
Mécanique analytique — Exercices supplémentaires 6

*Assistants : stefano.zamuner@epfl.ch, francisco.kim@epfl.ch, kin.mimouni@epfl.ch,
alberto.rolandi@epfl.ch, ivan.perret@epfl.ch*

1 Coordonnées paraboliques

Dans cet exercice, nous proposons de résoudre un problème en utilisant des coordonnées paraboliques. Pour motiver leur utilisation, nous allons analyser un problème pour lequel le potentiel prend la forme

$$U = \frac{\alpha}{r} - Fz$$

soit la superposition d'un potentiel de type Coulombien et d'un champ (F) constant le long d'une direction. Nous observons que l'utilisation des coordonnées sphériques serait utile pour simplifier la symétrie du champ Coulombien, alors que les coordonnées cylindriques seraient utiles pour simplifier le traitement du terme linéaire en z . L'utilisation des coordonnées paraboliques est un compromis qui permet un traitement de ces deux symétries, moyennant quelques calculs supplémentaires. Afin de résoudre le problème, suivons les étapes suivantes :

1. Ecrivez le Lagrangien pour une particule libre en coordonnées cylindriques (ρ, z, ϕ) .
2. Déduisez le Hamiltonien correspondant.
3. La transformation des coordonnées cylindriques en coordonnées paraboliques (χ, η, ϕ) est donnée par les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}(\chi - \eta) \\ \rho &= \sqrt{\chi\eta}. \end{aligned} \tag{1}$$

Inversez les formules pour trouver χ et η en fonction de z et ρ .

4. Ecrivez les Lagrangien et Hamiltonien avec ces nouvelles coordonnées (χ, η, ϕ) .
5. Déduisez l'équation de Hamilton-Jacobi pour une particule soumise à un potentiel générique $U(\chi, \eta, \phi)$.
6. Considérons maintenant le cas spécial d'un potentiel du type

$$U = \frac{\alpha}{r} - Fz$$

où $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. Montrez que l'on peut mettre le potentiel sous la forme

$$U(\rho, z, \phi) = \frac{a(r+z) + b(r-z)}{2r}$$

Trouvez explicitement les fonction a et b . Trouvez la forme du potentiel en coordonnées paraboliques.

7. En utilisant la méthode de la séparations des variables, trouvez la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi (en coordonnées paraboliques) pour un système soumis à un potentiel de la forme trouvée au point 6. Vous pouvez garder des fonctions a et b génériques dans ce point. Nous nous contentons d'une forme pour S sous forme intégrale. Identifiez les quantités conservées trouvées comme moments généralisés.
8. Exprimez la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi en fonction des paramètres α et F décrivant le potentiel initial du point 6.