

Mécanique analytique Lecture 9 : Formalisme de Hamilton-Jacobi

Notes de cours de Paolo De le Rios

March 29, 2021

Formalisme de Hamilton-Jacobi

On sait que si $K = \text{const}$ ($= 0$ pour simplicité), alors

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \end{cases} \quad \text{sont les équations les plus simples à résoudre} \quad (1)$$

Alors on peut poser le problème suivant : existe-t-elle une transformation canonique telle que $K = 0$?

Traditionnellement on cherche une transformation du type $F_2(\{q_i\}, \{P_i\}, t)$ pour plusieurs raisons :

1. L'identité est $F_2(\{q_i\}, \{P_i\}, t) = \sum_i q_i P_i$ et a une forme particulièrement simple avec F_2 [Mais il faut rappeler que, donné F_2 , la même transformation peut être engendrée par F_2, F_3 ou F_4 trouvées par transf. de Legendre]
2. pour ce que nous allons voir ci-dessous

On va poser le problème

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Mais

$$H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

ici il faut substituer $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ pour obtenir

$$H\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right\}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

Puisque F_2 dépend seulement de $\{q_i\}, \{P_i\}$ et t , il s'agit d'une équation différentielle aux dérivées partielles à résoudre en $\{q_i\}$ et t .

Sans se plonger dans la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles, on peut en dire quelque chose :

Pour chaque $\frac{\partial F_2}{\partial q_i}$, l'intégration nécessite une constante d'intégration :

$$\frac{df}{dx} \longrightarrow f(x) = \int_{x_0}^x \frac{df}{dx'} dx' + \underbrace{f(x_0)}_{\text{à connaître}} \quad (5)$$

$f(x_0)$ doit être une constante pour toutes les valeurs de x , car

$$f(x_1) = \int_{x_0}^{(x_1)} \frac{df}{dx'} dx' + \underbrace{f(x_0)}_{\text{identique}} \quad f(x_2) = \int_{x_0}^{(x_2)} \frac{df}{dx'} dx' + \underbrace{f(x_0)}_{\text{identique}} \quad (6)$$

Donc, si on traduit en F_2 , cela veut dire que les constantes que l'on doit utiliser doivent être constantes pour toute la trajectoire.

Donc, on réécrit

$$H\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial f}{\partial q_i}\right\}, t\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{on a appelé } f \text{ la solution} \quad (7)$$

et on a besoin de $3N + 1$ constantes (une pour chaque $\frac{\partial}{\partial q_i}$ et une pour $\frac{\partial}{\partial t}$; si le système était en 2D, on aurait $2N + 1$ constantes, etc... ; si on avait 3D mais avec des contraintes, on aurait $3N - k + 1$ constantes; en générale, on a besoin

d'une nombre de constantes égal au nombre de degré de liberté + 1).

Important : la solution existe seulement si on a un nombre suffisant de constantes, qui doivent être constantes tout au long de la trajectoire; elles doivent être des constantes du mouvements !

D'abord on remarque que S entre dans l'équation seulement à travers ses dérivées. Donc on peut écrire

$$f\left(\{q_i\}, \underbrace{\{c_i\}}_{i \rightarrow 3N+1}, t\right) = S\left(\{q_i\}, \underbrace{\{c_i\}}_{i \rightarrow 3N}, t\right) + c_{3N+1} \quad (8)$$

La dernière constante c_{3N+1} est mathématiquement nécessaire pour définir de manière complète la solution, mais elle est , physiquement non-nécessaire !

Pour rappel, la physique dépend uniquement des dérivées de f, et donc la constante c_{3N+1} ne compte pas.

On revient sur la raison pour laquelle on choisit F_2 (raison 2) : typiquement, H est non-linéaire en $\{p_i\}$ d'une façon simple (p_i^2); par contre elle peut être non-linéaire dans les $\{q_i\}$ de façon compliquée (dépend de la forme de $V(\{q_i\})$). Donc les dérivées partielles par rapport aux q_i interviennent de manière simple en F_2 mais les dérivées par rapport à $\frac{\partial}{\partial p_i}$ (qu'on utiliserait en F_3 et F_4) interviendrait par biais du potentiel : $V(\{\frac{\partial F}{\partial p_i}\})$, potentiellement compliqué.

Finalement, on revient à

$$\boxed{H\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial S}{\partial q_i}\right\}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0} \quad \text{appelée l'équation de Hamilton-Jacobi} \quad (9)$$

La solution est $S(\{q_i\}, \{c_i\}, t)$, mais on sait que S est une " F_2 ", donc elle devrait être $S(\{q_i\}, \{P_i\}, t)$. Mais on sait aussi que $K = 0$ (par construction de Hamilton-Jacobi) et donc

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = 0 \\ \dot{P}_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_i = Q_i(0) \\ P_i = P_i(0) \end{cases} \quad (10)$$

avec les P_i sont des constantes du mouvement, donc on peut les utiliser comme $\{c_i\}$!!!

On remet tout ensemble par biais d'un exemple:

l'oscillateur harmonique (1D)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (11)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi est

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

Donc on peut procéder par séparation des variables (car H ne dépend pas de t : système isolé !)

$$S_Q(q, c) + S_t(t) \quad (13)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_q}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{\partial S_t}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_q}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2}_{\text{dépend seulement de q}} = \underbrace{-\frac{\partial S_t}{\partial t}}_{\text{dépend seulement de t}} \quad (15)$$

Les deux cotés de l'égalité, dépendant de variables différentes, sont donc égal à une même constante.

$$\begin{cases} \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_q}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E (= H) \\ -\frac{\partial S_t}{\partial t} = E \end{cases} \quad (16)$$

H est conservée car système isolé ! Voici la constante nécessaire pour résoudre Hamilton-Jacobi et qui est une constante du mouvement.

Solution :

$$S_t = -Et + S_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial S_q}{\partial q} = \pm \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} \quad (17)$$

question : le signe est-il ambigu ? ou est-ce physiquement raisonnable d'avoir les deux ?

Rappelons que

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial S_q}{\partial q} \quad (18)$$

donc le $\pm$ nous dit qu'on peut avoir la même énergie cinétique ($p^2 \rightarrow \left(\frac{\partial S_q}{\partial q}\right)^2$) avec la même $|p|$ indépendamment du signe ! Donc on peut choisir. on va l'utiliser dans quelques instant.

On répète :

$$\frac{\partial S_q}{\partial q} = \pm \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} \quad (19)$$

et alors

$$S_q(q) = \pm \int_{\bar{q}}^q \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q'^2} dq' + S_q(\bar{q}, E) \quad (20)$$

Le choix arbitraire de $\bar{q}$ est compensé avec le terme supplémentaire.

Note : $2mE - m^2\omega^2 q^2 = 2m(E - 1/2m\omega^2 q^2) = 2mT > 0$ avec T l'énergie cinétique. Donc la racine est bien définie.

Donc finalement on a

$$S(q, \underbrace{E}_{c_1}, c_2, t) = \pm \int_{\bar{q}}^q \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q'^2} dq' - Et + S_t(0) + \underbrace{S_q(\bar{q}, E)}_{c_2} \quad (21)$$

mais on sait que $S = S(q, P, t)$ car de type F_2 , donc $P = E$, et finalement

$$S(q, P, t) = \pm \int_{\bar{q}}^q \sqrt{2mP - m^2\omega^2 q'^2} dq' - Pt + S_t(0) + \underbrace{S_q(\bar{q}, E)}_{c_2 \text{ à négliger ?}} \quad (22)$$

D'abord on vérifie que

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = \underbrace{H}_{=E=P} - P = P - P = \boxed{0 = K} \text{ ok} \quad (23)$$

Ensuite

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \pm \int_0^q \frac{\frac{1}{2}2m}{\sqrt{2mP - m^2\omega^2 q'^2}} dq' - t + \frac{\partial S_q(\bar{q}, P)}{\partial P} \quad (24)$$

$$= \pm \sqrt{\frac{m}{2P}} \int_0^q \frac{1}{\sqrt{1 - \underbrace{\frac{m\omega^2}{2P} q'^2}_{<1}}} dq' - t + \frac{\partial S_q(\bar{q}, P)}{\partial P} \quad (25)$$

On substitue

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q' \quad \rightarrow \quad dq' = \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \cos \theta d\theta \quad (26)$$

et donc on a

$$Q = \pm \sqrt{\frac{m}{2P}} \int_0^{\text{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q\right)} \frac{\sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \cos \theta}{\cos \theta} d\theta - t \quad (27)$$

$$= \pm \sqrt{\frac{m}{2P}} \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \int_0^{\text{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q\right)} d\theta - t + \frac{\partial S_q(\bar{q}, P)}{\partial P} \quad (28)$$

$$= \pm \frac{1}{\omega} \text{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q\right) - t + \frac{\partial S_q(\bar{q}, P)}{\partial P} \quad (29)$$

Mais on sait que $Q(t)$ est constante, donc on peut le calculer au temps $t = 0$

$$Q(0) = \pm \frac{1}{\omega} \text{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q(0)\right) + \frac{\partial S_q(\bar{q}, P)}{\partial P} = Q(t) \quad (30)$$

donc

$$\pm \frac{1}{\omega} \text{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q(0)\right) + \cancel{\frac{\partial S_q(\bar{q}, P)}{\partial P}} = \pm \frac{1}{\omega} \text{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q(t)\right) + \cancel{\frac{\partial S_q(\bar{q}, P)}{\partial P}} - t \quad (31)$$

Les deux termes égaux s'annulent car ils viennent de c_2 , donc on peut le négliger, comme prévu !

et alors

$$\text{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q(t)\right) = \text{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} q(0)\right) \pm t\omega \quad (32)$$

d'où l'on tire

$$q(t) = q(0) \cos(\omega t) \pm \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2P} q^2(0)} \sin(\omega t) = \quad (33)$$

$$= q(0) \cos(\omega t) \pm \sqrt{\frac{2}{m\omega^2}} \sqrt{P - \frac{1}{2} m\omega^2 q^2(0)} \sin(\omega t) = \quad (34)$$

$$= q(0) \cos(\omega t) \pm \sqrt{\frac{2}{m\omega^2}} \sqrt{\frac{p^2(0)}{2m}} \sin(\omega t) = q(0) \cos(\omega t) \pm \frac{|P(0)|}{m\omega} \sin(\omega t) \quad (35)$$

Où l'on a utilisé que $P = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = \text{const}$. Il y a une ambiguïté de signe dans la dernière égalité qu'il faut résoudre selon le signe de $p(0)$.

En suite il faut déterminer $p(t)$:

$$p(t) = \frac{\partial S}{\partial q} = \pm \sqrt{2mP - m^2\omega^2 q^2} \quad (36)$$

(La dérivée par rapport à q du reste est nulle.)

et donc

$$p(t) = \pm \sqrt{2m \left(\frac{p(0)^2}{2m} + \frac{1}{2} m^2 \omega^2 q(0)^2 \right) - m^2 \omega^2 q(0)^2 \cos^2(\omega t) - m^2 \omega^2 \frac{p(0)^2}{m^2 \omega^2} \sin^2(\omega t) \pm 2m\omega q(0)|p(0)| \sin(\omega t) \cos(\omega t)} \quad (37)$$

$$= \pm \sqrt{p(0)^2 \cos^2(\omega t) \mp 2m\omega q(0)|p(0)| \sin(\omega t) \cos(\omega t) + m^2 \omega^2 q(0)^2 \sin^2(\omega t)} \quad (38)$$

$$= \pm |p(0)| \cos(\omega t) \mp m\omega q(0) \sin(\omega t) \quad (39)$$

Encore une fois on insiste que l'ambiguïté du signe est intrinsèque à la forme quadratique de l'énergie cinétique, et elle peut être résolue seulement par biais de la connaissance du signe de $p(0)$.

On peut résumer ce que l'on a fait, la procédure se généralise à tout type de cas lorsqu'on fait Hamilton-Jacobi :

1. On écrit

$$H\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial S}{\partial q_i}\right\}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (40)$$

2. On résout et on trouve $S(\{q_i\}, \{P_i\}, t)$ avec la relation $\{P_i\} = \{c_i\}$ constantes nécessaires à résoudre le problème et qui correspondent aux quantités conservées. Il y en a $3N$!

3. On trouve

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = Q_i(\{q_i\}_i, \{P_i\}, t) \quad (41)$$

mais $\dot{Q}_i = 0$, donc $\boxed{Q_i(\{q_i\}, \{P_i\}, t) = Q_i(\{q_i(0)\}, \{P_i\}, 0)}$

4. L'inversion de cette expression nous donne $q_i(t) = q_i(\{Q_i\}, \{P_i\}, t)$ où $\{Q_i\}$ sont donnés à partir des conditions initiales et $\{P_i\}$ quantités conservées.

$\{Q_i\}, \{P_i\}$ sont toutes déterminées à partir de $\{q_i(0)\}$ et $\{p_i(0)\}$

5. finalement on a

$$P_i(t) = \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i(\{q_i(t)\}, \{P_i\}, t) \quad (42)$$

Pour résumer

$$\begin{array}{ccc} H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) & \xrightarrow{\text{trans. canonique dépendant de } t} & K(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{array} \right. & \xleftarrow{\text{transf. canonique inverse dépendant de } t} & \left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_i = 0 \\ \dot{P}_i = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q_i(t) = Q_i(0) \\ P_i(t) = P_i(0) \end{array} \right. \end{array} \quad (43)$$

Donc, on a en effet caché l'évolution temporelle du système dans la fonction génératrice, donc dans la transf. canonique. Ce n'est pas surprenant, car on sait que l'évolution du système est une transformation canonique.

On fait un pas en arrière pour discuter les conséquences de ce que l'on a fait.

Si on peut résoudre Hamilton-Jacobi, c'est à dire trouver S , alors il suffit de calculer Q_i et P_i à $t = 0$, et en sachant qu'ils ne changent pas au cours du temps, par inversion de la transformation on trouve explicitement $q_i(t)$ et $p_i(t)$. On dit qu'on a résolu explicitement le système.

On se pose le problème inverse : pourrait-on résoudre explicitement le système, c'est-à-dire qu'on peut écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i(t) = q_i(t, \{q_i(0)\}, \{p_i(0)\}) \\ p_i(t) = p_i(t, \{q_i(0)\}, \{p_i(0)\}) \end{array} \right. \quad (44)$$

mais pas résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi ?

$\Rightarrow$ en effet non !

Si on pouvait résoudre explicitement les équations canonique de Hamilton, on aurait en effet trouvé la transformation canonique explicite qui correspond à l'évolution du système. Donc on aurait aussi, par inversion :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i(0) = q_i(\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}, t) = Q_i \\ p_i(0) = p_i(\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}, t) = P_i \end{array} \right. \quad (45)$$

et on sait que, vu qu'il s'agit d'une transformation canonique, on peut trouver, par intégration, $F_2(\{q_i\}, \{P_i\}, t)$. Donc, on aurait trouvé un F_2 tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_i = 0 \\ \dot{P}_i = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad K(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) = 0 \quad (46)$$

(la première accolade est évidente car les conditions initiales ne changent pas au cours du temps)

Mais ce F_2 serait la solution de Hamilton-Jacobi. D'un autre coté, la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dit que pour résoudre Hamilton-Jacobi, il est nécessaire d'avoir $3N$ constantes du mouvement. Alors on peut trouver une solution explicite du mouvement (c'est à dire : $q_i(t)$ et $p_i(t)$ explicite) si et seulement si il existe au moins $3N$ constantes du mouvement. Si elles n'existent pas, alors on ne peut pas avoir une solution explicite.

Attention ! La solution des équations canoniques existe et elle est unique, car $\{q_i(0)\}$ et $\{p_i(0)\}$ sont connues. Tout simplement, on ne peut pas écrire une forme explicite

$$\begin{cases} q_i(t) = q_i(\{q_i(0)\}, \{p_i(0)\}, t) \\ p_i(t) = p_i(\{q_i(0)\}, \{p_i(0)\}, t) \end{cases} \quad (47)$$

La conséquence est qu'on devra utiliser des solutions numériques.

Est-il commun d'avoir $3N$ constantes du mouvement ?

Intuitivement :

- Si le système est isolé, H est conservée (1 quantité conservée)
- Si il y a invariance par translation, $\vec{P}$ (3 quantités conservées)
- Si il y a invariance par rotation, $\vec{L}$ (3 quantités conservées)

Il est rare qu'on ait d'autres quantités (sauf pour des systèmes séparables, voir plus loin).

Donc, la plupart des systèmes avec plus de deux particules (donc avec $3N \geq 9 > 7(= 1 + 3 + 3)$) n'admettent pas de solution explicite (on dit qu'ils ne sont pas intégrables)