

Examen Mécanique Analytique 2021

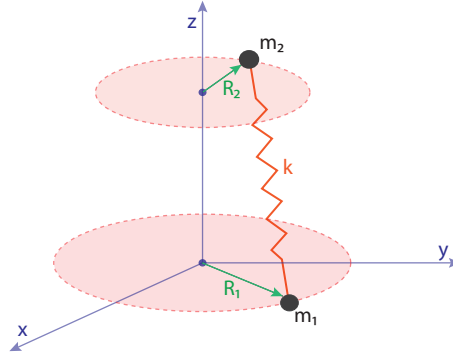
Paolo De Los Rios

Résumé

La durée de l'examen est de 3h00. L'examen comporte trois exercices indépendants. Épreuve sans document ni calculatrice. Toute réponse appelle une justification, même succincte. Les parties écrites au crayon ne seront pas corrigées. Écrire nom, prénom et numéro SCIPER sur chaque feuille. Signer la feuille de présence au moment de rendre le travail.

Exercice 1 : (9 points)

Deux masses m_1 et m_2 sont contraintes à se déplacer sur deux cercles de rayon R_1 et R_2 respectivement. Les deux cercles sont parallèles au plan xy et sont libres de se déplacer tout au long de l'axe z qui passe par leurs centres. Les deux masses sont reliées entre elles par un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0 .



- Trouver les bonnes coordonnées généralisées compatibles avec les contraintes du système ;
- Écrire le Lagrangien et les équations de Lagrange ;
- Donner les quantités conservées du système et justifier ;
- Écrire l'Hamiltonien du système et les équations canoniques ;
- Considérer le changement de variable suivant, où ϕ_1 et ϕ_2 sont les angles définis entre l'axe x et la masse m_1 , respectivement m_2 (dans un plan perpendiculaire à l'axe z) :

$$Z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$$

$$z = z_1 - z_2$$

$$\Phi = \frac{m_1 R_1^2 \phi_1 + m_2 R_2^2 \phi_2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}$$

$$\phi = \phi_1 - \phi_2$$

$$P_Z = p_{z_1} + p_{z_2}$$

$$p_z = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_{z_1} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} p_{z_2}$$

$$P_\Phi = p_{\phi_1} + p_{\phi_2}$$

$$p_\phi = \frac{m_2 R_2^2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} p_{\phi_1} - \frac{m_1 R_1^2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} p_{\phi_2}$$

Démontrer que ce changement de variable est canonique et écrire l'Hamiltonien correspondant.

Rappel :

$$1. \cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$2. \sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

Exercice 2 : (6 points)

Un système à un degré de liberté possède l'Hamiltonien suivant :

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

où $V(q)$ est défini comme suit :

$$V(q) = \begin{cases} \alpha q - (\alpha - \beta)q_0 & \text{pour } q > q_0 \\ \beta|q| & \text{pour } -q_0 \leq q \leq q_0 \\ -\alpha q - (\alpha - \beta)q_0 & \text{pour } q < -q_0 \end{cases}$$

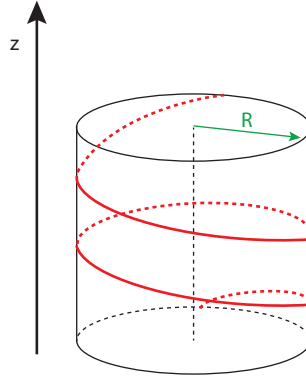
avec $\alpha > \beta > 0$.

- Esquisser le potentiel ;
- Dessiner le portrait de phase ;
- Pour les deux familles de trajectoires de l'espace de phase, montrez que les périodes d'oscillation valent

$$T_1 = 4 \frac{\sqrt{2m}}{\beta} E^{1/2} \quad \text{et} \quad T_2 = 4 \frac{\sqrt{2m}}{\beta} E^{1/2} \left[1 + \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \left(1 - \frac{\beta q_0}{E} \right)^{1/2} \right]$$

Exercice 3 : (5 points)

Un corde de masse linéique μ est soumise à la gravité. Elle est restreinte à la surface d'un cylindre de rayon R parallèle à l'axe z . La longueur de la corde est $L > 4\pi R$ et celle-ci effectue deux tours autour du cylindre, comme sur la figure ci-dessous.



La coordonnée z de la corde est proportionnelle à l'angle ϕ tel que $z(\phi) = -a\phi$ ($a > 0$), où ϕ est l'angle défini par rapport à la position du point d'attache de la corde (dans un plan perpendiculaire à l'axe z).

- Déterminer a ;
- On considère que le cylindre résiste à l'expansion/la compression imposée par la corde avec un potentiel donné par $V(R) = \frac{1}{2}kR^2$, $R \geq 0$. Déterminer le rayon R qui minimise l'énergie potentielle totale du système.

Indication : Pour cet exercice de minimisation, il n'est pas nécessaire d'utiliser le formalisme du calcul variationnel, mais seulement certaines de ses expressions