Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

1) Newton :

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

1) Newton :

Force

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

1) Newton :

Force

$$m\ddot{x} = -kx \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Solution générale de l'équation différentielle :

$$x(t) \quad = \quad c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

c1 et c2 déterminés par les conditions initiales
(équa. diff. ordinaire du 2e ordre)

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

2) Lagrange :

Energie potentielle $$F = -kx = -m\omega^2 x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

2) Lagrange :

Energie potentielle $$F = -kx = -m\omega^2 x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

Lagrangien $$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

2) Lagrange :

Energie potentielle $$F = -kx = -m\omega^2 x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

Lagrangien $$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

Equation de Lagrange $$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -m\omega^2 x$$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

2) Lagrange :

Energie potentielle $$F = -kx = -m\omega^2 x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

Lagrangien $$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

Equation de Lagrange $$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -m\omega^2 x$$

$$\Rightarrow \qquad m\ddot{x} + m\omega^2 x = 0$$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

2) Lagrange :

Energie potentielle $$F = -kx = -m\omega^2 x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

Lagrangien $$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

Equation de Lagrange $$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -m\omega^2 x$$

$$\Rightarrow \qquad m\ddot{x} + m\omega^2 x = 0$$

!! Même équation que Newton !!

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3) Hamilton : $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ $H(q_1, \ldots, q_N; p_1, \ldots, p_N; t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_1, \ldots, q_N; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N; t)$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3) Hamilton : $$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad H(q_1, \ldots, q_N; p_1, \ldots, p_N; t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_1, \ldots, q_N; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N; t)$$

Hamiltonien $$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \qquad (q = x,\ p = m\dot{x})$$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3) Hamilton : $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ $\quad H(q_1, \ldots, q_N; p_1, \ldots, p_N; t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_1, \ldots, q_N; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N; t)$

Hamiltonien $\quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \qquad (q = x,\ p = m\dot{x})$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3) Hamilton : $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ $\quad H(q_1, \ldots, q_N; p_1, \ldots, p_N; t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_1, \ldots, q_N; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N; t)$

Hamiltonien $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2}{2} q^2 \qquad (q = x,\ p = m\dot{x})$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$\ddot{p} = -m\omega^2 \dot{q} = -\omega^2 p \qquad \ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\omega^2 q$$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3) Hamilton : $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ $\quad H(q_1, \ldots, q_N; p_1, \ldots, p_N; t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_1, \ldots, q_N; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N; t)$

Hamiltonien $\quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \qquad (q = x,\ p = m\dot{x})$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$\ddot{p} = -m\omega^2 \dot{q} = -\omega^2 p \qquad \ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\omega^2 q$$

$$\ddot{p} + \omega^2 p = 0 \qquad \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3) Hamilton : $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ $\quad H(q_1, \ldots, q_N; p_1, \ldots, p_N; t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_1, \ldots, q_N; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N; t)$

Hamiltonien $\quad H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2}{2} q^2 \qquad (q = x,\ p = m\dot{x})$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$\ddot{p} = -m\omega^2 \dot{q} = -\omega^2 p \qquad \ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\omega^2 q$$

$$\ddot{p} + \omega^2 p = 0 \qquad \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

!! Même équation que Newton pour p et q !!

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3') Hamilton : notation compacte $\vec{u} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3') Hamilton : notation compacte $\vec{u} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$

Equations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = M\vec{u} \\ M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3') Hamilton : notation compacte $\vec{u} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$

Equations
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = M\vec{u} \\ M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On peut résoudre ces équations par diagonalisation de M et développement de la solution sur les vecteurs propres de M

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3') Hamilton : notation compacte $\vec{u} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$

Equations

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = M\vec{u} \\ M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On peut résoudre ces équations par diagonalisation de M et développement de la solution sur les vecteurs propres de M

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \lambda_+ = \mathrm{i}\omega \\ \lambda_- = -\mathrm{i}\omega \end{cases}$$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3') Hamilton : notation compacte $\vec{u} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$

Equations d'Hamilton :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = M\vec{u} \\ M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

On peut résoudre ces équations par diagonalisation de M et développement de la solution sur les vecteurs propres de M

$$M\vec{u}_+ = \lambda_+\vec{u}_+ = \mathrm{i}\omega\vec{u}_+$$

$$M\vec{u}_- = \lambda_-\vec{u}_- = \mathrm{i}\omega\vec{u}_-$$

$$\vec{u}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i}m\omega \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i}m\omega \end{pmatrix}$$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3') Hamilton : notation compacte $\vec{u} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$

Equations d'Hamilton :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = M\vec{u} \\ M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

On peut résoudre ces équations par diagonalisation de M et développement de la solution sur les vecteurs propres de M

$$\dot{\alpha}_+(t)\vec{u}_+ + \dot{\alpha}_-(t)\vec{u}_- = \lambda_+\vec{u}_+ + \lambda_-\vec{u}_-$$

Cette équation détermine l'évolution temporelle des coefficients alpha

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3') Hamilton : notation compacte $\vec{u} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$

Equations d'Hamilton :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = M\vec{u} \\ M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On peut résoudre ces équations par diagonalisation de M et développement de la solution sur les vecteurs propres de M

$$\vec{u}(t) = \alpha_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\vec{u}_+ + \alpha_- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\vec{u}_-$$

$$q(t) = \alpha_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \alpha_- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = (\alpha_+ + \alpha_-)\cos\omega t + \mathrm{i}(\alpha_+ - \alpha_-)\sin\omega t$$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3') Hamilton : notation compacte $\vec{u} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$

Equations d'Hamilton :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = M\vec{u} \\ M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On peut résoudre ces équations par diagonalisation de M et développement de la solution sur les vecteurs propres de M

$$q(t) = \alpha_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \alpha_- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = (\alpha_+ + \alpha_-)\cos\omega t + \mathrm{i}(\alpha_+ - \alpha_-)\sin\omega t$$

Comme q(t) doit être réel $\Rightarrow \alpha_+ = \alpha_-^*$ déterminés par conds. initiales.

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3”) Hamilton : crochets de Poisson - détermination de constantes du mouvement

Démontrons que $u(p,q,t) = \ln(p + \mathrm{i}m\omega q) - \mathrm{i}\omega t$ est une constante du mouvement en utilisant le crochet de Poisson.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= -\mathrm{i}\omega + \{u, H\} \\
\{u, H\} &= \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial p} \\
&= \frac{p}{m}\frac{\mathrm{i}m\omega}{p + \mathrm{i}m\omega q} - \frac{m\omega^2 q}{p + \mathrm{i}m\omega q} \\
&= \mathrm{i}\omega\frac{p + \mathrm{i}m\omega q}{p + \mathrm{i}m\omega q} = \mathrm{i}\omega \\
\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= 0.
\end{aligned}$$

Posons $u = u_0$,

$$\ln(p + \mathrm{i}m\omega q) - \mathrm{i}\omega t = u_0, \qquad p + \mathrm{i}m\omega q = \mathrm{e}^{u_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

Posons $\dfrac{\mathrm{e}^{u_0}}{\mathrm{i}m\omega} = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$

$$p + \mathrm{i}m\omega q = \mathrm{i}m\omega a\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \alpha)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{q = a\cos(\omega t + \alpha)}.$$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3’’’) Hamilton : crochets de Poisson - génération d’intégrales premières

$$\dot{f} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Solution

Séparation des variables $\quad f(q,p,t) = g(q,p) \cdot h(t)$

Développement polynomial $\quad g(q,p) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{n\ell} q^n p^l$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} n a_{n\ell} q^{n-1} p^{l+1} - m\omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} l a_{nl} q^{n+1} p^{\ell-1} = c \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{nl} q^n p^l$$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3’’’) Hamilton : crochets de Poisson - génération d’intégrales premières

$$\dot{f} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\frac{1}{m} p \frac{\partial f}{\partial q} - m\omega^2 q \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Solution

Séparation des variables $\quad f(q,p,t) = g(q,p) \cdot h(t)$

Développement polynomial $\quad g(q,p) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{n\ell} q^n p^l$

$$\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} n a_{n\ell} q^{n-1} p^{l+1} - m\omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} l a_{nl} q^{n+1} p^{\ell-1} = c \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{nl} q^n p^l$$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3’’’) Hamilton : crochets de Poisson - génération d’intégrales premières

$$\dot{f} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Solution

Séparation des variables $\quad f(q,p,t) = g(q,p) \cdot h(t)$

Développement polynomial $\quad g(q,p) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{n\ell} q^n p^l$

$$\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} n a_{n\ell} q^{n-1} p^{l+1} - m\omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} l a_{nl} q^{n+1} p^{\ell-1} = c \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{nl} q^n p^l$$

Mécanique analytique - différents formalismes

Exemple : oscillateur harmonique - p. ex. masse accrochée à un ressort

3"") Hamilton : crochets de Poisson - génération d'intégrales premières

$$\dot{f} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{m} p \frac{\partial f}{\partial q} - m\omega^2 q \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Solution

Séparation des variables $\quad f(q, p, t) = g(q, p) \cdot h(t)$

Développement polynomial $\quad g(q, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{n\ell} q^n p^l$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} n a_{n\ell} q^{n-1} p^{l+1} - m\omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} l a_{nl} q^{n+1} p^{\ell-1} = c \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{nl} q^n p^l$$

Hamilton - principle de moindre action

$$S[\{q_i(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, t)\mathrm{d}t$$

Hamilton - principle de moindre action

$$S[\{q_i(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, t)\mathrm{d}t$$

$$\downarrow$$

$$S\left[\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}\right] = \int_1^2 \left\{\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t)\right\} \mathrm{d}t$$

$$G(q_i, p_i, \dot{q}_i, \dot{p}_i, t) \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t)$$

Hamilton - principle de moindre action

$$S[\{q_i(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, t)\mathrm{d}t$$

$$S\left[\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}\right] = \int_1^2 \left\{\sum_i p_i\dot{q}_i - H(q_i, p_i, t)\right\}\mathrm{d}t$$

$$G(q_i, p_i, \dot{q}_i, \dot{p}_i, t) \equiv \sum_i p_i\dot{q}_i - H(q_i, p_i, t)$$

2N équations d'Euler-Lagrange

Hamilton - principle de moindre action

$$S[\{q_i(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, t)\mathrm{d}t$$

$$S\left[\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}\right] = \int_1^2 \left\{\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t)\right\} \mathrm{d}t$$

$$G(q_i, p_i, \dot{q}_i, \dot{p}_i, t) \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t)$$

2N équations d'Euler-Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial G}{\partial \dot{p}_i}\right) - \dfrac{\partial G}{\partial p_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial G}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial G}{\partial q_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

Hamilton - principle de moindre action

$$S[\{q_i(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, t)\mathrm{d}t$$

$$S\left[\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}\right] = \int_1^2 \left\{\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t)\right\} \mathrm{d}t$$

$$G(q_i, p_i, \dot{q}_i, \dot{p}_i, t) \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t)$$

2N équations d'Euler-Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial G}{\partial \dot{p}_i}\right) - \dfrac{\partial G}{\partial p_i} = 0 & \Leftrightarrow \quad \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial G}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial G}{\partial q_i} = 0 & \Leftrightarrow \quad \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

Eqs. d'Hamilton / canoniques