Examen Final: Mécanique Analytique 2016

Professeur Paolo De Los Rios

Epreuve du 1.07.2016

Règles

La durée de l'examen est de 3h00. L'examen comporte trois exercices. Epreuve sans document ni calculatrice. Toute réponse appelle une justification, même succinte. L'utilisation du crayon est interdite. Les parties écrites au crayon ne seront pas corrigées. Les exercices ne suivent aucun ordre particulier, à vous de choisir l'ordre de résolution. Ecrire nom, prénom et numéro SCIPER sur chaque feuille. Signer le feuille de présence au moment de rendre le travail. Un rappel sur les fonctions génératrices est donné à la dernière page.

Exercice 1 : Système binaire en deux dimensions (8 points)

Considérons deux points matériels, de masses égales m, contraints à se déplacer en deux dimensions. Les deux points sont reliés par un ressort de constante élastique k et de longueur au repos l_0. Les positions des deux points seront notées par $\vec{x}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{x}_2 = (x_2, y_2)$.

a) Ecrivez le Lagrangien du système en coordonnées cartésiennes

b) Re-écrivez le Lagrangien, après avoir effectué les changements de variables suivants :

$$\vec{x}_{cm} = \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2}$$

$$\vec{d} = \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{2}$$

$$\vec{d} = (d\cos\phi, d\sin\phi)$$

$$\vec{x}_{cm} = (x_{cm}, y_{cm})$$

de telle sorte que les nouvelles variables dynamiques deviennent x_{cm}, y_{cm}, d et ϕ.
Utilisez les changements suivants pour simplifier la notation :

$$M = 2m\ , \qquad L_0 = l_0/2\ , \qquad K = 4k$$

c) Ecrivez le Hamiltonien du système dans les nouvelles coordonnées.

d) Ecrivez les équations d'Euler-Lagrange et utilisez-les pour montrer que la vitesse du centre de masse est une constante du mouvement.

e) Trouvez deux autres quantités conservées. Ont-elles une interprétation physique simple ?

f) Considérez maintenant l'approximation suivante :

$$\epsilon = \frac{d - L_0}{L_0} \ll 1$$

où $L_0 = l_0/2$.

i) Expliquez avec des mots à quoi correspond physiquement l'approximation ci-dessus.

ii) Résolvez le système dans l'approximation ci-dessus.

iii) Donnez une condition sur K, M et $\dot{\phi}$ pour que l'approximation faite soit valable. Donnez une interprétation physique de cette condition.

Exercice 2 : Transformations canoniques (3 points)

Considérez la transformation suivante, où q_1, q_2, Q_1, Q_2 dénotent des coordonnées généralisées et p_1, p_2, P_1, P_2 dénotent leur moments conjugués :

$$\begin{aligned} Q_1(q_1, q_2, p_1, p_2) &= -2q_1^2 \\ Q_2(q_1, q_2, p_1, p_2) &= -q_2 \\ P_1(q_1, q_2, p_1, p_2) &= \frac{q_2 - p_1}{q_1} \\ P_2(q_1, q_2, p_1, p_2) &= q_1 - p_2 \end{aligned} \tag{1}$$

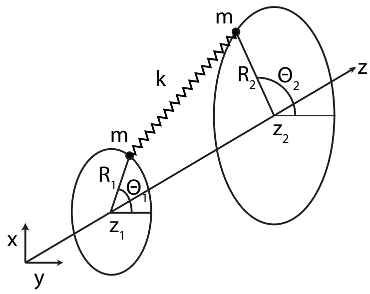
a) Montrez par la méthode de votre choix que la transformation n'est pas canonique.

b) Modifiez la transformation pour la rendre canonique.

c) Trouvez une fonction génératrice de type $F_2(q_1, q_2, P_1, P_2)$ qui génère la transformation modifiée au point b).

Exercice 3 : Quantités conservées (4 points)

Considérez deux masses identiques m, contraintes à glisser sans frottements sur deux cercles co-axiaux parallèles de rayon R_1 et R_2 respectivement.
Les deux cercles peuvent glisser sans frottements le long d'un axe (dirigé selon z) qui passe par le centre des cercles. Les deux cercles restent à tout moment contenus dans le plan Oxy, orthogonal z.
Les deux masses sont reliées par un ressort de constant k et de longueur au repos nulle. Les masses des cercles sont nulles et on néglige la gravité dans ce problème.



a) Ecrivez le Lagrangien du système en coordonnées cylindriques.

b) En sachant que le cercle 1 bouge en suivant une loi horaire $z_1(t)$ imposée par l'extérieur, écrivez les équations d'Euler-Lagrange.

c) Trouvez une quantité conservée dans le cas du point b).

d) On considère maintenant le cas différent où la position moyenne des deux cercles $z_m = \frac{z_1+z_2}{2}$ suit une loi horaire imposée par l'extérieur $z_m(t)$. Quelles sont maintenant les quantités conservées ?

Hint : Trouver une changement de variables qui découple le Lagrangien.

Fin de l'énoncé des exercices

Rappel

Rappel sur les fonctions génératrices :

$$\begin{aligned}
&F_1(q_i, Q_i) : \qquad p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \qquad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\
&F_2(q_i, P_i) : \qquad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \\
&F_3(p_i, Q_i) : \qquad q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \qquad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \\
&F_4(p_i, P_i) : \qquad q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \qquad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}
\end{aligned} \tag{2}$$