Mécanique analytique — Exercices supplémentaires 5

Assistants : hugo.chkroun@epfl.ch, brenno.delucca@epfl.ch, garance.durr-legoupil-nicoud@epfl.ch fanny.eustachon@epfl.ch, solange.flatt@epfl.ch, shiling.liang@epfl.ch adelaide.mohr@epfl.ch, alexandra.shelest@epfl.ch, adrian.woyke@epfl.ch

Quantités conservées et Crochets de Poisson

Exercice 1 : Considérez le système décrit par le Lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}(z_1, z_2, \varphi_1, \varphi_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{2} \left[\dot{z_i}^2 + (R\dot{\varphi}_i)^2 \right] - A \left[\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)\right]^3 \left[z_1 + 3z_2\right]^{3/4} . \tag{1}$$

i) Trouvez les dimensions de A.

ii) Trouvez trois quantités conservées par la méthode de votre choix.

Exercice 2 : Démontrez explicitement les crochets de Poisson [1] suivants :

i)

$$\{p_i, L_j\} = \epsilon_{ijk}\, p_k \tag{2}$$

ii)

$$\{x_i, \sin(Ap_jx_j)\} = Ax_i cos(Ax_jp_j) \tag{3}$$

iii)

$$\{\exp(B_ix_i + C_jp_j), \cosh(D_lx_l)\} = -C_kD_ke^{B_ix_i+C_jp_j} \sinh(D_lx_l) \tag{4}$$

où A est un scalaire constant et B_i, C_i et D_i sont des vecteurs constants (i.e. A, B_i, C_i, D_i n'ont aucune dépendance en x ni en p).

Exercice 3 : Soit le Hamiltonien suivant

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2. \tag{5}$$

montrer que

$$C = \ln(p + im\omega q) - i\omega t \tag{6}$$

est une constante du mouvement.

1. q_i et p_i sont ici toujours considérées comme variables conjuguées. On utilise ici la convention d'Einstein, qui consiste à sommer implicitement sur tous les indices répétés. Comme déja vu, $L_i = \epsilon_{ijk}x_jp_k$.