji} + \underbrace{\vec{F}_i^{ext}}_{\text{froce externe agissante sur la partiucle i}} \tag{31}$$

On somme sut toutes les particules

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N}_{i \neq j} \vec{F}_{ji} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \tag{32}$$

Somme et dérivée sont opérations linéaires, donc on peut échanger l'ordre d'exécution : $\sum_i \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i$. $i \neq j$ car une particule n'applique pas une force sur elle-même.

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{P}_i\right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \tag{33}$$

On définit le centre de masse $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$ où $M = \sum_{i=1}^N m_i$ est la masse totale du système.

La vitesse du centre de masse est

$$\dot{\vec{R}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} p_i \tag{34}$$

$$\Rightarrow \quad M\dot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \vec{P} \quad \text{impulsion totale du système} \tag{35}$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{ext}}_{\vec{F}_{\text{tot}}^{ext}} \tag{36}$$

Maintenant on va travailler sur $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}$. D'abord on l'écrit comme somme de ses deux moitiés :

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji} \tag{37}$$

Mais lorsque l'on somme sur les deux indices, on peut toujours échanger les indices : cela revient à changer l'ordre de la somme sans changer le résultat.

<u>exemple</u> N = 3

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}F_{ij} &= \sum_{i=1}^{3}\left(\vec{F}_{i1}+\vec{F}_{i2}+\vec{F}_{i3}\right) && (38)\\
&= \left(\vec{F}_{11}+\vec{F}_{12}+\vec{F}_{13}\right)+\left(\vec{F}_{21}+\vec{F}_{22}+\vec{F}_{23}\right)++\left(\vec{F}_{31}+\vec{F}_{32}+\vec{F}_{33}\right) && (39)\\
&= \left(\vec{F}_{11}+\vec{F}_{21}+\vec{F}_{31}\right)+\left(\vec{F}_{12}+\vec{F}_{23}+\vec{F}_{32}\right)+\left(\vec{F}_{13}+\vec{F}_{23}+\vec{F}_{33}\right) && (40)\\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(\vec{F}_{1i}+\vec{F}_{2i}+\vec{F}_{3i}\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\vec{F}_{ji} && (41)
\end{aligned}$$

C'est donc un long détour pour montrer que lorsque l'on a une somme sur plusieurs double indices, on peut les échanger.

Donc on reprend la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji} = && (42)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\vec{F}_{ji} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}\left(\vec{F}_{ji}+\vec{F}_{ij}\right) && (43)
\end{aligned}$$

La troisième loi de Newton nous dit : $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$. Donc

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\vec{F}_{ji}+\vec{F}_{ij}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}\left(\vec{F}_{ji}-\vec{F}_{ij}\right) = 0 \tag{44}$$

Finalement, on arrive à :

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} = 0 + \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} \tag{45}$$

En absence de force externes, ou si la somme des forces externes est nulles, alors

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{l'impulsion totale du système est conservée} \tag{46}$$

On voit alors que, par rapport au cas d'une seule particule, l'impulsion totale est conservée grâce à la troisième loi de Newton.

Moment cinétique On porte notre attention au moment cinétique

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i \tag{47}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \wedge \frac{d\vec{p}_i}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \overrightarrow{p_i} \tag{48}$$

On somme à nouveau sur i

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \underbrace{\frac{d\vec{p}_i}{dt}}_{\text{2ème loi}} + \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge \vec{p}_i}_{=0 \text{ car } \dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i \| \vec{p}_i} \tag{49}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \left(\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji} \right) + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{ext} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \vec{F}_i^{ext}}_{\text{moment des forces externes}} \tag{50}$$

On travaille la double somme

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \vec{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} \tag{51}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ij} = \tag{52}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_j \wedge \left(-\vec{F}_{ji} \right) = \tag{53}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} - \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ji} \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \wedge vecF_{ji} = \tag{54}$$

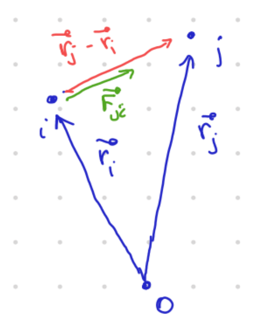
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_{ji} \wedge \vec{F}_{ji} \tag{55}$$

Finalement, en définissant

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i \quad \text{moment cinétique totale} \tag{56}$$

On a

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \wedge \vec{F}_{ji} + \sum_{i} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{ext} \tag{57}$$



Théorème du moment cinétique $\vec{L}$ est conservé si

$$\sum_{i} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{ext} = 0 \quad \text{(typiquement si } \vec{F}_i^{ext} = 0 \; \forall i\text{) ou centrale} \tag{58}$$

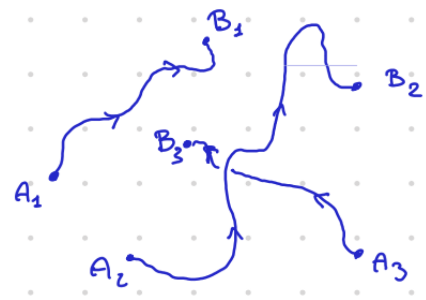
et si

- Les particules n'interagissent pas ($\vec{F}_{ij} = 0 \; \forall ij$)

  ou

- $\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \quad \Leftarrow$ Forces centrales !!!

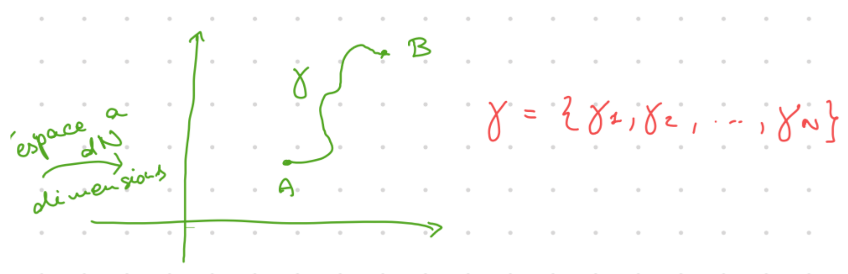
Energie et Travail Par analogie à ce qu'on a fait pour une particule seule, on va aussi s'intéresser à l'énergie. On procède selon les mêmes lignes que pour une seule particule. Les forces sont appliquées aux particules pour les transporter de A à B : $\{\vec{r}_{i,A}\} \to \{\vec{r}_{i,B}\}$



$$\text{Le travail est} \qquad W_{AB} = \sum_i \int_{A,\gamma_i}^{B} \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i \tag{59}$$

Où γ_i est le chemin de A à B pour la i-ème particule et $d\vec{s}_i$ est l'infinitième tangent à γ_i.

> Note : même si le système est composé par N particules, on peut, mathématiquement, le voir comme un seul point dans un espace à dimension d·N (donc N pour des particules en 1-dimension, 2N en 2-dimensions, 3N en 3-dimensions, etc ...). Dans le reste du cours, on utilisera souvent 3N, pour simplicité, tout en sachant qu'il s'agit d'un cas particulier.



Alors on reprend le travail :

$$W_{AB,\gamma} = \sum_i \int_{A\gamma_i}^{B} \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \int_{A\gamma_i}^{B} \dot{\vec{p}}_i \cdot \overbrace{\vec{v}_i dt}^{d\vec{s}_i} \tag{60}$$

$$= \sum_i \int_{t_A\gamma_i}^{t_B} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} dt = \sum_i (T_{B_i} - T_{A_i}) = T_B - T_A \tag{61}$$

$$\text{Et l'on définit l'énergie cinétique totale} \quad T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \tag{62}$$

De plus, si les forces entre les particules sont conservatives (aussi bien que les forces externes) on aura :

$$W_{AB,\gamma} = \sum_i^B \int_{A,\gamma_i}^{B} \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \int_{A,\gamma_i}^{B} \left[\sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{ext} \right] \cdot d\vec{s}_i \tag{63}$$

$$= \sum_i \sum_j \int_{A_1\gamma_i}^{B} \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i + \sum_i \int_{A_1 j_i}^{B} \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{s}_i \tag{64}$$

$$= \sum_i \sum_j \int_{A_1\gamma_i}^{B} \left(-\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ji} (\vec{r}_i, \vec{r}_j) \right) \cdot d\vec{s}_i - \sum_i \int_{A,\gamma_i}^{B} \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_i^{ext} (\vec{r}_i) \cdot d\vec{s}_i \tag{65}$$

On met en évidence que le gradient doit être pris par rapport à la position de la particule sur laquelle la force est appliquée :

$$\vec{F}_{ji} : \text{force appliquée sur i par la particule j} \tag{66}$$
$$\Rightarrow \text{gradient par rapport à } \vec{r}_i \tag{67}$$

Aussi, on a gardé les indices pour les potentiels, V_{ij} et V_i, car chaque particule peut être soumise à des forces différentes, et de même pour chaque couple de particules : deux particules chargées interagissent par biais de l'électrostatique et de la gravitation; deux particules neutres interagissent uniquement par biais de la gravitation.

<u>deuxième terme</u> La partie associées aux forces externes est simple :

$$-\sum_i \int_{A,\gamma_i}^{B} \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_i^{ext}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{s}_i = -\sum_i \int_{A,\gamma_i}^{B} \frac{dV_i^{ext}}{ds_i} ds_i \tag{68}$$
$$= -\sum_i \left[V_i^{ext}(\vec{r}_B) - V_i^{ext}(\vec{r}_A)\right] = \sum_i V_i^{ext}(\vec{r}_A) - \sum_i V_i^{ext}(\vec{r}_B) = \tag{69}$$
$$= V_{\text{tot}}^{ext}(\{\vec{r}_{iA}\}) - V_{\text{tot}}^{ext}(\{\vec{r}_{iB}\}) \tag{70}$$

$$\text{Où l'on a définit} \quad V_{\text{tot}}^{\text{ext}}\ (\vec{r}_i\}) = \sum_{i=1}^{N} V_i^{ext}(\vec{r}_i) \tag{71}$$

<u>premier terme</u> La partie avec les interactions entre particules est un peu plus compliquée :

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \int_{A,\gamma_i}^{B} \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ji}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \cdot d\vec{s}_i = -\frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}}_{\text{échange d'indices}} \left[\int_{A,\gamma_i}^{B} \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ji}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \cdot d\vec{s}_i + \int_{A,\gamma_j}^{B} \vec{\nabla}_{\vec{r}_j} V_{ij}(\vec{r}_j \vec{r}_i) \cdot d\vec{s}_j\right] \tag{72}$$

On fait les hypothèses (raisonnables) suivantes :

1. $V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = V_{ji}(\vec{r}_j, \vec{r}_i)$

   c'est à dire les deux particules interagissent par biais d'un potentiel ne dépendant pas de l'ordre. On pense par exemple à l'interaction coulombienne ou gravitationnelle

   - Electrostatique $\quad V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$
   - Gravitationnelle $\quad V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = -G\frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$

2. $V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ comme conséquence

On peut donc travailler sur la partie

$$\int_{A,\gamma_i}^{B} \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)\, d\vec{s}_i + \int_{A_i\gamma_i}^{B} \vec{\nabla}_{\vec{r}_j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \cdot d\vec{s}_j \tag{73}$$

En effet

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}_j} \vec{V}_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} \vec{V}_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = -\vec{\nabla} \vec{r}_{ij} V_{ij}(|\vec{r}_{ij}|) \qquad \text{with } \vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \tag{74}$$

On peut le voir de manière plus simple en 1 dimension :

$$\frac{d}{dx_i} f(x_i - x_j) = \frac{d(x_i - x_j)}{dx_i} \frac{df(x_i - x_j)}{d(x_i - x_j)} = 1 \cdot \frac{df(x_{ij})}{dx_{ij}} \tag{75}$$
$$\frac{d}{dx_j} f(x_i - x_j) = \frac{d(x_i - x_j)}{dx_j} \frac{df(x_i - x_j)}{d(x_i - x_j)} = -1 \cdot \frac{df(x_{ij})}{dx_{ij}} \tag{76}$$

et donc

$$\frac{d}{dx_i} f\left(x_i - x_j\right) = -\frac{d}{dx_j} f\left(x_i - x_j\right) \tag{77}$$

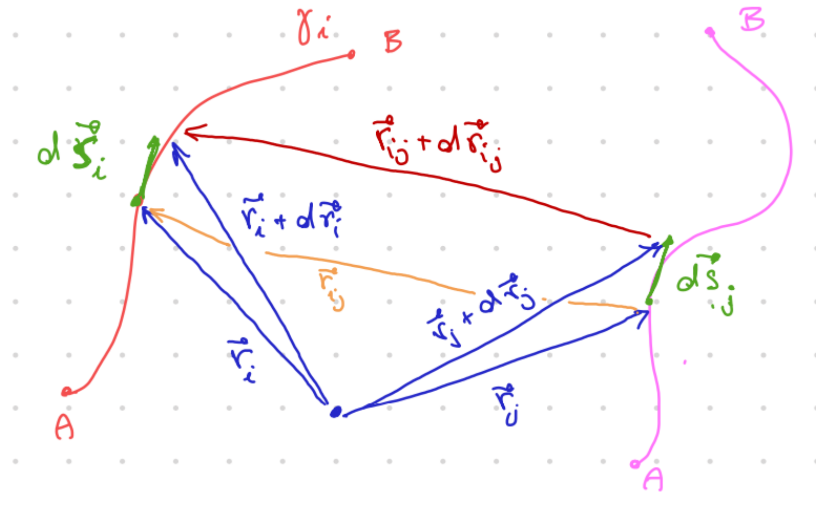
Le cas en plusieurs dimension avec le gradient est très similaire :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} f\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) &= \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} f\left(\left\{x_i^\alpha - x_j^\alpha\right\}_{\alpha=i}^{d}\right) \qquad \alpha \text{ marque les composantes} &(78)\\
&= \sum_{\alpha=1}^{d} \frac{d}{dx_i^\alpha} f\left(\left\{x_i^\alpha - x_j^\alpha\right\}\right) \cdot \hat{x}^\alpha \qquad \hat{x}^\alpha \text{ vecteur unitaire en direction } \alpha &(79)\\
&= \sum_{\alpha=1}^{d} \frac{d\left(x_i^\alpha - x_j^\alpha\right)}{dx_i^\alpha} \frac{df\left(x_i^\alpha - x_j^\alpha\right)}{d\left(x_i^\alpha - x_j^\alpha\right)} \hat{x}^\alpha &(80)\\
&= \sum_{\alpha=1}^{d} \frac{df\left(x_i^\alpha - x_j^\alpha\right)}{d\left(x_i^\alpha - x_j^\alpha\right)} \hat{x}^\alpha = \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} f\left(\vec{r}_{ij}\right) &(81)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_{\vec{r}_j} f\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) &= \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} f\left(\left\{x_i^\alpha - x_j^\alpha\right\}_{\alpha=i}^{d}\right) &(82)\\
&= \sum_{\alpha=1}^{d} \frac{d}{dx_j^\alpha} f\left(\left\{x_i^\alpha - x_j^\alpha\right\}\right) \cdot \hat{x}^\alpha &(83)\\
&= \sum_{\alpha=1}^{d} \frac{d\left(x_i^\alpha - x_j^\alpha\right)}{dx_j^\alpha} \frac{df\left(x_i^\alpha - x_j^\alpha\right)}{d\left(x_i^\alpha - x_j^\alpha\right)} \hat{x}^\alpha &(84)\\
&= \underbrace{-}_{\textbf{signe !}} \sum_{\alpha=1}^{d} \frac{d\left(x_i^\alpha - x_j^\alpha\right)}{dx_i^\alpha} \frac{df\left(x_i^\alpha - x_j^\alpha\right)}{d\left(x_i^\alpha - x_j^\alpha\right)} \hat{x}^\alpha = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} f\left(\vec{r}_{ij}\right) &(85)
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_{A,x_i}^{B} \vec{\nabla}_{r_i} \vec{V}_{ij}\left(\vec{r}_{ij}\right) \cdot d\vec{s}_i + \int_{a,\gamma_j}^{B} \vec{\nabla}_{\vec{r}_j} V_{ij}\left(\vec{r}_{ij}\right) \cdot d\vec{s}_j = \int_{A,\gamma_i}^{B} \vec{\nabla}_{r_{ij}} V_{ij}\left(\vec{r}_{ij}\right) \cdot d\vec{s}_i - \int_{A,\gamma_j}^{B} \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} V_{ij}\left(\vec{r}_{ij}\right) \cdot d\vec{s}_j \tag{86}$$



On analyse les parcours γ_i et γ_j, $d\vec{s}_i$ et $d\vec{s}_j$

On a

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{ij} &= \vec{r}_i - \vec{r}_j &(87)\\
\vec{r}_{ij} + d\vec{r}_{ij} &= \left(\vec{r}_i + d\vec{r}_i\right) - \left(\vec{r}_j + d\vec{r}_j\right) = \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) + \left(d\vec{r}_i - d\vec{r}_j\right) &(88)\\
\Rightarrow d\vec{r}_{ij} &= d\vec{r}_i - d\vec{r}_j = d\vec{s}_i - d\vec{s}_j &(89)
\end{aligned}$$

Et la courbe d'évolution de $\vec{r}_{ij}$ de A à B est γ_{ij}.

$$\int_{A,\gamma_i}^{B} \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} V_{ij}\left(\vec{r}_{ij}\right) \cdot d\vec{s}_i - \int_{A,\gamma_j}^{B} \vec{\nabla}_{\vec{r_{ij}}} V_{ij}\left(\vec{r}_{ij}\right) \cdot d\vec{s}_j \tag{90}$$

$$= \int_{A,\gamma_{ij}}^{B} \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} V_{ij}\left(\vec{r}_{ij}\right) \cdot d\vec{r}_{ij} = \int_{A,\gamma_{ij}}^{B} \frac{dV_{ij}}{ds_{ij}} d\vec{s}_{ij} \tag{91}$$

$$= V_{ij}\left(\vec{r}_{ij,B}\right) - V_{ij}\left(\vec{r}_{ij,A}\right) \tag{92}$$

Si on remet tout ensemble (équation 65)

$$W_{AB,\gamma} = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[V_{ij}\left(\vec{r}_{ij,A}\right) - V_{ij}\left(\vec{r}_{ij,B}\right)\right]}_{\text{premier terme } 72 \to 92} + \underbrace{\sum_{i}\left[V_i^{ext}\left(\vec{r}_{i,A}\right) - V_i^{ext}\left(\vec{r}_{i,B}\right)\right]}_{\text{deuxième terme } 68 \to 70} \tag{93}$$

$$= V_{tot}\left(\{\vec{r}_{i,A}\}\right) - V_{tot}\left(\{\vec{r}_{i,B}\}\right) \qquad \text{attention au signe} \tag{94}$$

$$\text{Où l'on a définit} \quad V_{tot}\left(\{\vec{r}_i\}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij}\left(\vec{r}_{ij}\right) + \sum_{i} V_i^{ext}\left(\vec{r}_i\right) \tag{95}$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ vient du fait que l'on ne veut pas compter deux fois les V_{ij}, une fois pour i et une fois pour j.

Ici encore, on remarque que si les forces sont conservatives, le travail est indépendant du parcours γ.

Conservation de l'énergie mécanique Finalement, dans le cas à N particules, on encore une fois la conservation de l'énergie mécanique :

$$T_A + V_{tot,A} = T_B + V_{tot,B} \tag{96}$$

Résultats On s'arrête un moment pour discuter tous ces résultats :

1. L'impulsion totale d'un système de N particules est conservée si la troisième loi de Newton est valable (bien sur qu'elle l'est !)
2. Le moment cinétique totale est conservé si les forces entre les particules sont centrales (dirigées selon $\vec{r}_{ij}$)
3. L'énergie mécanique totale est conservé si les forces viennent d'un potentiel de la forme $V_{ij}(|\vec{r}_{ij}|)$

Alors on a remarqué que :

- $-\vec{\nabla}_{\vec{r}_i}\vec{V}_{ij}\left(\vec{r}_{ij}\right) = +\vec{\nabla}_{\vec{r}_j}V_{ij}\left(\vec{r}_{ij}\right)$
  $\Rightarrow \quad \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \qquad \Rightarrow$ troisième loi !!!
- Si V_{ij} dépende de $|\vec{r}_{ij}| = r_{ij}$, alors on peut développer un peu plus le gradient

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ij}\left(|\vec{r}_{ij}|\right) = \vec{\nabla}\vec{r}_{ij} V_j\left(|\vec{r}_{ij}|\right) = \sum_{\alpha=1}^{d} \hat{x}_i^{\alpha} \frac{d\left|\vec{r}_{ij}\right|}{dx_{ij}^{\alpha}} \frac{dV\left(r_{ij}\right)}{dr_{ij}} \tag{97}$$

$$= \underbrace{\frac{dV\left(r_{ij}\right)}{dr_{ij}}}_{\text{indép. de } \alpha} \cdot \sum_{\alpha=1}^{d} \hat{x}^{\alpha} \frac{d}{dx_{ij}^{\alpha}} \sqrt{\sum_{\beta=1}^{d}\left(x_{ij}^{\beta}\right)^2} \tag{98}$$

$$= \frac{dV\left(r_{ij}\right)}{dr_{ij}} \sum_{\alpha=1}^{d} \hat{x}^{\alpha} \frac{x_{ij}^{\alpha}}{\sqrt{\sum_{\beta}\left(x_{ij}^{\beta}\right)^2}} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{d} x_{ij}^{\alpha}\hat{x}^{\alpha}}{r_{ij}} \frac{dV\left(r_{ij}\right)}{dr_{ij}} \tag{99}$$

$$= \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \frac{dV\left(r_{ij}\right)}{dr_{ij}} = \hat{r}_{ij} \frac{dV\left(r_{ij}\right)}{dr_{ij}} \qquad \text{(dirigé selon } \vec{r}_{ij} \text{ !!)} \tag{100}$$

Donc, la forme du potentiel $V_{ij}(|\vec{r}_{ij}|)$ mène automatiquement à la conservation simultanée de l'impulsion totale (et elle-même à la 3ème loi!), à la conservation du moment cinétique totale et à la conservation de l'énergie mécanique totale.

Symétries Donc on analyse un peu mieux cette structure $V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$

1. Dépend uniquement de la différence entre $\vec{r}_i$ et $\vec{r}_j$. Il est donc " invariant par translation" (une symétrie!) : si on ajoute un vecteur $\vec{a}$ à $\vec{r}_i$ et $\vec{r}_j$ on a $\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{a}$ et $\vec{r}_j' = \vec{r}_j + \vec{a}$.

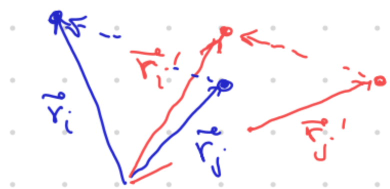


Figure 1: $\vec{r}_i' - \vec{r}_j' = \vec{r}_i - \vec{r}_j$

Cette partie donne la troisième loi de Newton et la conservation de l'impulsion totale

2. $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ ne dépend pas de l'orientation, donc est "invariant par rotation" (une symétrie !) et cette structure est responsable de la conservation du moment cinétique totale.

Donc on peut se poser la question : et si les symétries jouaient un rôle bien plus profond que ce que l'on est superficiellement en train de toucher. On va en rediscuter prochainement.