Mécanique analytique - examen final

Epreuve du 26 juin 2013 ; durée : 3h00.

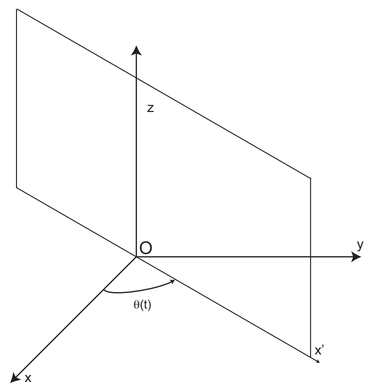
Règles :
Epreuve sans document ni calculatrice.
Toute réponse appelle une justification, même succinte.
L'utilisation du crayon est interdite. Les parties écrites au crayon ne seront pas corrigées.
Les exercices ne suivent aucun ordre particulier, à vous de choisir l'ordre de résolution.
Ecrire nom, prénom et numéro SCIPER sur chaque feuille.
Signer le feuille de présence au moment de rendre le travail.

Mécanique analytique - examen final

Cet énoncé comporte 4 exercices indépendants.

Exercice 1 : Contraintes en mouvement *(5 points)*

On considère le système mécanique suivant (voir figure ci-dessous) : une masse m bouge sur un plan infini qui contient l'axe z et qui tourne autour dudit axe selon une loi horaire donnée $\theta(t)$. La masse est soumise à un potentiel harmonique qui dépend seulement de la distance à l'axe z.



a) Etablir le lagrangien L du système. Nommer la quantité conservée dans le cas général.

b) Etablir l'hamiltonien H du système.

c) Etablir le lagrangien L du système dans le cas $\theta(t) = \omega t$, avec ω constante. Nommer les quantités conservées dans ce cas.

d) Discuter la stabilité du système.

e) Une deuxième masse M, contrainte à se déplacer dans le plan $Ox'z$, est maintenant liée à la masse m par un ressort de raideur K et de longueur au repos nulle. Discuter à nouveau les quantités conservées.

Exercice 2 : Hamilton-Jacobi et brisure d'une symétrie sphérique *(5 points)*

On considère un oscillateur harmonique de masse m en 3 dimensions qui présente une anisotropie en direction z. La force de rappel en direction z est quatre fois plus grande que dans le plan x, y. A ce système on superpose un champ central. L'énergie potentielle en coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) est donnée par

$$V(\rho, \phi, z) = \frac{a}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + k(\rho^2 + 4z^2), \tag{1}$$

où a et k sont des constantes.

a) Ecrire le lagrangien en coordonnées paraboliques (ξ, η, ϕ), où

$$\xi = \sqrt{\rho^2 + z^2} + z \qquad ; \qquad \eta = \sqrt{\rho^2 + z^2} - z \tag{2}$$

b) Ecrire l'hamiltonien et l'équation d'Hamilton-Jacobi.

c) Trouver la solution générale en appliquant la méthode de séparation des variables. On ne demande pas de résoudre les deux intégrales elliptiques qui apparaissent. Combien de constantes d'intégration différentes trouve-t-on ?

Exercice 3 : Optimisation estivale *(5 points)*

On considère un rivage rectiligne, représenté par l'axe Ox dans le plan Oxy ; la terre correspond au domaine $y < 0$ et la mer au domaine $y \geq 0$. Un baigneur initié au calcul variationnel cherche à minimiser son temps de parcours entre deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ au large du rivage ($y_A > 0$, $y_B > 0$), tels que $x_A \neq x_B$. Que le baigneur nage ou marche sur le fond marin lorsqu'il est dans l'eau, on considère qu'avec l'éloignement de la côte, divers facteurs entravent sa progression (profondeur de l'eau etc.), de sorte que sa vitesse de progression est à tout instant donnée par la loi $v(y) = v_0 f(y)$, où

$$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\gamma y + 1}} & \text{si } y \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

et v_0 et $\gamma > 0$ sont des constantes.

a) Le long de la trajectoire optimale, x varie-t-il de façon monotone ? Qu'en est-il de y ? On ne se préoccupera pas de discuter les cas de figure où x et/ou y seraient monotones mais pas strictement monotones. En déduire une paramétrisation judicieuse de la trajectoire.

b) Ecrire la fonctionnelle donnant le temps de parcours en fonction de la trajectoire empruntée.

c) En ne considérant que les trajectoires cantonnées à l'eau ($y \geq 0$ tout le long), montrer que l'équation de la trajectoire optimale se met sous la forme d'un polynôme dont on donnera le degré ; on ne cherchera *pas* à expliciter tous les coefficients du polynôme en fonction des paramètres du problème.

d) Par des arguments physiques simples, justifier le signe du coefficient de plus haut degré.

Exercice 4 : Oscillateur harmonique et problème képlerien *(10 points)*

On examine dans cet exercice la correspondance qui existe entre le mouvement dans un champ de force central de type gravitationnel (képlerien) et la dynamique d'un oscillateur harmonique bidimensionnel.

a) Etablir en coordonnées polaires (r, θ) le lagrangien L_h de l'oscillateur harmonique bidimensionnel isotrope ; on notera ω la fréquence de cet oscillateur. Nommer deux quantités manifestement conservées.

b) Etablir l'hamiltonien $H_h = H_h(r, \theta, p_r, p_\theta)$ du système.

c) On introduit les variables

$$Q = r^2/\ell \tag{4}$$
$$\alpha = 2\theta, \tag{5}$$

où $\ell > 0$ a la dimension d'une longueur, et l'on note P et p_α les impulsions associées respectivement à Q et α. En formant les crochets de Poisson $\{Q, P\}_{r,\theta,p_r,p_\theta}$ et $\{\alpha, p_\alpha\}_{r,\theta,p_r,p_\theta}$, déterminer quelle forme doivent avoir $P = P(r, p_r)$ et $p_\alpha = p_\alpha(p_\theta)$ afin que la transformation $(r, \theta, p_r, p_\theta) \to (Q, \alpha, P, p_\alpha)$ soit canonique.

d) Déterminer une fonction génératrice de type $F_3(\{Q_i\}, \{p_i\})$, indépendante du temps, qui engendre cette transformation canonique. On rappelle que dans cette écriture, $\{p_i\}$ et $\{Q_i\}$ désignent respectivement les anciennes impulsions et les nouvelles coordonnées, et que les autres variables satisfont $q_i = -\partial F_3/\partial p_i$ et $P_i = -\partial F_3/\partial Q_i$.

e) Ecrire le nouvel hamiltonien et l'énergie mécanique E_h associée à une trajectoire en fonction des variables Q, α, P et p_α. Quel est le signe de E_h ?

f) Exprimer en coordonnées polaires (Q, α) l'hamiltonien $H_c = H_c(Q, \alpha, P, p_\alpha)$ d'une particule de masse m dans le potentiel central $V(Q) = -K/Q$, où K est une constante positive (potentiel képlerien) ; on rappelle que tout problème dans un potentiel central peut se réduire à un problème plan. Déduire de H_c l'expression de l'énergie mécanique E_c associée à une trajectoire képlerienne en fonction des variables Q, α, P et p_α.

g) Montrer que toute trajectoire képlerienne avec $E_c < 0$ correspond à une trajectoire de l'oscillateur harmonique (ou vice versa). Exprimer la constante de raideur $m\omega^2$ et l'énergie E_h de l'oscillateur correspondant en fonction de E_c et des paramètres du problème képlerien.

Fin de l'énoncé.